MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

LITERA

Dorin Linț
Maranda Linț
Alina Carmen Birta
Sorin Doru Noaghi
Dan Zaharia
Maria Zaharia

Matematika 8

Tankönyv a VIII. osztály számára

116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

LITERA

Dorin Linț
Maranda Linț
Alina Carmen Birta
Sorin Doru Noaghi
Dan Zaharia
Maria Zaharia

Matematika 8

Tankönyv a VIII. osztály számára

Manualul școlar a fost aprobat prin ordinul ministrului educației și cercetării nr. 5523/07.09.2020

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând cu anul școlar 2020–2021.

Inspectoratul școlar ....

Școala/Colegiul/Liceul ....

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

* *Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.*

• Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.

• Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Matematică. Manual pentru clasa a VIII-a

Dorin Linț, Maranda Linț, Alina Carmen Birta, Sorin Doru Noaghi, Dan Zaharia, Maria Zaharia

Referenți științifici: lector univ. dr., Marius-Nicolae Heljiu, Departamentul de Matematică-Informatică, Facultatea de Științe, Universitatea din Petroșani
prof. dr. Dan-Ștefan Marinescu, Colegiul Național „Iancu de Hunedoara", Hunedoara

Traducere în limba maghiară:
Traducători manual tipărit: Bálint Attila Sándor, capitolele 1, 2 și 3; Dáné Károly, capitolele 4 și 5.
Corector: Dézsi Eleonóra
Traducători digital (AMII): Kocsis Atilla, Tofalvi Emese

LITERA®
Editura Litera
tel.: 0374 82 66 35; 021 319 63 90; 031 425 16 19
Mobil: 0770 408 924
e-mail: contact@litera.ro

Ne puteți vizita pe
www.litera.ro

Editor: Vidrașcu și fiii
Redactori: Carmen Birta, Gabriela Niță
Corector: Carmen Bîtlan
Credite foto: Dreamstime, Shutterstock
Copertă: Vlad Panfilov
Tehnoredactare și prepress: Pontlab Srl

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematika : Tankönyv a VIII. osztály számára /
Dorin Linț, Maranda Linț, Alina Carmen Birta, … –
București :
Litera, 2021
ISBN 978-606-33-7089-2
I. Linț, Dorin
II. Linț, Maranda
III. Birta, Alina Carmen
51

TARTALOMJEGYZÉK

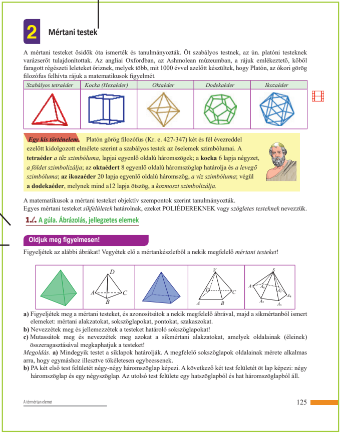
A tankönyv felépítése

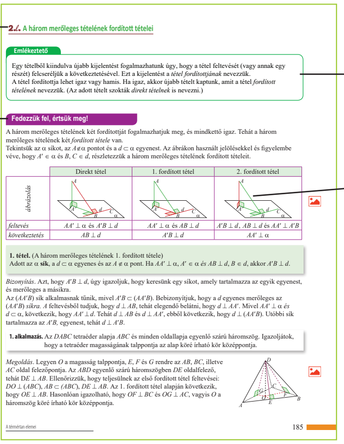
Nyomtatott változat

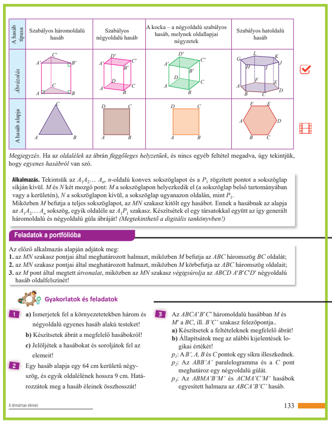
A VIII. osztályos Matematika tankönyv öt fejezetet tartalmaz, 22 tanítási egységet, amelyek megfelelnek a tantervben foglalt témaköröknek és tartalmaknak. A leckéket olyan gyakorlati, interaktív tanulási-értékelési tevékenységek egészítik ki, amelyek elősegítik a leckékkel összefüggésben álló sajátos kompetenciák kialakítását. A tanítási egységeket 2–6 óra alatt feldolgozható leckék osztják fel.

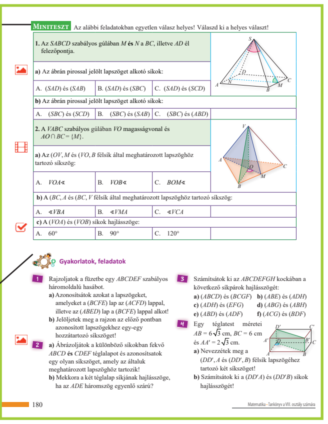
A tanítási egység bemutatása

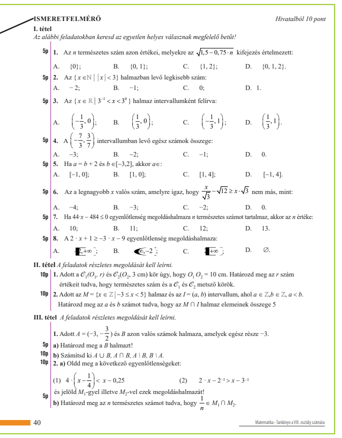
A tankönyv oldalai











ET – Egyéni tevékenység **PT** – Páros tevékenység **FT** – Frontális tevékenység **CS** – Csoportos tevékenység

Címszavakról

Emlékeztető	Előző leckékben elsajátított fogalmak és ismeretek, melynek célja, hogy logikus kapcsolatokat teremtsünk az új lecke tartalmával.
Oldjuk meg figyelmesen!	Felfedezésen alapuló mintafeladatok és gyakorlatok; új ismeretek felismerése vagy következtetése.
Fedezzük fel, értsük meg!	A tantervben foglalt tartalmak, példák, magyarázatok, megoldási módszerek.
Alkalmazás	Megoldott példák; a lecke fogalmai közötti kapcsolatot bemutató fontosabb matematikai eredmények; ismétlés; hétköznapi alkalmazás.
Gyakorlati alkalmazás	Feladatok megoldása egyéni vagy csoporttevékenységek alkalmával.
Feladat a portfólióba	Olyan egyéni vagy csoporttevékenységek, amelyek során a tankönyvi modellben leírt lépéseket követjük.
Ne kapkodj!	Figyelmeztetés tulajdonságok helytelen használatára, tévedési lehetőségekre.
Gyakorlatok és feladatok	Fokozatos nehézségi szintű, illetve a tanegység tartalmát követő tevékenységek.
Ismeretfelmérő	Objektív, félobjektív, szubjektív itemek

Digitális verzió

A digitális változat a teljes nyomtatott tankönyvön kívül tartalmaz új, interaktív feladatokat, oktató játékokat, animációkat, filmeket és szimulációkat.

Mindezek célja kognitív értéktöbblet hozzáadása.

A tankönyv oldalai számítógépen, laptopon, táblagépen, telefonon megtekinthetők és tökéletes navigálási tapasztalatot nyújtanak.

A tankönyv digitális változatában a tanítási egységek végén található egy-egy ismeretfelmérő, valamint útmutatások és megoldások.

A digitális tankönyvben találsz animációkat és kisfilmeket is, amelyek szemléltetik a mértani testek megalkotását, a térbeli alakulatok elemeinek elhelyezkedését, bizonyos távolságok meg szögek azonosítását.

Statikus AMII	Rajzokat, fényképeket, statikus diagramokat, statikus térképeket foglal magába.
Animációs AMII	Animációkat vagy filmeket foglal magába
Interaktív AMII	Magas fokú interaktív oktatói elemeket foglal magába (folyamatok szimulációi, problémamegoldás, kísérlet és felfedezés, oktató játékok), melyek segítségével a tanuló többlettudást szerezhet.

Alap- és sajátos kompetenciák a 3393/28.02.2017-as miniszteri rendelet alapján

1. **Adatok, mennyiségek és matematikai relációk felismerése adott környezetben**
   - **1.1.** Egy valós szám adott halmazhoz tartozásának felismerése
   - 1.2. Egy algebrai kifejezés elemeinek felismerése
   - 1.3. Függvényi kapcsolatok felismerése különböző helyzetekben
   - 1.4. Síkidomok és azok jellegzetes elemeinek felismerése térbeli alakzatokban
   - 1.5. Mértani testek felszínének, valamint térfogatának kiszámításához szükséges metrikus elemek felismerése
2. Változatos forrásokból származó mennyiségi, minőségi, strukturális matematikai adatok feldolgozása
   - **2.1.** Műveletek a valós számtengely intervallumaival
   - **2.2.** A számítási szabályok alkalmazása betűkkel jelölt valós számok esetén
   - **2.3.** Függvényi kapcsolat leírása diagram, táblázat, grafikon vagy képlet segítségével
   - **2.4.** Térbeli alakzatok ábrázolása rajzok és modellek segítségével
   - **2.5.** A tanult mértani testek jellemző adatainak feldolgozása további elemek kiszámítása céljából
3. Matematikai fogalmak és sajátos algoritmusok használata változatos összefüggésekben
   - **3.1.** Egyenlőtlenségek megoldására az R-ben intervallumokra vonatkozó matematikai eljárásokkal
   - **3.2.** Egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása rövidített számítási képletekkel és bizonyos algoritmusokkal
   - **3.3.** Függvények jellemzése különböző ábrázolási módok segítségével
   - **3.4.** Egyenesek és síkok egymáshoz viszonyított helyzetének vizsgálata a párhuzamosság és a merőlegesség tulajdonságai alapján
   - **3.5.** A mértani testek számszerű jellemzőinek kiszámítása alkalmas módszerek kiválasztásával
4. Adott helyzetre vonatkozó információk, következtetések, megoldási eljárások kifejezése matematikai szaknyelven
   - **4.1.** A halmaz, Intervallumok. Az intervallumok egyenlőtlenség fogalmára vonatkozó terminológia használata
   - **4.2.** Egy konkrét helyzet matematikai leírása algebrai számítások segítségével
   - **4.3.** A függvényi kapcsolatokra vonatkozó vélemény kifejtése matematikai szaknyelven
   - **4.4.** Egy mértani alakzat elemeinek jellemzése matematikai szaknyelven
   - **4.5.** Szakkifejezések használata a mértani idomok és testek jellemzésére
5. Adott helyzet matematikai jellemzőinek elemzése
   - **5.1.** Adott helyzet értelmezése intervallumok és egyenlőtlenségek segítségével
   - **5.2.** Adott helyzet értelmezése algebrai számítás segítségével
   - **5.3.** Egyes függvények elemzése interdiszciplináris környezetben
   - **5.4.** A térmértani alakzatok megfelelő ábrázolása a jellemzés és a metrikus elemek kiszámítása céljából
   - **5.5.** Bizonyos követelmények teljesítéséhez a szükséges feltételek vizsgálata egy térmértani alakzat esetében
6. Adott helyzet matematikai modellezése különböző területek ismeretanyagának beépítésével
   - **6.1.** Adott helyzet megoldása intervallumok és egyenlőtlenségek segítségével
   - **6.2.** Adott helyzet átültetése a matematikába, egyenletek és rövidített számítási képletek segítségével
   - **6.3.** A valós életben tapasztalt jelenség modellezése megfelelő függvény segítségével
   - **6.4.** Adott helyzet mértani modellezése megfelelő téralakzatok segítségével
   - **6.5.** A távolságra, területre és térfogatra vonatkozó információk értelmezése adott helyzet térmértani modellezése alapján

Ismétlés

1. Adott az $a = \dfrac{12}{\sqrt{6}} + \sqrt{(1-\sqrt{6})^2} + |-1|$ és $b = |2-\sqrt{12}| + 2\cdot\sqrt{(-1+\sqrt{3}-3\sqrt{6})^2}$ szám.

a) Végezd el a szükséges műveleteket és határozd meg az $m = min\{a;\, b\}$ számot, vagyis az *a és b* számok közül a kisebbiket, majd az $M = max\{a;\, b\}$ számot, vagyis az *a és b* közül a nagyobbikat!

b) Számítsd ki az *a és b* szám számtani és mértani közepét, alkalmazd az $m_a = \dfrac{a+b}{2}$ $m_g = \sqrt{a\cdot b}$ számtani, illetve mértani közepet megadó képleteket!

c) Használva az előző alpont eredményeit ellenőrizd az $m \le m_g \le m_a \le M$ egyenlőtlenséget!

2. Mutasd ki, hogy:

a) $\sqrt{225^2 - 224\cdot 225}$ és $\sqrt{1+3+5+7+....+35+37}$ racionális számok.

b) $\sqrt{499\cdot 500}$ és $\sqrt{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot 35\cdot 37}$ irracionális számok.

c) $\sqrt{4^n + 2^{2n+3}}$ racionális szám és $\sqrt{5\cdot n+7}$ irracionális szám, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

3. Adottak a következő számok:

$x = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$,

$y = \sqrt{98} - \sqrt{128} + \sqrt{50}$ és

$z = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}$.

a) Számítsd ki az adott számokat, majd rendezd növekvő sorrendbe!

b) Határozd meg az $x\cdot\sqrt{3} + |z| - y\cdot\sqrt{2}$ számot!

4. Számítsd ki a $2\cdot a - b$ értékét az $a = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ és $b = \sqrt{4} + \sqrt{8} - \sqrt{12}$ esetében!

5. Írd csökkenő sorrendbe a $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{18}\right)^{-1}$, $3\sqrt{27}$, $|-\sqrt{75}|$ számokat!

6. Határozd meg azt az *a* számot, melyre igaz, hogy $\dfrac{a}{3} = \dfrac{a+5}{4}$.

7. Határozd meg a *b* értékét tudva, hogy $b \ge 0$ és $\sqrt{4b^2} + 3 = b + \sqrt{(-5)^2}$!

8. Határozd meg a *c* számot, ha $c < 0$ és $\sqrt{\dfrac{9c^2}{16}} + 0{,}25 = c + 2$!

9. Ha $a = \sqrt{52} + \sqrt{208}$, akkor mutasd ki, hogy $a - 19 > 0$!

10. Határozd meg az $a_1, a_2, ..., a_9$ nullától különböző kilenc természetes szám számtani közepét tudva, hogy az a_1 és a_2 szám számtani közepe 1,5, az a_3, a_4, a_5 szám számtani közepe 4,valamint az a_6, a_7, a_8, a_9 szám számtani közepe 7,5 !

11. Egy 8%-os árcsökkenés után egy televízió 1288 lejbe került.

a) Határozd meg a televízió árcsökkentés előtti árát!

b) Határozd meg azt a legkisebb *p* számot, melyre a következő kijelentés igaz: ha a televízió árát *p*%-kal csökkentenék, akkor annak ára 1000 lejjel csökkenne!

12. A líceum könyvtárában levő könyvek 52%-a humán tudományok, 44%-a reál tudományok tanulásában segít, valamint a többi 864 könyv album vagy szótár.

a) Számítsd ki a könyvtárban levő könyvek számát!

b) Legkevesebb hány könyvet kell vegyen a könyvtár ahhoz, hogy a humán és reál könyvek száma azonos legyen!

13. Adott az $A = 2^n\cdot 25^{n+1} - 9\cdot 5^n\cdot 20^n$ szám, $n \in \mathbb{N}$.

a) Számítsd ki az *A* számot $n \in \{0,1\}$ esetén!

b) Határozd meg az *n* értékeit, ha $A < 10^6$!

14. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} = 10 \\ \dfrac{x}{2} + y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\cdot\left(x+\sqrt{2}\right) + 3\cdot\left(y-\sqrt{2}\right) = 10\sqrt{2} \\ \dfrac{x}{y} = 0,(3) \end{cases}$

15. Az ABC egyenlő oldalú háromszög oldalain felvesszük a $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in AC$ pontokat úgy, hogy $DE \parallel AC$, $EF \parallel AB$, valamint legyen P az AE és DF egyenesek metszéspontja. Bizonyítsd be, hogy:

a) $ADEF$ paralelogramma.

b) $CD = 2 \cdot AP$.

c) $BC = AD + AF$.

d) $AEB\sphericalangle - CAE\sphericalangle = 60°$.

16. Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = 90°$, $BC = 13$ cm és $\text{tg}(ACB\sphericalangle) = \dfrac{5}{12}$. Számítsd ki:

a) az AC befogó átfogóra eső vetületének hosszát.

b) az ABC háromszög köré írt kör sugarának hosszát.

c) az ABC háromszögbe írt kör hosszát.

17. Az ABC háromszög külső tartományában megszerkesztjük az ABD és ACE derékszögű háromszögeket úgy, hogy $ABD\sphericalangle = ACE\sphericalangle = 90°$ és $BAE\sphericalangle = CAD\sphericalangle$. Bizonyítsd be, hogy:

a) az ABD és ACE hasonló háromszögek.

b) ha $AD = AE$, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú.

18. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = AC$, AD a BAC szög szögfelezője, $D \in BC$ és E az AB oldal felezőpontja. A DE egyenes F pontban metszi az A ponton át BC egyeneshez húzott párhuzamos egyenest, valamint legyen G az F pontnak A pont szerinti szimmetrikusa.

a) Készíts a feladat adatainak megfelelő ábrát!

b) Bizonyítsd be, hogy:

b$_1$) $ADBF$ téglalap

b$_2$) $ABDG$ paralelogramma.

c) Határozz meg $AB = a$ és $BC = b$ között egy olyan összefüggést, melyre $BCGF$ szabályos sokszög legyen.

19. Az $ABCD$ négyzet AB és BC oldalán felveszszük az E *és* F pontot úgy, hogy $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{BF}{FC}$. Számítsd ki a (DE, AF) szög mértékét!

20. Adott egy egyenlő szárú trapéz, melynek átlói merőlegesek egymásra (ortodiagonális). B a nagyalap, b a kisalap, h a trapéz magassága, valamint d az átlók hossza. Bizonyítsd be, hogy

$$h = \frac{B+b}{2} \text{ és } h = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

21. Az $ABCD$ derékszögű trapézban $A\sphericalangle = D\sphericalangle = 90°$, $AB = 8$ cm, $CD = 2$ cm, $AD = 4$ cm. A D ponton át BC egyeneshez húzott párhuzamos egyenes az AB egyenest E pontban metszi, $AC \cap DE = \{F\}$, valamint P az F pontnak AD egyenesre eső vetülete.

a) Számítsd ki a $BCDE$ négyszög és a trapéz területeinek arányát!

b) Számítsd ki az AP szakasz hosszát!

c) Bizonyítsd be, hogy a BD és EP párhuzamos egyenesek!

22. Az ABC derékszögű háromszögben $C\sphericalangle = 90°$, D az AB oldal egy pontja, $AD = 10$ cm és $BD = 20$ cm.

a) Számítsd ki az ACD és BCD háromszögek területeinek arányát!

b) Ha $ACD\sphericalangle = BCD\sphericalangle$, számítsd ki az AC, BC és DC szakaszok hosszát!

23. A kör egyik húrjának hossza 48 cm és távolsága a kör középpontjától 18 cm. Számítsd ki a kör hosszát és területét!

24. Az $r = 6$ cm sugarú $\mathcal{C}(O, r)$ körön felvesszük az A, B pontot úgy, hogy $AOB\sphericalangle = 120°$. A kör B pontjában szerkesztett érintőn felvesszük azt a D pontot, amely az $AOB\sphericalangle$ belső tartományában található és $BD = 6$ cm. A D középpontú és DB sugarú kör másodszor P pontban metszi a $\mathcal{C}(O,r)$ kört. Számítsd ki a kisebbik $\overset{\frown}{AP}$ és $\overset{\frown}{BP}$ körív mértékét!

25. A $\mathcal{C}(O, r)$ körben az AB húr és CD átmérő párhuzamosak, valamint $BO \parallel AD$. Tudva, hogy $AB = 4$ cm, számítsd ki az $ABCD$ négyszög területét és az $\overset{\frown}{AB}$ és $\overset{\frown}{BC}$ körív hosszát!

26. Az MNP háromszögben $MP = 8$ cm, $PN = 6$ cm, $MPN\sphericalangle = 60°$ és MA a háromszög magassága, $A \in NP$. Megszerkesztjük az $AMBN$ téglalapot. Számítsd ki:

a) az $AMBN$ téglalap kerületét.

b) a BPM szög szinuszát.

c) az $\dfrac{AQ}{QM}$ arány értékét, ahol Q az AM és BP egyenesek metszéspontja.

27. Legyen B az AC szakasz egy pontja. Az AC egyenes ugyanazon oldalán megszerkesztjük az $ABMN$ és $BCEF$ négyzetet. Bizonyítsd be, hogy:

a) $AF = MC$ **b)** $AM \perp FC$.

28. Az $ABCD$ trapézban $AB \| CD$, $AB > CD$, $AD = CD = BC$, $B\sphericalangle = 60°$ és $CD = 4$ cm.

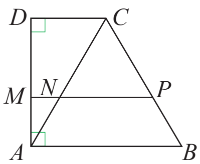
a) Számítsd ki az AB nagyalap hosszát!

b) Ha $AD \cap BC = \{P\}$, számítsd ki a $\dfrac{PD}{PA}$ arány értékét!

29. Legyen AA' félegyenes a BAC szög szögfelezője, $A' \in BC$, valamint $A'D \parallel AC$ és $A'E \parallel AB$, $D \in AB$, $E \in AC$. Tudjuk, hogy $AB = 24$ cm, $AC = 36$ cm, $BC = 30$ cm.

a) Határozd meg az $ADA'E$ négyszög természetét!

b) Számítsd ki az $ADA'E$ és $ADA'C$ négyszögek kerületét!



30. Az $ABCD$ derékszögű trapézban $A\sphericalangle = D\sphericalangle = 90°$ és $AB \parallel CD \parallel MN$.

a) Figyeld meg az ábrát, és írj egyenlő arányokat, indokold válaszod!

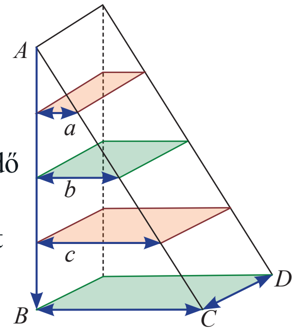
b) Ha a CNP egyenlő oldalú háromszög, $AD = 7\sqrt{3}$ cm, számítsd ki az $ABCD$ trapéz területét!

31. Az MNP háromszög MN és MP oldalán felvesszük az A illetve B pontot úgy, hogy $MAB\sphericalangle \equiv MPN\sphericalangle$.

a) Bizonyítsd be, hogy $\Delta MAB \sim \Delta MPN$.

b) Ha $MN = 10$ cm, $NP = 15$ cm, $MP = 12$ cm és $AB = 9$ cm, számítsd ki az $ABPN$ négyszög kerületét!

32. A mellékelt ábrán négy, téglalap alakú, egymástól egyenlő távolságra elhelyezkedő polc látható. Ha $AB = 1{,}80$ m, valamint az alsó polc méretei $BC = 0{,}80$ m és $CD = 0{,}30$ m, számítsd ki a többi polc méreteit!



33. Az $ABCD$ rombusz, $AC \cap BD = \{O\}$, az M pont az O pontnak AB egyenesre eső vetülete. Tudva, hogy $AM = 1{,}8$ cm és $MB = 3{,}2$ cm, számítsd ki:

a) az OM szakasz hosszát.

b) a rombusz területét!

1. ISMERETFELMÉRŐ

Hivatalból 10 pont.

I. Tétel *Állapítsd meg az alábbi kijelentések logikai értékét!*

5p **1.** Ha $\dfrac{1}{x} = 0{,}(3)$, akkor $x = 3$.

5p **2.** Ha $(3 - y)^2 \le 0$, akkor $y = -3$.

5p **3.** A $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^3} \cdot \sqrt{2^4}$ racionális szám.

5p **4.** A $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10}$ irracionális szám.

5p **5.** A $-4\sqrt{3}$ és $-5\sqrt{2}$, számok közül a kisebbik $-4\sqrt{3}$.

5p **6.** Ha egy négyzet átlójának hossza 6 cm, akkor a kerülete $12\sqrt{3}$ cm.

5p **7.** Az MN szakasz az ABC háromszög középvonala, $M \in AB$, $N \in AC$. Az AMN és ABC háromszögek területének aránya $\dfrac{1}{6}$.

5p **8.** Ha $ABCDEF$ szabályos hatszög és $AD = 20$ cm, akkor $AB = 10$ cm.

II. Tétel

10p **1.** A toll árát kétszer csökkentették. Először 10 lejjel, másodszor pedig 10%-kal csökkentették. A toll végső ára 27 lejt lett. Határozd meg a toll eredeti árát!

10p **2.** Az $ABCD$ téglalap, $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm. A C ponton át BD egyeneshez húzott párhuzamos az AD egyenest E pontban metszi. Számítsd ki a CE szakasz hosszát!

III. Tétel

1. Adott az $\frac{x+2}{3}-\frac{x-a}{4}=1$ egyenlet, $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Oldd meg az egyenletet $a = 1$ esetén!

5p **b)** Határozd meg az a értékét úgy, hogy 2 az egyenlet megoldása legyen.

2. A $\mathcal{C}(O,r)$ kör A és B pontja esetén az AB egyenesnek a kör középpontjától mért távolsága $\frac{r}{2}$, valamint T az AB szakasz felezőmerőlegesének azon pontja, mely az AOB szög belső tartományában található és $TO = 2\cdot r$.

5p **a)** Számítsd ki az $\overset{\frown}{AB}$ körív hosszát!

5p **b)** Ha $r = 8$ cm, számítsd ki a TA szakasz hosszát és T pontnak AB egyenestől mért távolságát!

10p **c)** Bizonyítsd be, hogy TB a $\mathcal{C}\,(O, r)$ kör érintője!

2. ISMERETFELMÉRŐ

Hivatalból 10 pont.

I. Tétel *Egészítsd ki úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjunk!*

5p **1.** A $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2^2}}}$ számítás eredménye… .

5p **2.** A $2^2 \cdot (-3)^2 \cdot 5^4$ szám négyzetgyöke … .

5p **3.** Ha $n \in \mathbb{N}$ és $\sqrt{7-2\cdot n}$ racionális szám, akkor n értéke … .

5p **4.** A $-2 = 7 - x^2$ egyenlőséget teljesítő számok … .

5p **5.** Ha a derékszögű háromszög átfogójának hossza 8,4 cm, akkor a háromszög köré írt kör sugarának hossza …cm

5p **6.** Az $ABCD$ téglalapban $AC \cap BD = \{O\}$, $AB = 10$ cm és $BC = 3{,}2$ cm. Az AOD háromszög területe … cm^2.

5p **7.** Ha a rombusz területe 24 cm^2 és egyik átlójának hossza 6 cm, akkor a kerülete… cm.

5p **8.** Ha $ADCDEF$ szabályos hatszög, $AB = 12$ cm és $AE \cap CF = \{T\}$, akkor $CT = \ldots$ cm.

II. Tétel

10p **1.** Adott az $M=\left\{\sqrt{4}, \sqrt{14}, \sqrt{24}, \sqrt{34}, ..., \sqrt{384}, \sqrt{394}\right\}$ halmaz.

a) Határozd meg az M halmaz elemeinek számát!

b) Határozd meg az $M \cap \mathbb{N}$ halmazt.

c) Határozd meg az $M \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ halmaz elemeinek számát!

10p **2.** Az $ABCD$ rombusz átlóinak hossza centiméterben kifejezve egymás utáni páros számok, $AC < BD$, valamint $\mathrm{tg}(ABD\sphericalangle) = 0{,}75$. Számítsd ki a rombusz oldalának hosszát!

III. Tétel

5p **1. a)** Határozd meg az a és b valós számot, ha $\sqrt{(\sqrt{2}-a)^2}+\sqrt{(b-\sqrt{3})^2}=0$.

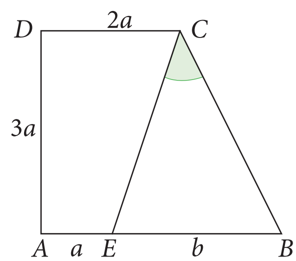
10p **b)** Oldd meg a valós számok halmazán az $\begin{cases} x+|y|=9 \\ 3\cdot x-(2+|y|)=-3 \end{cases}$ egyenletrendszert!

2. A mellékelt ábrán látható $ABCD$ derékszögű trapézban $E \in AB$.

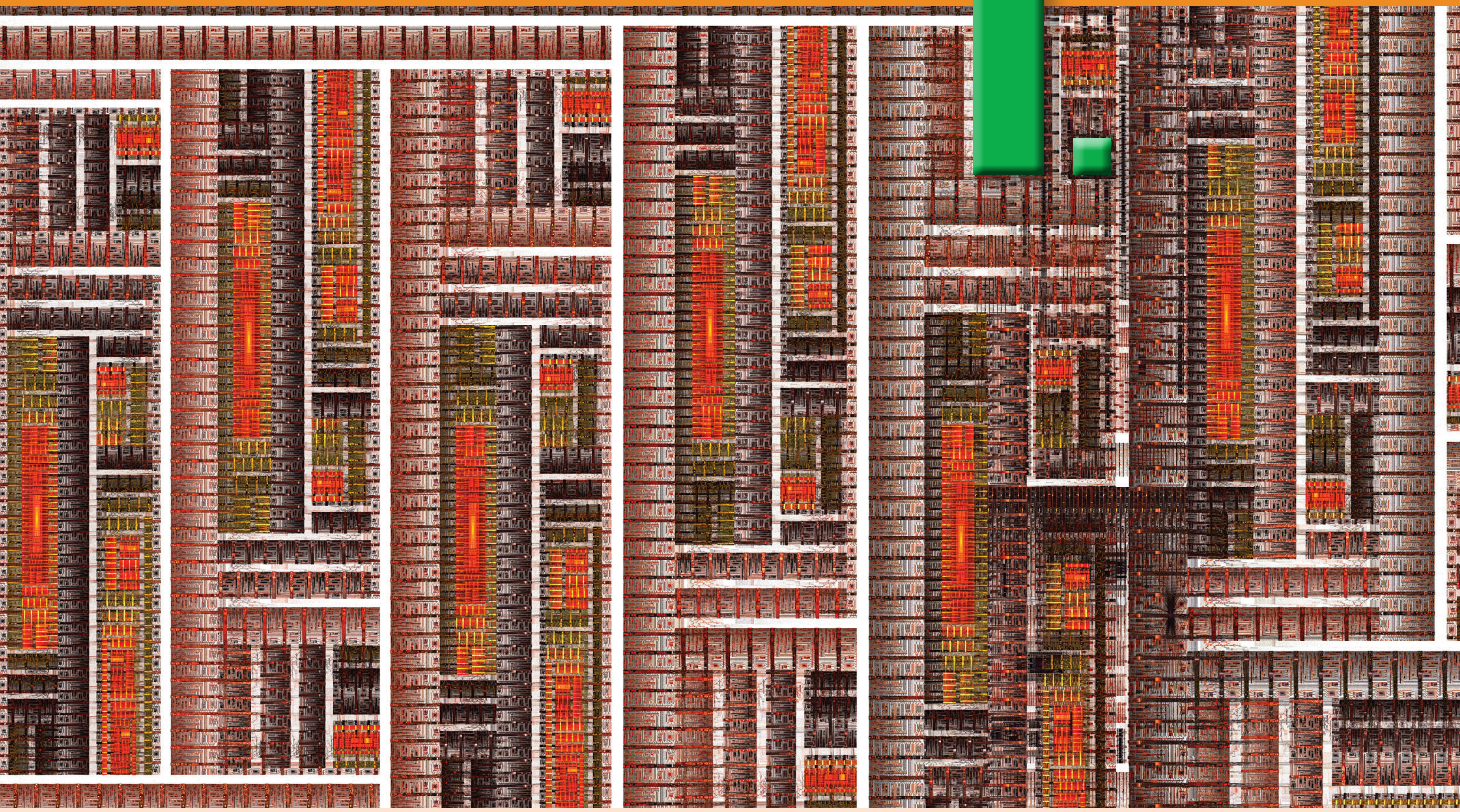
5p **a)** Számítsd ki a CE szakasz hosszát az a függvényében!

5p **b)** Határozz meg a és b között egy összefüggést, ha $T_{BCE} = T_{AECD}$.

5p **c)** Ha $a = 4$ cm és $b = 10$ cm, számítsd ki a BCE szög mértékét!



1. FEJEZET



Intervallumok. Egyenlőtlenségek $\mathbb{R}$-ben

1. **Halmazok meghatározása elemeik közös tulajdonságával**

2. **Intervallumok. Az intervallumok ábrázolása a számtengelyen. Intervallumok metszete és egyesítése**

3. **$ax + b \leq 0$ (<, >, ≥) alakú egyenlőtlenségek, ahol $a, b \in \mathbb{R}$**

Sajátos kompetenciák

1.1. **2.1.** **3.1.** **4.1.** **5.1.** **6.1.**

1. Halmazok meghatározása elemeik közös tulajdonságával

1.1. Halmazok

Történelmi visszatekintő: A halmazok módszeres vizsgálata a halmazok elméletéhez vezetett, amely később alapvetővé vált a matematika tanulmányozásában. A halmazelmélet a matematika minden ágazatának közös alapját képezi. Sőt, a matematikai érvelés módszerei logikai érvek és a halmazelmélet kombinációja.
A **halmazelmélet** alapítója ***Georg Cantor*** német matematikus (1845-1918).

Emlékeztető

A halmaz jól definiált és különálló tárgyaknak (a halmaz elemeinek) összessége, amelyeket létezőknek tekintünk

Ha A egy halmaz és x a halmazhoz tartozik, akkor azt mondjuk, hogy x eleme az A halmaznak, és így írjuk: $x \in A$. Ha x nem eleme az A halmaznak, akkor így írjuk $x \notin A$.

Az $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmaz esetén írhatjuk, hogy: $1 \in A$, $3 \in A$, $5 \in A$, $7 \in A$, $9 \in A$. $0 \notin A$, $2 \notin A$.

Azt a halmazt melynek nincs egyetlen eleme sem a $\varnothing$ szimbólummal jelöljük, és *üres halmaz*nak nevezzük.

Azon VIII-dikos tanulók halmaza, akik nem végezték el a VII. osztályt üres halmaz, azaz nincs egyetlen eleme sem.

Azt a halmazt, melyben az elemek száma véges, *véges halmaz*nak, valamint a halmaz elemeinek számát a halmaz *kardinálisá*nak nevezzük.

A = {Ana, Alexandra, Adrian} egy véges halmaz és kardinálisa 3.
Így írjuk: card $A = 3$.

A számokból álló halmazt *számhalmaz*nak nevezzük.

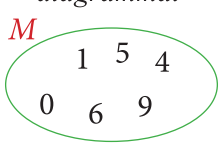
$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ egy számhalmaz, és C = {fehér, kék, arany, ezüst} nem számhalmaz.

Egy halmaz meghatározható (megadható, leírható):

1) *elemeinek felsorolásával*

$M = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$

2) *Venn-Euler diagrammal*



3) *elemeinek egy közös tulajdonságával*

$M = \{x \mid x$ egy négyzetszám utolsó számjegye$\}$

Oldjuk meg figyelmesen!

1 **ET** Legyen M az „útvonal” szót alkotó betűk halmaza.
a) Melyik igaz kijelentés: $l \in M$; $a \in M$; $e \in M$; $m \in M$.
b) Határozd meg az M halmazt elemeinek felsorolásával!
c) Ábrázold az M halmazt Venn-Euler diagram segítségével!
d) Megfigyelve azt a kijelentést miszerint **ha *x* az *M* halmaz egy eleme, akkor az *x* az „útvonal” szó egy betűje**, írd le a halmazt összes elemének egy közös tulajdonságával!

2 **PT** Adott az $A = \{x \mid x$ a *siker* szó egy betűje$\}$ és $B = \{x \mid x$ páratlan számjegy$\}$.
a) Határozd meg az A és B halmaz elemeit, majd írd le ezeket a halmazokat elemeiknek felsorolásával!
b) Melyik számhalmaz a fentiek közül?

Alkalmazás

1. példa: Adott az

$A = \{a \in \mathbb{Z} \mid -10 < a \leq 30\}$,

$B = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = \sqrt{a}\ , a \in A\}$ halmaz.

a) Határozd meg az A halmaz kardinális számát!

b) Írd le a B halmazt elemeinek felsorolásával!

Megoldás. **a)** Az A halmaz 9 negatív egész számot, a 0 számot és 30 pozitív egész számot tartalmaz, tehát $cardA = 40$.

b) Ha $b \in \mathbb{Z}$ és $b = \sqrt{a}$, akkor a négyzetszám. Mivel $a \in A$, azt kapjuk, hogy $a \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$, tehát $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. példa: Döntsd el, hogy az alábbi halmazok közül melyik véges illetve végtelen halmaz!

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ az 50 osztója$\}$;

$D = \{y \in \mathbb{N} \mid 50$ az y osztója$\}$;

$E = \{t \in \mathbb{N} \mid t = 7n + 1, n \in \mathbb{N}\}$.

Megoldás. $C = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$ véges halmaz.
$D = \{0, 50, 100, 150, ...\}$ végtelen halmaz.
Az $\mathbb{N}$ végtelen halmaz, és E tartalmazza, az összes olyan természetes számot, melyet 7-tel osztva a kapott maradék 1. Tehát E végtelen halmaz.

Gyakorlatok és feladatok

1. Figyeld meg az alábbi elemeinek felsorolásával megadott halmazokat! $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$; $C = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$. Írd le mindenik halmazt elemeinek egy közös tulajdonságával!

2. Írd le a halmazt elemeinek felsorolásával!

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ és $2 \leq x < 7\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ és $-3 \leq x < 2\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ és $-3 \leq x < 2\}$;
$D = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ és $11 < x^2 \leq 50\}$;
$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ és $12 \leq x^2 \leq 47\}$;
$F = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ és $14 \leq 3x^2 < 122\}$.

3. Adott az alábbi halmaz:

$$M = \left\{-7; -\frac{1}{3}; -\sqrt{4}; 0; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 0{,}5; 7\right\}.$$

Írd le elemeinek felsorolásával a halmazokat:
$A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$;
$C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}\}$; $D = \{x \in M \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.

4. Adott a következő halmaz $A = \{2, 3, 4\}$ és $B = \{1, 2, 3, 6\}$. Határozd meg a

$$C = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in A, b \in B\right\}$$ halmazt.

5. Gondolj egy olyan halmazra, melynek kardinálisa 5, majd írd le háromféleképpen: elemeinek felsorolásával, Venn-Euler diagram segítségével, elemeinek egy közös tulajdonságával.

6. Legyen $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 13 < 31\}$.
A megadott minta alapján határozd meg az alábbi kijelentések logikai értékét!

Kijelentés	*Indoklás és válasz*
$13 \in M$	$13 \in \mathbb{N}$, $13 - 13 = 0$ és $0 < 31$, tehát a kijelentés igaz.
$31 \notin M$	
$44 \in M$	
$3^3 \notin M$	
$-13 \in M$	

7. Adott az $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 4 < 25$ és $2x > 10\}$ halmaz.

a) Határozd meg a halmaz elemeit!

b) Állapítsd meg, hogy a 2; 4; 5; 11; 25; 30, számok mindegyike eleme vagy sem az A halmaznak!

8. Adott a $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5x^2 < 225\}$ halmaz.

a) Határozd meg a B halmaz elemeit!

b) Állapítsd meg, hogy a B halmaz elemei közül melyik köbszám!

9. Adott a $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x^3 < 600\}$ halmaz.

a) Határozd meg a C halmaz elemeit!

b) Állapítsd meg, hogy a C halmaz elemei közül melyik négyzetszám!

c) Határozd meg a következő halmaz elemeit!
$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3a + 2, a \in C\}$.

2.6. Halmazok közötti reláció. Halmazokkal végzett műveletek.

A. Halmazok közötti reláció

Emlékeztető

1. Azt a két halmazt, melyeknek ugyanazok az elemei *egyenlő halmazoknak* nevezzük.
Ha az A és B halmaz egyenlő, akkor így írjuk $A = B$.
Ha az A és B halmaz nem egyenlő, akkor így írjuk $A \neq B$.

Ha
$A = \{3, 4\}$,
$B = \{x \mid x$ a 43 számjegye$\}$,
$C = \{2, 4\}$, akkor igazak az $A = B$, $A \neq C$ és $B \neq C$ relációk.

2. Az A halmaz a B halmaz része, ha az A halmaz minden eleme a B halmaz eleme is. Ha az A halmaz a B halmaz része, akkor így írjuk: $A \subset B$.
Még mondhatjuk azt is, hogy B halmaz tartalmazza az A halmazt, azaz $B \supset A$. Ha az A halmaz nem része a B halmaznak, akkor azt így írjuk: $A \not\subset B$.

Ha $A = \{3, 9\}$ és $B = \{x \mid x$ egy 10-es számrendszerbeli számjegy$\}$, mivel 3 és 9 az A halmaz elemei 10-es számrendszerbeli számjegyek, akkor $A \subset B$ vagy $B \supset A$.
A $B = \{x \mid x$ egy 10 számrendszerbeli számjegy$\}$ halmaz tartalmazza az $x = 1$ elemet, amely nem eleme az A halmaznak, $A = \{3, 9\}$, tehát $B \not\subset A$.

3. Ha $A \subset B$, akkor az A halmazt a B halmaz *részhalmazának* nevezzük. Az üres halmaz, melyet $\varnothing$ szimbólummal jelölünk, minden halmaz részhalmaza, vagyis: $\varnothing \subset A$ bármely A halmaz esetén.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, tehát $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ részhalmaza, amely $\mathbb{Q}$ a részhalmaza, amely a $\mathbb{R}$ részhalmaza.
Feladat: Írj más olyan részhalmazt is, amely megfelel ezeknek a bennfoglalási relációknak. Próbáld meg és indokold a válaszod!

Oldjuk meg figyelmesen!

1 ET Adottak a következő halmazok: $A = \{3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E = \{x \mid x$ számjegy, $x \neq 9$ és $x \neq 0\}$.
a) Írd le az E halmazt elemeinek felsorolásával!
b) Másold a füzetbe és egészítsd ki úgy, hogy igaz kijelentést kapj!
„Az … és … halmazok egyenlőek, mivel ugyanazok az elemeik.”
c) Másold le a füzetbe és írj a kijelentés melletti cellába (I) betűt, ha igaz, vagy (H) betűt, ha hamis a kijelentés. $B \subset C$; $C \subset B$; $B \subset D$; $A \subset B$.

2 FT Figyeljük meg az előző feladatban levő A, B, C, D, E halmazokat!
a) Keresd meg azt a halmazt, amely tartalmazza az összes többit. Írd le a válaszodat igazoló relációkat!
b) Keresd meg azt a halmazt, amely része a másik négynek! Írd le a válaszodat igazoló relációkat!

Megoldás. **a)** Megfigyeljük az 1. feladatban adott halmazokat, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Észrevesszük, hogy $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$, $D = E$, tehát $D \subset E$, vagyis az E halmaz tartalmazza a másik négyet. Mivel $D = E$, a D halmaz is tartalmazza a másik négy halmazt.
b) Észrevesszük, hogy $A \subset B$, $A \subset C$, $A \subset D$, $A \subset E$, tehát az A halmaz a többi halmaz részhalmaza.

Alkalmazás

1. alkalmazás. a) Az 1. és 2. feladat eredményeit használva írd le a D és E halmaz közötti összes relációt (bennfoglalás vagy egyenlőség)!
ET
b) Határozd meg a következő kijelentések logikai értékét:
p_1: $A \subset A$, bármely A halmaz esetén; p_2: $A = B \Leftrightarrow (A \subset B$ és $B \subset A)$.

Megoldás.

a) $D = E$; $E = D$; $D \subset E$; $E \subset D$;

b) Az A halmaz minden eleme az A halmazhoz tartozik, tehát a p_1 kijelentés igaz.

$A = B$ *akkor és csakis akkor,* ha A és B elemei megegyeznek, vagyis az A halmaz elemei a B halmaz elemei is, és a B halmaz elemei az A halmaz elemei is, vagyis $A \subset B$ és $B \subset A$). Következésképpen

$A = B \Leftrightarrow (A \subset B$ és $B \subset A)$, tehát a p_2 kijelentés igaz.

2. alkalmazás. Legyen E az általános iskola VIII. osztályos tanulóinak halmaza. Adott az

FT $A = \{x \in E \mid x$ robotika körre jár$\}$; $B = \{x \in E \mid x$ szereti a fizikát$\}$;
$C = \{x \in E \mid x$ szereti a matematikát$\}$ halmaz. Ebben az iskolában ha egy tanuló robotika körre jár, akkor szereti a fizikát, és szereti a matematikát.
Határozd meg az A, B, C, E halmazok közötti bennfoglalási relációkat!

Megoldás. Észrevesszük, hogy ha $x \in A$, akkor $x \in E$, vagyis $A \subset E$. Hasonlóan: $B \subset E$ és $C \subset E$.
Legyen x az iskola egy tanulója ($x \in E$):

Hétköznapi módon megfogalmazva	*Matematikai nyelven*	*Következtetés*
Ha x robotika körre jár, akkor szereti a fizikát.	Ha $x \in A$, akkor $x \in B$.	$A \subset B$
Ha x szereti a fizikát, akkor szereti a matematikát.	Ha $x \in B$, akkor $x \in C$.	$B \subset C$
Ha x robotika körre jár, akkor szereti a fizikát, valamint ha x szereti a fizikát, akkor x szereti a matematikát.	Ha $x \in A$, akkor $x \in B$. Mivel $x \in B$, => $x \in C$. Tehát, ha $x \in A$, akkor $x \in C$.	$A \subset C$

Következésképpen $A \subset B \subset C \subset E$.

B. Halmazokkal végzett műveletek

Emlékeztető

Az A és B halmaz *egyesítése* az a halmaz, melynek elemei legalább az egyik halmaznak elemei: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ vagy $x \in B\}$.

Ha $A = \{x \mid x$ nullától különböző számjegy$\}$ és
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$, kapjuk, hogy
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

Az A és B halmaz *metszete* az a halmaz, melynek elemei mindkét halmaznak elemei:
$A \cap B = \{x \mid x \in A$ és $x \in B\}$.

Ha $A = \{x \mid x$ nullától különböző számjegy$\}$,
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$, kapjuk, hogy
$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ha $A \cap B = \varnothing$, akkor az A és B halmazokat *diszjunkt* halmazoknak nevezzük.

A $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ halmazok diszjunktak, vagyis
$\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \varnothing$.

Az A és B halmaz *különbsége* az a halmaz, amely az A halmaz elemeiből áll, de nem tartalmazza a B halmaz elemeit: $A - B = \{x \mid x \in A$ és $x \notin B\}$.

Ha $A = \{x \mid x$ nullától különböző számjegy$\}$,
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$, kapjuk, hogy $A - B = \{7, 8, 9\}$.
Az irracionális számok halmaza $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

3. alkalmazás. Adott az $A = \{x \mid x$ páros számjegy$\}$, $B = \{2, 4, 5, 7\}$ és $C = \{4, 6, 7, 9\}$.

FT **a)** Írd le az A halmazt elemeinek felsorolásával!

b) Számítsd ki: $A \cup B$; $A \cup C$; $B \cup C$; $A - B$; $B - C$; $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$; $(A \cup C) - B$.

Megoldás. **a)** $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

b) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ vagy $x \in B\} = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

$A \cup C = \{x \mid x \in A$ vagy $x \in C\} = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$; $B \cup C = \{x \mid x \in B$ vagy $x \in C\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$;

$A - B = \{x \mid x \in A$ és $x \notin B\} = \{0, 6, 8\}$; $B - C = \{x \mid x \in B$ és $x \notin C\} = \{2, 5\}$;

$A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A$ vagy $x \in B$ vagy $x \in C\} = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

$A \cap B \cap C = \{x \mid x \in A$ és $x \in B$ és $x \in C\} = \{4\}$; $(A \cup C) - B = \{x \mid x \in A \cup C$ és $x \notin B\} = \{0, 6, 8, 9\}$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Az $M = \{0, 2, 6, 12, 20\}$ és $P = \{a \mid a = x \cdot (x + 1)$, $x \in \mathbb{N}$ és $x < 5\}$, halmazok esetén határozd meg az igaz kijelentések számát:

a) $M \subset P$; **b)** $M = P$;

c) $P \subset M$; **d)** $M \neq P$.

2. a) Írd le az $A = \{a, b\}$ halmaz összes részhalmazát!

b) Következtesd ki egy kételemű halmaz részhalmazainak számát!

c) Határozd meg egy háromelemű halmaz részhalmazainak számát!

3. Határozd meg az alábbi kijelentések logikai értékét:

a) $\{-1; 0; 2\} \subset \mathbb{Z}$; **b)** $\{-\sqrt{3}; \sqrt{5}; -\sqrt{2}\} \not\subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

c) $\{-1; 3\} \subset \mathbb{N}$; **d)** $\{-4\} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

e) $\sqrt{7} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; **f)** $\{-\sqrt{9}; 2\} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

4. Adott az $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ és $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}$ és $x \le 4\}$ halmaz.

Számítsd ki: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ és $B - A$.

5. Adott az $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ és $-4 \le x < 3\}$ és $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ és $-4 \le x < 3\}$.

a) Számítsd ki: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ és $B - A$.

b) Határozd meg a kijelentések logikai értékét: $A \subset B$; $B \subset A$; $A \subset (A \cup B)$; $A \subset (B - A)$.

6. Számítsd ki: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ és $B - A$ ha:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ és $3 < x \le 6\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ és $-3 \le x < \sqrt{5}\}$;

b) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ és $-2\sqrt{3} \le x < 3\sqrt{2}\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ és $-2\sqrt{3} \le x < 3\sqrt{2}\}$.

7. Írd le az $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ halmazt két olyan diszjunkt X és Y halmaz egyesítéseként, melyre igaz, hogy az X elemeinek összege és az Y halmaz elemeinek összege egyenlő!

8. Határozd meg a kijelentések logikai értékét:

$\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{9^2 + 12^2} \in \mathbb{Z}$;

$\sqrt{3^3 \cdot 12} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{225} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}} \in \mathbb{Q}$.

9. Ha $x = \sqrt{221 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 440}$, határozd meg a kijelentések logikai értékét:

$\sqrt{x} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

10. Adott a következő halmaz:

$$A = \left\{3^2; (-1)^2; (-2)^{-3}; \sqrt{2\frac{7}{9}}; \sqrt{12}; \sqrt{0,(2)}; (-2)^3\right\}.$$

Számítsd ki: $A \cap \mathbb{N}$; $A - \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A - \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A \cap \mathbb{R}$; $A \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$; $A \cap (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$.

11. Adott az $A = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ és $C = \{3, 6, 7\}$ halmaz.

Ellenőrizd, hogy igazak-e az egyenlőségek:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

12. Határozd meg az A és B halmazokat, ha egyidejűleg teljesülnek az alábbi feltételek:

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

2) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$;

3) $1 \in (A \setminus B)$;

4) $2 \in (B \setminus A)$.

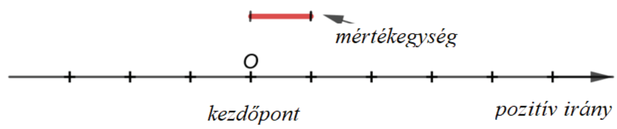
2. Intervallumok. Az intervallumok ábrázolása a számtengelyen. Intervallumok metszete és egyesítése

1.*l*. Valós számok ábrázolása a számtengelyen közelítések segítségével. Egy egyenes részhalmazai.

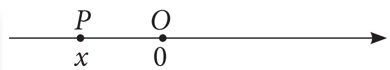
Emlékeztető

A. Valós számok ábrázolása a számtengelyen közelítések segítségével

(1) Számtengelynek nevezzük azt az egyenest, melyen rögzítettünk egy *kezdőpont*nak (origónak) nevezett O pontot, valamint egy *pozitív irányt* és egy *mértékegységet*.

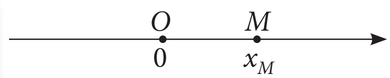


(2) Bármely valós számnak a számtengely egyetlen pontja felel meg. A 0 valós számnak megfelel az O pont. Ha az x valós számnak megfelel a P pont, akkor azt mondjuk, hogy a P pont koordinátája az x, és így írjuk: $P(x)$



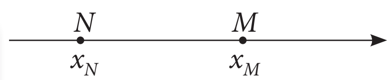
Értelmezés szerint $|x| = OP$.

(3) Fordítva is igaz, vagyis a számtengely M pontjának egyetlen valós szám felel meg, melyet x_M szimbólummal jelölünk.



A (2) és (3) alapján kijelenthetjük, hogy *a valós számok halmazának megfelel egy egyenes pontjainak halmaza.*

(4) Ha M és N a számtengely tetszőleges két pontjának koordinátái x_M és x_N, akkor $MN = |x_N - x_M|$.



(5) Általában az irracionális számoknak a számtengelyen ábrázolására a tizedes közelítésüket használják.

B. Egy egyenes részhalmazai.

A d egyenes két tetszőleges A és B pontja meghatározza az AB szakaszt.

A d egyenes tetszőleges A pontja meghatároz két ellentétes félegyenest. Ha a d egyenes M és N pontja az A pont két különböző oldalán helyezkedik el, akkor AM illetve AN a kapott két félegyenes.

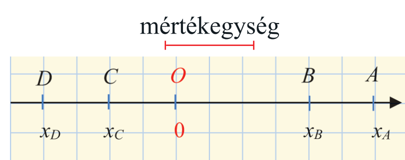
Alkalmazás

1 **ET** A mellékelt ábrán látható egyenesen felvesszük az A, B, C, D pontokat.

a) Határozd meg az A, B, C, D pontok koordinátáit!

b) Használva az $MN = |x_N - x_M|$, képletet, számítsd ki az AB, AC, AD, CB, DB, DC és DO szakaszok hosszát!

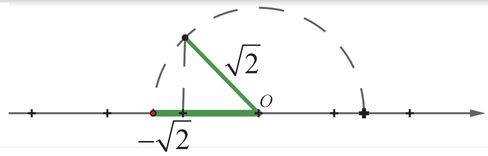
c) Ellenőrizd az előző alpont eredményeit megszámolva az ábrán a szakaszok hosszának megfelelő mértékegységeket.



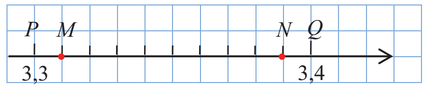
Megoldás. **a)** Az A, B, C illetve D pontok koordinátái az $x_A = 3$, $x_B = 2$, $x_C = -1$ és $x_D = -2$. valós számok.
b) Használva az $MN = |x_N - x_M|$, képletet azt kapjuk, hogy: $AB = 1$, $AC = 4$, $AD = 5$, $CB = 3$, $DB = 4$, $DC = 1$ és $DO = 2$.

2 Mértékegységnek 1 cm-t használva ábrázoljuk a számtengelyen a $-\sqrt{2}$ számot!

Megoldás. Miképp VII. osztályban is láthattuk ez a szám pontosan ábrázolható körző segítségével. A $\sqrt{2}$ nem más, mint egy 1 hosszúságú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának hossza.



3 Másold le a négyzethálós füzetedbe a mellékelt ábrát!



a) Határozd meg az $\dfrac{MP}{PQ}$ arány értékét!

b) Használva a $P(3{,}3)$ és $Q(3{,}4)$ pontok koordinátáit számítsd ki az OM és ON szakaszok hosszát, ahol O a számtengely kezdőpontja.

c) Használva az előző alpont adatait határozd meg az M és N pontok koordinátáit!

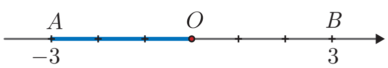
d) Számológépet használva, közelítsd századokra hiánnyal és többlettel a $\sqrt{11}$ számot, majd ábrázold ugyanazon a számtengelyen!

Útmutatás. b) $PQ = OQ - OP = 3{,}4$ me $- 3{,}3$ me $= 0{,}1$ me; $PM = \dfrac{1}{10} \cdot PQ = \dfrac{1}{100}$ me $= 0{,}01$ me

Akkor $OM = OP + PM = 3{,}3$ me $+ 0{,}01$ me $= 3{,}31$ me; $ON = OP + 9 \cdot PM = 3{,}3$ me $+ 9 \cdot 0{,}01$ me $= 3{,}39$ me (vagy $ON = OQ - NQ$); c) $M(3{,}31)$ és $N(3{,}39)$.

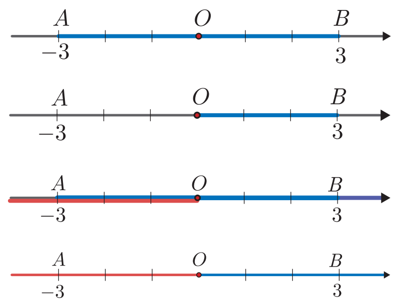
4 Adott a valós számtengelyen az $A(3)$ és $B(-3)$ pont.

a) Készíts különböző ábrákat az AB, OA, OB szakaszokhoz!



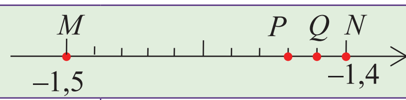
b) Ugyanazon az ábrán, jelöld különböző színnel az AB és BA félegyeneseket!

c) Ugyanazon az ábrán, jelöld különböző színnel az OA és OB félegyeneseket!



MINITESZT Válaszd ki az egyetlen helyes válasz betűjelét az alábbi feladatokban!

1. Figyeld meg a mellékelt ábrát!
A $-\sqrt{2}$ számnak a számtengelyen megfelel egy pont:



A. M és P között	**B.** P és Q között	**C.** a PM félegyenesen	**D.** a QN félegyenesen

2. Melyik reláció igaz $\sqrt{6}$ esetén?

A. $5 < \sqrt{6} < 6$	**B.** $2 < \sqrt{6} < 3$	**C.** $3 < \sqrt{6} < 4$	**D.** $4 < \sqrt{6} < 5$

3. Az $M = \{\overline{ab} \mid 8 < \sqrt{\overline{ab}} < 9\}$ halmaz kardinálisa:

A. 13	**B.** 14	**C.** 15	**D.** 16

Gyakorlatok és feladatok

1. Az O kezdőpontú valós számtengelyen adott az $A(1)$ és $B(2)$ pont.

a) Ábrázold az $OACD$ négyzetet, majd jelöld M-el a $\mathcal{C}(O, OC)$ kör és OA félegyenes metszéspontját! Határozd meg az M pont koordinátáját!

b) Ábrázold az $OBEF$ négyzetet, majd jelöld N-nel és P-vel a $\mathcal{C}(O, OE)$ kör és számtengely metszéspontját. Határozd meg az N és P pont koordinátáját, majd számold ki az NP szakasz hosszát!

2. Az O kezdőpontú valós számtengelyen adott az $A(1)$ és $B(2)$ pont. Felosztjuk az AB szakaszt AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4B kongruens szakaszokra.

a) Megfelelő mértékegységet választva készíts a feladat adatainak megfelelő ábrát!

b) Határozd meg a P_1, P_2, P_3, P_4 pontok koordinátáit!

c) Ábrázold a számtengelyen az $M(\sqrt{2})$ és $N(\sqrt{3})$ pontokat.

d) Határozd meg az alábbi kijelentések logikai értékét és töltsd ki a táblázatot!

Kijelentés	I/H
Az M pont a P_2P_3 szakasz eleme.	
Az N pont a P_4B szakasz eleme.	
$P_2P_3 > MN$	
Az MN szakasz felezőpontjának koordinátája 1,5-nél nagyobb irracionális szám.	

3. Másold a füzetbe és egészítsd ki úgy, hogy $\overline{a,b} < x < \overline{a,(b+1)}$, alakú relációkat kapjunk, ahol a természetes szám, valamint b egy 10-es számrendszerbeli számjegy.

a) $\ldots < \sqrt{2} < \ldots$

b) $\ldots < \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 6} < \ldots$

4. **a)** Írj három, $\dfrac{a}{10}$ alakú, 1-nél kisebb pozitív racionális számot, ahol $a \in \mathbb{N}$. Megfelelő mértékegységet választva ábrázold ezeket a számokat a számtengelyen!

b) Írj három, $-\sqrt{b}$ alakú, -2-nél nagyobb negatív irracionális számot, ahol $b \in \mathbb{N}$, Megfelelő mértékegységet választva ábrázold ezeket a számokat a számtengelyen!

c) Írd le az összes $3-\sqrt{a}$ alakú pozitív irracionális számot, ahol $a \in \mathbb{N}$. Megfelelő mértékegységet választva ábrázold a számtengelyen ezek közül a legkisebb és legnagyobb számot.

5. Határozd meg a halmaz kardinálisát!
$M = \{\overline{ab} \mid -6 < -\sqrt{\overline{ab}} < -5{,}5\}$.

6. Felvesszük a számtengelyen az $A(1)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(7)$ pontokat ebben a sorrendben, ahol $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

a) Keresd a, b és c egy olyan értékét, melyre $AB > CD$.

b) Mutasd ki, hogy nem létezik olyan $b \in \mathbb{Q}$ és $c \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, szám, melyre $AD = 2 \cdot BC$.

2.c. Intervallumok. Az intervallumok ábrázolása a számtengelyen

Interdiszciplináris megjegyzés: Az intervallum különböző jelentései számos tudományágban fellelhetők: a fizika, a történelem, a földrajz, a kémia, a csillagászat, a statisztika, a zene és nyilvánvalóan a matematika területén is. Ez a kifejezés gyakran megjelenik mindannyiunk mindennapi beszédében, mivel gyakran utalunk bizonyos méretű, bizonyos határokon belül elhelyezkedő számértékekre.

Néhány *intervallum* típus:

1) Az *időintervallum* két jelenség, két esemény, két egymást követő pillanat vagy egy jelenség/esemény kezdete és vége között eltelt idő. Az *évszázad* az 100 évet tartalmazó időintervallum.

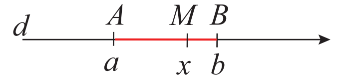
2) A zenében az intervallumokat két zenei hang magassága határozza meg.
Például a C dúr tartományban, az alsó dó és felső dó hang távolsága egy oktáv.

Fedezzük fel, értsük meg!

Egy tetszőleges d egyenesen meghatározzuk a *pozitív irányt*, *kezdőpontot* és *mértékegységet*. Az egyenes minden pontjának megfelel egy valós szám, illetve minden valós számnak megfelel a d egyenes egy pontja. Eszerint a d egyenes azonosítható a valós számok halmazával, és azt mondjuk, hogy a *d egyenes a valós számok halmazának mértani ábrázolása.*

A. Korlátos intervallumok

A d egyenes tetszőleges A és B pontja meghatároz egy szakaszt. E pontok megfelelő koordinátái a és b.
Az $a < b$ esetén legyen x olyan valós szám, melyre $a < x < b$.
Az x számnak megfelel a számtengely egy M pontja, mely az A és B pontok között található.

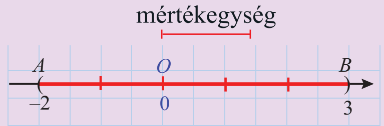


1) Ha a és b valós szám, $a < b$, akkor az a és b közötti összes valós szám halmaza az $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } a < x < b\}$, és az a és b szám által meghatározott *nyílt intervallum*nak nevezzük, valamint (a, b)-vel jelöljük.
A d egyenes A és B pontja közötti összes pont halmaza az $\{M \mid M \in d$ és M az A és B között$\}$ és nyílt szakasznak nevezzük, valamint (AB)-vel jelöljük.

$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } a < x < b\}$

$(-2, 3) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } -2 < x < 3\}$

$(AB) = \{M \mid M \in d$ és M az A és B pontok közötti$\}$



A mellékelt ábrán a nyílt (AB) szakasz látható, ahol $A(-2)$ és $B(3)$ a végpontok.

a) Az (AB) szakasz nem más, mint az (a, b) intervallumban található összes szám mértani ábrázolása. Azt mondjuk, hogy az (AB) nyílt szakasz az (a, b) nyílt intervallumnak a számtengelyen való mértani ábrázolása.
b) Az (a, b) intervallum nem más, mint az (AB) szakaszon levő összes pont koordinátáinak (valós számok) halmaza.

Egyezmény: Az (a, b) nyílt intervallumot a megfelelő (AB) nyílt szakaszként ábrázoljuk a számtengelyen.
Megjegyzés: Ha $a = b$, akkor $(a, b) = \varnothing$.

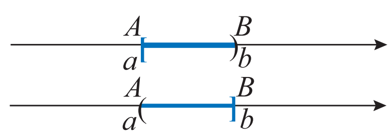
2) Ha $a \leq b$, akkor az $(a, b) \cup \{a, b\}$, azaz $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } a \leq x \leq b\}$, halmazt *zárt intervallum*nak nevezzük és $[a, b]$-vel jelöljük.
Az $(AB) \cup \{A, B\}$ halmazt zárt szakasznak nevezzük és $[AB]$-vel jelöljük.

Egyezmény: Az $[a, b]$ zárt intervallumot a megfelelő $[AB]$ zárt szakaszként ábrázoljuk a számtengelyen.

Megjegyzés: Ha $a = b$ akkor $[a, b] = \{a\}$.

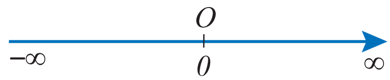
3) Az $(a, b) \cup \{a\}$ számhalmaz az $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } a \leq x < b\}$ jelöljük, $[a, b)$-vel, valamint az $(a, b) \cup \{b\}$ halmaz az $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $a < x \leq b\}$ és jelöljük $(a, b]$.
Az $(AB) \cup \{A\}$ pontok halmazát $[AB)$-vel, az $(AB) \cup \{B\}$ halmazt pedig $(AB]$-vel jelöljük. Ezeket a halmazokat *félig nyílt szakaszok*nak nevezzük.
Az $[a, b)$ félig nyílt intervallumot mértanilag az $[AB)$ nyílt szakasszal ábrázoljuk.
Az $(a, b]$ félig nyílt intervallumot mértanilag az $(AB]$ nyílt szakasszal ábrázoljuk

$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } a \leq x < b\}$
$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ és } a < x \leq b\}$.



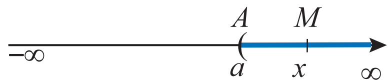
B. Nem korlátos intervallumok

A $-\infty$ (– végtelen) és $+\infty$ (+ végtelen) szimbólumot használjuk, hogy kihangsúlyozzuk, egy valós számtengely nem korlátos. A mellékelt rajzon látható módon ábrázoljuk.



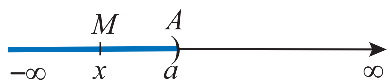
A d valós számtengelyen felvesszük az $A(a)$ és $M(x)$ pontokat.

1. Ha adott egy M pont a számtengelyen, az A ponttól jobbra, akkor: Az összes $x > a$ valós szám halmazát, azaz az $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x > a\}$ halmazt $(a, +\infty)$-nel jelöljük és az *a szám által meghatározott, jobbról végtelen nyílt intervallumnak* nevezzük.
Az $(a, +\infty)$ intervallumnak a számtengelyen való ábrázolása az $(AM$ nyílt félegyenes.



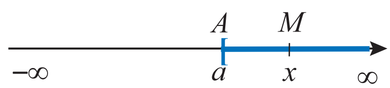
$(a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x > a\}$

2. Ha adott egy M pont a számtengelyen, az A ponttól balra, akkor: Az összes $x < a$ valós szám halmazát, azaz az $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x < a\}$ halmazt $(-\infty, a)$-val jelöljük és az *a szám által meghatározott, balról végtelen nyílt intervallumnak* nevezzük.
Az $(-\infty, a)$ intervallumnak a számtengelyen való ábrázolása az $(AM$ nyílt félegyenes.



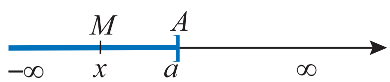
$(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x < a\}$

3. Az $(a, +\infty) \cup \{a\}$, azaz $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x \geq a\}$ halmazt $[a, +\infty)$-nel jelöljük és az *a szám által meghatározott, jobbról végtelen zárt halmaznak* nevezzük.
Az $[a, +\infty)$ intervallumnak a számtengelyen való ábrázolása az $[AM$ zárt félegyenes.



$[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x \geq a\}$

4. A $(-\infty, a) \cup \{a\}$, azaz $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x \leq a\}$ halmazt $(-\infty, a]$-val jelöljük és az *a szám által meghatározott, balról végtelen zárt intervallumnak* nevezzük.
A $(-\infty, a]$ intervallumnak a számtengelyen való ábrázolása az $[AM$ zárt félegyenes.



$(-\infty, a\,] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x \leq a\}$

Megjegyzés: A valós számokból álló intervallum a valós számok halmazának részhalmaza.

5. A valós számok halmaza balról és jobbról is végtelen intervallum.

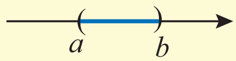
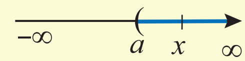
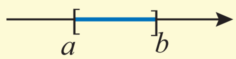
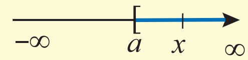
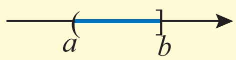
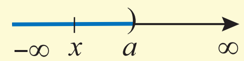
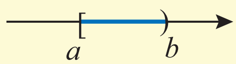
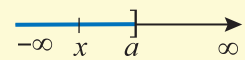
$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Oldjuk meg figyelmesen!

i PT

Tanulmányozd csapattársaddal az alábbi táblázatot, majd írj további példákat olyan számokra, amelyek elemei, illetve nem elemei az adott intervallumnak.

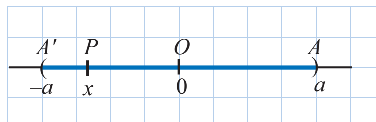
Intervallum	Az intervallum leírása	Az intervallum két valós eleme	Indoklás	Két valós szám, mely nem eleme az intervallumnak	Indoklás
$[2, 3]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $2 \leq x \leq 3\}$	$2,(4) \in [2, 3]$ $3 \in [2, 3]$	$2 \leq 2,(4) \leq 3$ $2 \leq 3 \leq 3$	$1,9 \notin [2, 3]$ $4 \notin [2, 3]$	$1,9 < 2$ $4 > 3$
$[1, +\infty)$	$[1, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x \geq 1\}$	$\sqrt{2} \in [1, +\infty)$ $1 \in [1, +\infty)$	$\sqrt{2} \geq 1$ $1 \geq 1$	$0 \notin [1, +\infty)$ $-\sqrt{2} \notin [1, +\infty)$	$0 < 1$ $-\sqrt{2} < 1$
$(-\infty, -3]$	$(-\infty, -3] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x \leq -3\}$	$-4 \in (-\infty, -3]$ $-3 \in (-\infty, -3]$	$-4 < -3$ $-3 = -3$	$-2 \notin (-\infty, -3]$ $0 \notin (-\infty, -3]$	$-2 > -3$ $0 > -3$

KORLÁTOS INTERVALLUMOK		NEM KORLÁTOS INTERVALLUMOK	
Intervallum	**Mértani ábrázolása**	**Intervallum**	**Mértani ábrázolása**
(a, b) nyílt intervallum $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $a < x < b\}$		(a, ∞) jobbról végtelen nyílt intervallum $(a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x > a\}$	
$[a, b]$ zárt intervallum $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $a \le x \le b\}$		$[a, \infty)$ jobbról végtelen zárt intervallum $[a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x \ge a\}$	
$(a, b]$ balról nyílt, jobbról zárt intervallum $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $a < x \le b$		$(-\infty, a)$ balról végtelen nyílt intervallum $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x < a\}$	
$[a, b)$ balról zárt, jobbról nyílt intervallum $[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $a \le x < b\}$		$(-\infty, a]$ balról végtelen zárt intervallum $(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x \le a\}$	
Bármely $a > 0$ esetén igaz, hogy: 1) $x \in \mathbb{R}$ és $\lvert x \rvert < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$ 2) $x \in \mathbb{R}$ és $\lvert x \rvert \le a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$		Bármely $a > 0$ esetén igaz, hogy: 1) $x \in \mathbb{R}$ és $\lvert x \rvert > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a)$ vagy $x \in (a, \infty)$ 2) $x \in \mathbb{R}$ és $\lvert x \rvert \ge a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a]$ vagy $x \in [a, \infty)$	

Alkalmazás. Használva a valós számok és az intervallumok mértani ábrázolását igazold, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ és $a > 0$ esetén igazak az alábbi egyenlőségek:

a) $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $|x| < a\} = (-a, a)$; **b)** $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $|x| \le a\} = [-a, a]$.

Bizonyítás: **a)** Használjuk a $(-a, a)$ intervallumnak a valós számtengelyen való ábrázolását és a valós szám abszolút értékének értelmezését.



A $(-a, a)$ intervallum mértani ábrázolása az $(A'A)$ nyílt szakasz, ahol $a = OA = OA'$. Bármely $x \in (-a, a)$ mértani képe $P \in (A'A)$ ahol $OP < OA' = a$, vagyis $x \in \mathbb{R}$, és $|x| < a$. Tehát $x \in \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $|x| < a\}$. (1)

Legyen $x \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $|x| < a$. Az a szám mértani képét A-val, a $-a$ mértani képét A'-tel jelöljük.
Legyen P az x szám mértani képe.
Mivel $|x| = OP$, azt kapjuk, hogy $OP < a$. De $a = OA = OA'$, tehát $OP < OA$ és $OP < OA'$, ami azt jelenti, hogy a P az $(A'A)$ nyílt szakasz eleme, vagyis $x \in (-a, a)$.
Használva az (1) adatot az $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $|x| < a\} = (-a, a)$ halmazok egyenlőségét kapjuk. (2)
b) $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $|x| \le a\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $|x| < a\} \cup \{-a, a\}$ és $[-a, a] = (-a, a) \cup \{-a, a\}$;
valamint a (2) egyenlőséget használva azt kapjuk, hogy $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $|x| \le a\} = [-a, a]$.

MINITESZT Válaszd ki az egyetlen helyes választ az alábbi feladatokban!

1. Az $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$ halmaz intervallumként felírt alakja:			
A. $(-3; 4]$	**B.** $(-3; 4)$	**C.** $(-2; 3)$	**D.** $[-2; 3]$
2. Ha $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, akkor a B intervallum:			
A. $(-\infty; 1)$	**B.** $(-\infty; 1]$	**C.** $[1; +\infty)$	**D.** $(1; +\infty)$
3. Az elemeinek közös tulajdonságával, a $C = (-1; 7]$ intervallum halmazként leírt alakja:			
A. $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 7\}$	**B.** $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x < 7\}$	**C.** $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \le 7\}$	**D.** $\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x \le 7\}$

Gyakorlatok és feladatok

1. **a)** Írd le elemeinek közös tulajdonságával az alábbi intervallumokat: $(-\infty,-6)$; $(-4, -2)$; $[-1, 1]$; $(2, 4]$; $[5, 7)$; $[8, \infty)$.

b) Ábrázold a valós számtengelyen a fenti intervallumokat, a mértékegység legyen 0,5 cm.

2. Határozd meg a kijelentések logikai értékét:

a) $2 \in [0, 3]$ **b)** $-\sqrt{2} \in (-2, -1)$

c) $5 \in (3, 5)$ **d)** $-2 \notin (-2, 0)$

e) $\sqrt{3} \in [1{,}71; 1{,}72]$ **f)** $6{,}7 \in (6; \sqrt{49})$

g) $\sqrt{169} \notin [12;13]$ **h)** $\pi \in (3; +\infty)$

3. Írd le intervallumként az alábbi halmazokat: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \sqrt{3}\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$.

4. Adott az $I = [-2, 2]$ intervallum.

a) Ellenőrizd, hogy a $-\dfrac{11}{5}$ racionális szám az I intervallum eleme.

b) Írj négy olyan elemet, amely az intervallum eleme, indokolva válaszod!

5. Írj egy-egy példát intervallumra az alábbi kijelentéseknek megfelelően:

a) természetes számokat tartalmaz;

b) nem tartalmaz egyetlen egész számot sem;

c) pontosan két természetes számot tartalmaz;

d) tartalmazhat bármilyen nagy számot;

e) tartalmazhat bármilyen kicsi számot.

6. Az intervallum fogalmát használva írd le az alábbi kijelentéseket:

a) az iskoláig mért d távolság legtöbb 300 méter;

b) egy csomag súlya 500 g $\pm$ 10 g;

c) egy repülő repülési sebessége legalább 100 km/h.

7. Adottak az alábbi halmazok: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\}$ és $B = (-3, -\sqrt{2})$.

a) Vizsgáld meg, hogy 0 az A halmaz eleme-e!

b) Mutasd ki, hogy $a > b$, bármely $a \in A$ és $b \in B$ esetén!

8. Írd le intervallum alakjában az alábbi halmazokat, majd ábrázold a valós számtengelyen!

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x < 6\}$;

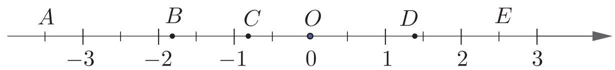
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$;

d) $D = x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{2^{16} - 2^{15}}{4^7}\}$;

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x - \sqrt{2} \leq \sqrt{8}\}$;

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -3\}$.

9. Az alábbi valós számtengelyen a $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ egész számokat és a következő pontokat ábrázoltuk: $A(-\frac{7}{2})$, $B(-\sqrt{3})$, $C(-\frac{4}{5})$, $D(\sqrt{2})$, $E(\frac{5}{2})$



a) Ábrázold a füzetben a valós számtengelyt és a 12 valós számot!

b) Írd le azon számok halmazát, amelyek mértani ábrázolásának abszcisszája a $[-1, 2]$ intervallum eleme!

c) Írd le azon számok halmazát, amelyek mértani ábrázolásának abszcisszája a $(-\infty, 0)$ intervallum eleme!

d) Írd le azon irracionális számok halmazát, melyek mértani ábrázolásának abszcisszája a $(-3, 2)$ intervallum eleme!

10. Számítsd ki az alábbi intervallumok legkisebb és legnagyobb egész elemeinek összegét!

a) $[-8, 6)$.

b) $(-\dfrac{31}{13}, \dfrac{148}{841})$.

11. Írd le intervallum alakjában a halmazokat!

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < \dfrac{3x+8}{2} < 4\}$ és

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{6} < \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2}\}$.

12. $a = 7\sqrt{3} - \sqrt{75}$. Mutasd ki, hogy $a \in (3; 4)$.

13. Mutasd ki, hogy: **a)** $\dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

b) $\dfrac{k}{n \cdot (n+k)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+k}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{N}^*$ esetén.

c) Adott $b = \dfrac{5}{3 \cdot 8} + \dfrac{7}{8 \cdot 15} + \dfrac{9}{15 \cdot 24}$. Tanulmányozd, hogy: $b \in (\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{3})$.

14. Legyen x a$(-1; 1)$ intervallum egy valós eleme. Mutasd ki, hogy $x^2 \in [0; 1)$ és $x^3 \in (-1; 1)$.

3.6. Intervallumokkal végzett műveletek

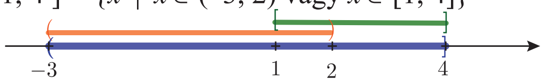
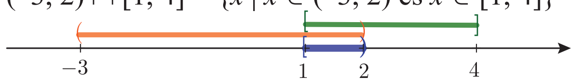
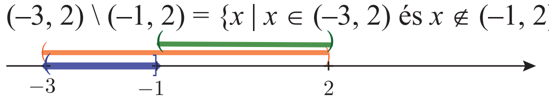
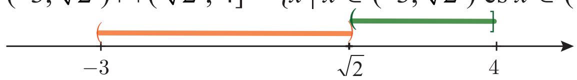
Emlékeztető

Adott A és B két halmaz.
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$. $A - B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$.
A valós számokból alkotott intervallumok a valós számok halmazának részhalmazai. Következésképpen a valós számok intervallumai között ugyanazokat a műveleteket fogjuk meghatározni, mint a halmazok között.

Fedezzük fel, értsük meg!

Az intervallumokkal végzett műveletek elvégzésében segít a valós számtengelyen való ábrázolásuk.

1. példa. Számítsd ki: **a)** $(-3, 2) \cup [1, 4]$; **b)** $(-3, 2) \cap [1, 4]$; **c)** $(-3, 2) \setminus (-1, 2)$; **d)** $(-3, \sqrt{2}) \cap (\sqrt{2}, 4]$.

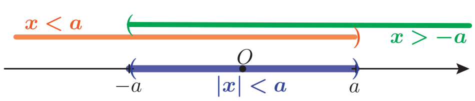
	Meghatározás és ábrázolás	Eredmény
a)	$(-3, 2) \cup [1, 4] = \{x \mid x \in (-3, 2) \text{ vagy } x \in [1, 4]\}$ 	$(-3, 2) \cup [1, 4] = (-3, 4]$
b)	$(-3, 2) \cap [1, 4] = \{x \mid x \in (-3, 2) \text{ és } x \in [1, 4]\}$ 	$(-3, 2) \cap [1, 4] = [1, 2)$
c)	$(-3, 2) \setminus (-1, 2) = \{x \mid x \in (-3, 2) \text{ és } x \notin (-1, 2)\}$ 	$(-3, 2) \setminus (-1, 2) = (-3, -1]$
d)	$(-3, \sqrt{2}) \cap (\sqrt{2}, 4] = \{x \mid x \in (-3, \sqrt{2}) \text{ és } x \in (\sqrt{2}, 4]\}$ 	$(-3, \sqrt{2}) \cap (\sqrt{2}, 4] = \varnothing$
Megjegyzés. Két intervallum egyesítése, metszete, különbsége nem feltétlenül egy intervallum.		

Alkalmazás

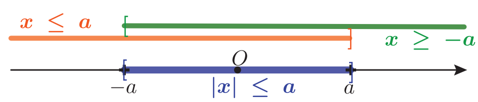
2. példa.

a) Igazold, hogy bármely $a > 0$ valós szám esetén igazak az alábbi egyenlőségek:

1. $\{x \in \mathbb{R} \text{ és } |x| < a\} = (-\infty; a) \cap (-a, \infty)$

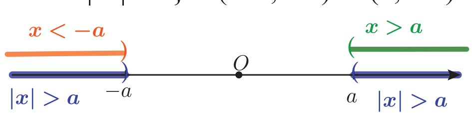


2. $\{x \in \mathbb{R} \text{ és } |x| \leq a\} = (-\infty; a] \cap [-a, \infty)$

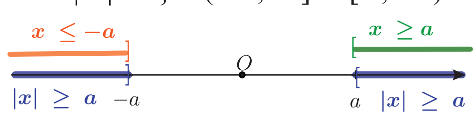


b) Igazold, hogy bármely $a > 0$ valós szám esetén igazak az alábbi egyenlőségek:

1. $\{x \in \mathbb{R} \text{ és } |x| > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$



2. $\{x \in \mathbb{R} \text{ és } |x| \geq a\} = (-\infty; -a] \cup [a, +\infty)$



c) Bizonyítsd be, hogy $\{x \in \mathbb{R} \text{ és } |x| \geq 0\} = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

A b) 2. alpontja alapján, ha $a = 0$, akkor $\{x \in \mathbb{R} \text{ és } |x| \geq 0\} = (-\infty; 0] \cup [0, \infty) = (-\infty, +\infty)$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Írd intervallum alakjában:

a) $[2, 5) \cup \{5\}$; **b)** $(-3, 1) \cup \{-3, 1\}$;
c) $[-2, 2] - \{-2, 2\}$; **d)** $[-4, 3] \cap [-2, 3]$;
e) $[-4, 3] \cup [-2, 3]$; **f)** $[-4, 3] - [-2, 3]$.

2. Határozd meg elemeinek felsorolásával az alábbi halmazokat:

a) $[-3, 5) \cap \mathbb{N}^*$; **b)** $[-3, 5) \cap \mathbb{Z}^*$;
c) $(-3, 3) \cap \mathbb{Z}$; **d)** $[-4, 4] \cap (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$.

3. Adott az $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $-3 < x \le 1\}$ és $B = \{y \mid y \in \mathbb{R}$ és $-2 \le y < 3\}$ halmaz. Az $A, B, A \cup B, A \cap B, A - B, B - A, A \cap \mathbb{N}$, $B \cap \mathbb{Z}$, halmazok közül válaszd ki azt, amely:

a) leírható intervallumként, és ábrázold a valós számtengelyen;
b) véges halmaz, és írd le elemeinek felsorolásával!

4. Határozd meg elemeinek felsorolásával az alábbi halmazokat!

a) $[-3, 2] \cap \mathbb{N}$; **c)** $[-2, 2] \cap \mathbb{Z}^*$;
b) $\left[-5, -1\frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Z}$; **d)** $\left(-\infty, \frac{17}{5}\right) \cap \mathbb{N}$.

5. Számítsd ki:

a) $[-3{,}4;\ 2] \cap \left[-2\sqrt{3};\ 1\right]$;
b) $[-2, 3] \cap [-3, 2] \cap \mathbb{Z}^*$.

6. Számítsd ki az $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ intervallumokat az alábbi esetekben:

a) $A = (-2, 4)$, $B = [0, 5]$;
b) $A = (-7, 3]$, $B = [3, 6)$;
c) $A = (-\sqrt{3}, 2)$, $B = (0, \sqrt{5}]$;
d) $A = (-\infty, 3)$, $B = (\sqrt{6}, 4]$.

7. **a)** Határozd meg az $a, b \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy $a < b$ és $[a, b] \cup [-2, 3] = [-4, 5]$.
b) Határozd meg az $a, b \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy $a < b$ és $[a, b] \cap [-3, 2] = [-2, 1]$.

8. Tanulmányozd, hogy $1{,}2 \in A \cap B$, ahol $A = (-5, \infty)$ és $B = \left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

9. Adottak az alábbi halmazok:
$C = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -3 < x < 2\}$,
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \le 2\}$.
Számítsd ki: $C \cup D$, $D \cup C$, $C \cap D$, $D \cap C$, $C - D$, $D - C$.

10. Keress két I és J intervallumot, ha $I \cup J = [1; 6]$ és $I \cap J = [2; 5]$.

11. Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $0 < a < b$, tanulmányozd, hogy:

a) $\frac{a+b}{2} \in (a, b)$; **b)** $\sqrt{ab} \in (a, b)$.

12. Ha $0 < a < b$, számítsd ki $(a, \sqrt{ab}) \cap \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$.

13. **a)** Határozd meg az a és b egész számot tudva, hogy $(a, b) \cap \mathbb{Z} = \{-2\}$.
b) Határozd meg a c és d egész számot tudva, hogy $[c, d] \cup (-1, 10) = [-1, 11]$.
c) Határozd meg az e és f egész számot tudva, hogy $[e, f] \cap [8, 11] = [9, 10]$.

14. Adottak a következő halmazok:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{4}\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{5}{2}\}$;

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \ge x \ge -1\}$.

a) Írd le intervallum alakban az A, B, C halmazokat.
b) Számold ki! $(A \cap B) \cup C$, $(A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

15. Egészítsd ki, hogy az alábbi kijelentések igazak legyenek!

a) A $[-3, 3] - \{-\sqrt{9}, \sqrt{9}\}$ halmaz intervallum alakjában felírva … .
b) Ha $A = [-4\sqrt{2}, 7]$ és $B = (-5, 2^3)$, akkor $A \cap B = \ldots$.
c) Az $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$ egyesítés eredménye...
d) Ha $a, b \in \mathbb{N}$ és az $(a, 14) \cup [7, b)$ halmaz hat természetes számot tartalmaz, akkor $a = \ldots$ és $b = \ldots$.
e) Ha $a > 2$, akkor $(3, a + 3) - (5, a + 5) = \ldots$.

3. $ax + b \leq 0$ ($<$, $>$, $\geq$) alakú egyenlőtlenségek, ahol $a, b \in \mathbb{R}$

1.*l.* A valós számok halmazán értelmezett ≤, ≥, <, > relációs jelek. Tulajdonságok.

Emlékeztető

Ahhoz, hogy **összehasonlítsunk** két számot (természetes, egész, racionális, valós) a számtengelyen való ábrázolásukat, valamint az = vagy a rendezési ≤ (kisebb vagy egyenlő) relációs jelet használjuk.
$a = b$ akkor és csakis akkor, ha a valós számtengelyen egybeeső pontokkal ábrázoljuk.
Legyen A és B a számtengely két pontja, amelynek abszcisszája az $x_A = a$, illetve $x_B = b$ valós szám.

$a < b$ (a kisebb, mint b) akkor és csakis akkor, ha a számtengelyen az A pont a B ponttól balra helyezkedik el.

$a > b$ (a nagyobb, mint b) akkor és csakis akkor, ha a számtengelyen az A pont a B ponttól jobbra helyezkedik el.

$1 < 5$ mert az A (1) pontot a B (5) ponttól balra ábrázoljuk
$7{,}2 > 5{,}4$ mert a $B(7{,}2)$ pontot az $A(5{,}4)$ ponttól jobbra ábrázoljuk.

$a \leq b \Leftrightarrow (a < b$ vagy $a = b)$
$a \geq b \Leftrightarrow (a > b$ vagy $a = b)$

$-2 \leq -1{,}8$ mert $-2 < -1{,}8$, valamint $\sqrt{4} \leq 2$ mert $\sqrt{4} = 2$.
$-1{,}8 \geq -2$ mert $-1{,}8 > -2$, valamint $\sqrt{4} \geq 2$ mert $\sqrt{4} = 2$.

Megjegyzés: $(a < b$ vagy $a > b) \Leftrightarrow a \neq b$.

A ≤, ≥, <, > relációs jelek tulajdonságai

A valós számok halmazán értelmezett ≤ relációs jel tulajdonságai:
- $a \leq a$, bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén (reflexiv)
- Ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$. (antiszimetrikus)
- Ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$. (tranzitiv)

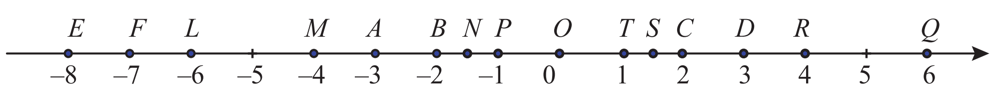
A ≤ relációs jel tulajdonságai érvényesek a ≥ relációs jel esetén is.

A valós számok halmazán értelmezett <, > relációs jelek tranzitivak.
$(a < b$ és $b < c) \Rightarrow a < c$
$(a > b$ és $b > c) \Rightarrow a > c$

Oldjuk meg figyelmesen!

VII. osztályban $ax + b = 0$ alakú egyenleteket oldottunk meg, ahol majd ilyen egyenletekre visszavezethető más egyenleteket is. A megoldásnál az *egyenlőség jel és a valós számokkal végzett műveletek tulajdonságait* használtuk azért, hogy ekvivalens egyenlőségeket, majd az egyenlet megoldását kapjuk meg.
Arra törekszünk, hogy megtudjuk, vajon a valós számokkal végzett műveletek tulajdonságai a ≤, ≥, <, > relációk esetén is segítenek ekvivalens egyenlőtlenségeket kapni.

1. alkalmazás. Adottak a számtengelyen az $A(-3)$, $B(-2)$, $C(2)$, $D(3)$, $E(-8)$, $F(-7)$, L (-6), M (-4), N $(-1{,}5)$, P (-1), Q (6), R (4), S $(1{,}5)$, T (1) pontok.



A megadott példa alapján töltsd ki a ≤, ≥, >, <, = relációs jelek valamelyikével úgy, hogy igaz kijelentéseket kapj!

a) $x_A < x_B$	$x_C < x_D$	$x_A + 5 = x_C$	$x_B + 5 = x_D$	$x_A + 5 < x_B + 5$
	$x_E \dots x_F$	$x_A - 5 \dots x_E$	$x_B - 5 \dots x_F$	$x_A - 5 \dots x_B - 5$
b) $x_A < x_B$	$x_L \dots x_M$	$x_A \cdot 2 \dots x_L$	$x_B \cdot 2 \dots x_M$	$x_A \cdot 2 \dots x_B \cdot 2$
	$x_N \dots x_P$	$x_A : 2 \dots x_N$	$x_B : 2 \dots x_P$	$x_A : 2 \dots x_B : 2$
c) $x_A < x_B$	$x_Q \dots x_R$	$x_A \cdot (-2) \dots x_C$	$x_B \cdot (-2) \dots x_D$	$x_A \cdot (-2) \dots x_B \cdot (-2)$
	$x_S > x_T$	$x_A : (-2) = x_E$	$x_B : (-2) = x_F$	$x_A : (-2) > x_B : (-2)$

Fedezzük fel, értsük meg!

Az egyenlőtlenség mindkét oldalához *hozzáadva* vagy *kivonva* ugyanazt a számot az egyenlőtlenségben található *relációs jel nem változik*.

1. Ha a, b és c valós szám és $a < b$, akkor $a + c < b + c$.

2. Ha a, b és c valós szám és $a < b$, akkor $a - c < b - c$.

Hozzáadunk a $-3 < -2$ egyenlőtlenség *mindkét oldalához* 5-öt.
Így írjuk: $-3 < -2 \mid (+5) \Rightarrow -3 + 5 < -2 + 5 \Rightarrow 2 < 3$

Kivonunk 5-öt a $-3 < -2$ egyenlőtlenség *mindkét oldalából*
Így írjuk: $-3 < -2 \mid (-5) \Rightarrow -3 - 5 < -2 - 5 \Rightarrow -8 < -7$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát *megszorozva* illetve *elosztva* ugyanazzal a pozitív számmal az egyenlőtlenségben található *relációs jel nem változik.*

3. Ha a, b valós szám és $a < b$, $c > 0$, akkor $a \cdot c < b \cdot c$.

4. Ha a, b valós szám és $a < b$, $c > 0$, akkor $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

A $-3 < -2$ egyenlőtlenség mindkét oldalát *megszorozzuk* 2-vel.
Így írjuk: $-3 < -2 \mid (\cdot\, 2) \Rightarrow -3 \cdot 2 < -2 \cdot 2 \Rightarrow -6 < -4$

A $-3 < -2$ egyenlőtlenség mindkét oldalát *elosztjuk* 3-mal.
Így írjuk: $-3 < -2 \mid (:3) \Rightarrow \frac{-3}{3} < \frac{-2}{3} \Rightarrow -1 < -0{,}(6)$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozva illetve elosztva ugyanazzal a negatív számmal az egyenlőtlenségben található relációs jel megfordul.

5. Ha a, b valós szám és $a < b$, $c < 0$, akkor $a \cdot c > b \cdot c$.

6. Ha a, b valós szám és $a < b$, $c < 0$, akkor $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

A $-3 < -2$ egyenlőtlenség mindkét oldalát *megszorozzuk* -1-gyel.
Így írjuk: $-3 < -2 \mid \cdot (-1) \Rightarrow -3 \cdot (-1) > -2 \cdot (-1) \Rightarrow 3 > 2$

A $-3 < -2$ egyenlőtlenség mindkét oldalát *elosztjuk* $-2 < 0$-vel
Így írjuk: $-3 < -2 \mid : (-2) \Rightarrow \frac{-3}{-2} > \frac{-2}{-2} \Rightarrow 1{,}5 > 1$.

Alkalmazás

2. alkalmazás. A fenti **1 – 6** pontban leírt tulajdonságokat használva, bizonyítsd be, hogy:

CS

1′. Ha $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a + c < b + c$, akkor $a < b$. **2′**. Ha $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a - c < b - c$, akkor $a < b$.
3′. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $c > 0$ és $a \cdot c < b \cdot c$, akkor $a < b$. **4′**. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $c > 0$ és $a : c < b : c$, akkor $a < b$.
5′. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $c < 0$ és $a \cdot c > b \cdot c$, akkor $a < b$. **6′**. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $c < 0$ és $a : c > b : c$, akkor $a < b$.

Megjegyzés: A fentiekben leírt, a < relációs jelre vonatkozó tulajdonságok a >, ≤, ≥ relációs jelek mindenikére érvényesek.

< >, ≤, ≥.

Feladatok a portfólióba

Az alábbi modell segítségével fogalmazd meg a (2, 2′), (3, 3′), (4, 4′), (5, 5′), (6, 6′) kijelentéspárokból adódó ekvivalenciákat.

Kijelentés	*Fordított kijelentés*	*Következtetés*
1. Ha a, b és $c \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor $a + c < b + c$.	**1′.** Ha a, b, $c \in \mathbb{R}$ és $a + c < b + c$, akkor $a < b$.	Ha a, b és $c \in \mathbb{R}$, akkor $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.

Az egyenlőtlenség mindkét tagjának összeadása, kivonása, pozitív számmal való szorzása és a pozitív számmal való elosztás *megtartja* a relációs jelet.

Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalához *hozzáadjuk* vagy *kivonjuk* ugyanazt a valós számot, *megtartva* a relációs jelet, az eredeti egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.

Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát *megszorozzuk* vagy *elosztjuk* ugyanazzal a pozitív számmal, *megtartva* a relációs jelet, az eredeti egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.

Ha *negatív* számmal *szorozzuk* vagy *osztjuk* az egyenlőtlenség mindkét oldalát, akkor az egyenlőtlenségben található relációs jel *megfordul*.

Ha *negatív* számmal *szorozzuk* vagy *osztjuk* az egyenlőtlenség mindkét oldalát, és az egyenlőtlenségben található relációs jelet így *megfordítjuk*, akkor az eredeti egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.

Gyakorlatok és feladatok

1. Kiindulva az $4 < 7$ egyenlőtlenségből alkoss új egyenlőtlenségeket úgy, hogy:
a) hozzáadsz 6-ot mindkét oldalhoz.
b) kivonsz 7-et mindkét oldalból.
c) megszorzod mindkét oldalt 3-mal.
d) elosztod mindkét oldalt 2-vel.
e) megszorzod mindkét oldalt –3-mal.
f) elosztod mindkét oldalt –2-vel.

2. Írd le a füzetbe az alábbi kijelentéseket kiegészítve a <, ≤, > vagy ≥ relációs jelekkel:
a) Ha $x \le -7$, akkor $3x \ldots -21$.
b) Ha $x < -2$, akkor $-3x \ldots 6$.
c) Ha $x \ge -4$, akkor $-2x \ldots 8$.
d) Ha $x > -5$, akkor $4x \ldots -20$.
e) Ha $x \ge -2$, akkor $-5x \ldots 10$.
f) Ha $-2x \le -14$, akkor $x \ldots 7$.
g) Ha $x < 19$, akkor $-3x \ldots -57$.
h) Ha $-x > -10$, akkor $3x \ldots 30$.

3. Legyen $a > \frac{3}{7}$. Bizonyítsd be, hogy $-7a + 3$ negatív szám.

4. Tudva, hogy $-\frac{7}{2} \le 2b - \frac{1}{2} \le \frac{5}{2}$, bizonyítsd be, hogy $|b| \le \frac{3}{2}$.

5. Adott $a \ge \frac{2}{3}$ és $b \ge -\frac{3}{2}$.
Bizonyítsd be, hogy $9a + 4b \ge 0$.

6. **a)** Bizonyítsd be, hogy ha $a < b$, akkor
$$\left(\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}\right) \subset (a, b).$$
b) Bizonyítsd be, hogy ha $-c > -d$, akkor
$$\left(\frac{3c+d}{4}, \frac{c+3d}{4}\right) \subset (c, d).$$

2.ℓ. $ax + b \le 0$ (<, >, ≥),alakú egyenlőtlenségek, ahol $a, b \in \mathbb{R}$

Emlékeztető

Az egyenlőtlenség mindkét tagjának összeadása, kivonása, pozitív számmal való szorzása és a pozitív számmal való elosztás *megtartja* a ≤, ≥, >, < relációs jelet.
Ha negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát, akkor az egyenlőtlenségben található relációs jel *megfordul*.

Oldjuk meg figyelmesen!

Feladat. A népi iparművészek családja kézműves termékek előállítására és értékesítésére összesen 450 lejt fordít. A megvásárolt anyagokból a kézművesek legalább 20, legfeljebb 40 terméket készíthetnek, amelyeket egyenként 15 lejes áron értékesítenek.

FT

a) Határozd meg, hogy a család visszaszerzi-e az elköltött pénzt, 20 kézműves termék elkészítésével és értékesítésével.

b) Döntsd el, hogy a kézművesek *profitot* (nyereséget) termelnek-e 30 kézműves termék elkészítésével és eladásával.

c) Számítsd ki a kézművesek által elért nyereséget, amikor 32 kézműves terméket készítettek és el is adták!

d) Határozd meg az elkészítendő tárgyak számát, hogy azok eladásából a kézművesek családja legalább 105 lej nyereséghez jusson.

Szótár
profit = az értékesítésből származó bevétel és az összes kiadás közötti különbség.

Megoldás. **a)** 20 tárgy eladásából származó bevétel $20 \cdot 15 = 300$ lej és $300 < 450$. Következésképp nem térül meg az elköltött pénz; még $450 - 300 = 150$ lej összeget kell szerezzenek

b) 30 tárgy eladásából származó bevétel $30 \cdot 15 = 450$ lej, tehát a kézműveseknek megtérül az elköltött pénz, de nem jutnak profithoz: $450 - 450 = 0$ lej.

c) Ha a kézművesek 32 tárgyat készítenek és adnak el, akkor $32 \cdot 15 = 480$ lej bevételük lesz. Az így szerzett profit $480 - 450 = 30$ lej.

d) Ha x-szel jelöljük az elkészített és eladott kézműves termékek számát, akkor a kézművesek által elért nyereség $15 \cdot x - 450$ lej. Így a feladat megoldása nem más, mint az $E = \{20, 21, \dots, 40\}$ halmaz olyan x elemének meghatározása, amelyre $15 \cdot x - 450 \ge 105$.

Megjegyzés. Az adott helyzet matematikai modellezése a következő feladathoz vezetett:
„Határozd meg az $E = \{20, 21, \dots, 40\}$ halmaz azon x elemét, amelyre $15 \cdot x - 450 \ge 105$"matematikailag így fogalmazható át: „Old meg az $E = \{20, 21, \dots, 40\}$ halmazon a $15 \cdot x - 450 \ge 105$ egyenlőtlenséget!"
Az $E = \{20, 21, \dots, 40\}$ halmaz azon x eleme, amelyre $115 \cdot x - 450 \ge 105$ az egyenlőtlenség megoldása.

Példa. Ellenőrizve azt kapuk, hogy: $15 \cdot 20 - 450 = -150 < 105$; $15 \cdot 30 - 450 = 0 < 105$;
$15 \cdot 32 - 450 = 30 < 105$, $15 \cdot 36 - 450 = 90 < 105$, tehát a 20, 30, 32, 37 számok nem megoldásai a $15 \cdot x - 450 \ge 105$ egyenlőtlenségnek. Észrevesszük, hogy $15 \cdot 40 - 450 = 150 > 105$, tehát 40 a $15 \cdot x - 450 \ge 105$ egyenlőtlenség megoldása. Hasonlóan 39 is az egyenlőtlenség megoldása.

Megoldani az E halmazon a $15 \cdot x - 450 \ge 105$ egyenlőtlenséget azt jelenti, hogy meg kell keresni az összes megoldását.

Az egyenlőtlenség megoldása

$15 \cdot x - 450 \geq 105$	
$15 \cdot x - 450 + 450 \geq 105 + 450$	• Mindkét oldalához hozzáadunk 450-et.
$15 \cdot x \geq 555$	• Elvégezzük a számításokat.
$\dfrac{15 \cdot x}{15} \geq \dfrac{555}{15}$	• Az egyenlőtlenség mindkét oldalát 15-tel osztjuk.
$x \geq 37$	• Elvégezzük a számításokat.
A $15 \cdot x - 450 \geq 105$ egyenlőtlenség megoldásai az $E = \{20, 21, \dots, 40\}$ halmaz azon elemei, amelyek legalább 37-tel egyenlők, azaz $M = \{37, 38, 39, 40\}$	• Leírjuk a megoldások halmazát.

Most már kijelenthetjük, hogy legalább 105 lejes profit elérése érdekében a kézművesek legalább 37 terméket kell elkészíteniük.

Fedezzük fel, értsük meg!

A. $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥) alakú egyenlőtlenségek, ahol $a, b \in \mathbb{R}$

Az $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥) alakú egyenlőtlenséget x ismeretlent és a illetve b együtthatókat tartalmazó *lineáris egyenlőtlenségnek* nevezzük, ahol az x az $M \subset \mathbb{R}$ halmaz eleme és $a, b \in \mathbb{R}$,

$ax + 7 \leq 0$, $a \in \mathbb{R}$ lineáris egyenlőtlenség, ahol x az ismeretlen és az együtthatók az a és 7 valós számok.

Az a szám az ismeretlen együtthatója, a b szám pedig az egyenlőtlenség szabad tagja.

Az ismeretlen együtthatója az a szám, a szabad tag pedig 7.

Ha $a \neq 0$, az $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥) alakú egyenlőtlenséget x ismeretlent tartalmazó, valós együtthatós, *I. fokú egyenlőtlenség*nek nevezzük.

$-2x + 3 > 0$, $x \in \mathbb{N}$ egy I. fokú egyenlőtlenség, ahol x az ismeretlen természetes szám.

Az ismeretlen együtthatója –2, a szabad tag pedig 3.

Megjegyzések

1. Amikor nincs megadva az E halmaz akkor azt azonosítjuk a valós számok $\mathbb{R}$ halmazával.

$2m + 1 < 0$ egyenlőtlenségben az m valós szám az ismeretlen.

2. Az egyenlőtlenségben más betűvel jelölt ismeretleneket is használhatunk.

$-y + 5 < 0$, $y \in \mathbb{Q}$ egyenlőtlenségben az y racionális szám az ismeretlen.

ismeretlen

$$a \cdot x + b \leq 0$$

az ismeretlen együtthatója

szabad tag

A. Feladat	B. Egyenlőtlenség
1. Határozd meg azt az x természetes számot, melyre $15 \cdot x - 10 \leq 0$.	1. Oldd meg az $\mathbb{N}$ halmazon a $15 \cdot x - 10 \leq 0$ egyenlőtlenséget!
2. Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyre $15 \cdot x - 10 \leq 0$.	2. Oldd meg a $15 \cdot x - 10 \leq 0$ egyenlőtlenséget!

B. Az $ax + b \le 0$ (<, >, ≥) alakú egyenlőtlenség megoldásai. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza.

Az $ax + b \le 0$ $(<, >, \ge)$ alakú egyenlőtlenség megoldása az E halmaz bármely olyan eleme, amelyre az $ax + b \le 0$ $(<, >, \ge)$ egyenlőtlenség igaz, ahol $x \in M$ az ismeretlen, és $a, b \in \mathbb{R}$.

Példa: Ha $E = \mathbb{Z}$ és a $-2 \cdot x + 3 > 0$ egyenlőtlenség ismeretlenje az x, akkor:

a) $x = -3$ -at behelyettesítve az egyenlőtlenségbe azt kapjuk, hogy: $(-2) \cdot (-3) + 3 > 0$ vagy $9 > 0$ igaz kijelentés. Azt mondjuk, hogy -3 *teljesíti* az egyenlőtlenséget, vagy hogy -3 az egyenlőtlenség *megoldása*.

b) $x = 3$-at behelyettesítve az egyenlőtlenségbe azt kapjuk, hogy: $(-2) \cdot 3 + 3 > 0 \Leftrightarrow -3 > 0$, amely hamis kijelentés. Azt mondjuk, hogy a 3 szám *nem teljesíti* az egyenlőtlenséget, vagy hogy a 3 szám *nem megoldása* az egyenlőtlenségnek.

c) a $-0{,}25$ nem megoldása a fenti egyenlőtlenségnek, noha $(-2) \cdot (-0{,}25) + 3 > 0$, mert $-0{,}25$ *nem egész szám.*

Megjegyzés. Az ismeretlen azon értékeit, amelyekre teljesül az egyenlőtlenség, de nem elemei az E halmaznak, nem tekintjük az egyenlőtlenség megoldásainak.

A megoldásokat tartalmazó halmazt M-mel jelöljük és az egyenlőtlenség *megoldáshalmazának nevezzük.*

C. Az $ax + b \le 0$ (<, >, ≥) alakú egyenlőtlenség megoldása, ahol $a, b \in \mathbb{R}$

Megoldani egy $a \cdot x + b \le 0$ egyenlőtlenséget, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ azt jelenti, hogy meg kell határozni az M megoldáshalmazát.

Elvégezve az átalakításokat azt kapjuk, hogy: $a \cdot x + b \le 0 \,\big|\, -b \Leftrightarrow a \cdot x \le -b$.

Ha $a \ne 0$, akkor:

a) $a > 0$	$a \cdot x \le -b \,\big|\, : a \Leftrightarrow x \le -\dfrac{b}{a}$.	Az összes, legtöbb $-\dfrac{b}{a}$ -val egyenlő valós szám az egyenlőtlenség megoldása. Így írjuk: $M = \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right]$.
b) $a < 0$	$a \cdot x \le -b \,\big|\, : a \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{b}{a}$.	Az összes, legkevesebb $-\dfrac{b}{a}$ -val egyenlő valós szám az egyenlőtlenség megoldása. Így írjuk: $M = \left[-\dfrac{b}{a}, \infty\right)$.

A gyakorlatban olyan helyzetekkel találkozunk, amelyekben egyes egyenlőtlenségeket ekvivalens átalakításokkal $a \cdot x + b \le 0$ alakú egyenlőtlenséggé alakíthatunk, és amelyekben az a számról nem tudjuk, hogy nullától különböző.

Ha $a = 0$, akkor az $a \cdot x + b \le 0$ egyenlőtlenség $0 \cdot x + b \le 0$ lesz, $b \in \mathbb{R}$.

a) Ha $b \le 0$, Az egyenlőtlenség bármely x valós szám esetén teljesül, tehát $M = \mathbb{R}$.

b) Ha $b > 0$, Az egyenlőtlenség az x ismeretlen egyetlen valós értékére sem teljesül, tehát $M = \varnothing$.

Megjegyzés: Ha az egyenlőtlenséget egy $E \subset \mathbb{R}$, halmazon kell megoldani, akkor a megoldáshalmaz nem más, mint az $\mathbb{R}$ halmazon kapott megoldások halmazának és az E halmaznak a metszete.

Példa: Adott $-2x + 3 > 0$. **a)** Oldd meg $\mathbb{Z}$-ben az egyenlőtlenséget; **b)** Oldd meg az egyenlőtlenséget!

$$-2x + 3 > 0 \,|\, -3 \Leftrightarrow -2x + 3 - 3 > 0 - 3 \Leftrightarrow -2x > -3 \,|\, : (-2) \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} < \frac{-3}{-2} \Leftrightarrow x < 1{,}5$$

a) $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1{,}5\} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ vagy $M = (-\infty, 1{,}5] \cap \mathbb{Z}$.

b) Amikor nincs megadva az E halmaz, akkor az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán oldjuk meg, tehát a megoldáshalmaz az $M = (-\infty, 1{,}5]$.

Ne kapkodj!

Ha negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát, akkor az egyenlőtlenségben található relációs jel megfordul.

$-2x > -3 \,|\, : (-2) \qquad \dfrac{-2x}{-2} < \dfrac{-3}{-2}$

D. Az $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥) alakú egyenlőtlenség megoldáshalmazának mértani ábrázolása.

Alkalmazás

1. alkalmazás. a) Írd le egyenlőtlenség segítségével az alábbi kijelentéseket:

CS

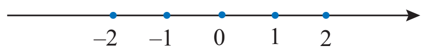
a_1. Az x valós szám ellentettjének háromszorosa legkevesebb 21.

a_2. Az x egész szám egyharmadának abszolút értéke kisebb, mint 1.

b) Oldd meg a leírt egyenlőtlenségeket!

c) Ábrázold a számtengelyen az egyenlőtlenségek megoldáshalmazát!

Megoldás.

a)	**a_1** $3 \cdot (-x) \geq 21, x \in \mathbb{R}$.	**a_2** $\left\lvert \frac{1}{3} \cdot x \right\rvert < 1, x \in \mathbb{Z}$.
b)	$-3x \geq 21 \mid : (-3)$ $\frac{-3x}{-3} \leq \frac{21}{-3}$ $x \leq -7$ *Következtetés*: Az egyenlőtlenség megoldásai azok az x valós számok, amelyek $x \leq -7$. $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7\} = (-\infty, -7)$ mértani ábrázolása egy félegyenes:	$-1 < \frac{x}{3} < 1 \mid \cdot 3$ $-3 < x < 3$ *Következtetés*: Az egyenlőtlenség megoldásai azok az x egész számok, amelyek $-3 < x < 3$. $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ melynek mértani ábrázolása a számtengely 5 pontja.
c)		

2. alkalmazás. Adottak az $x + 3 < 5$, $2x - 1 > 1$, $5x + 3 \geq -2$, $-7x + 3 \geq -11$ egyenlőtlenségek.

a) Oldd meg $\mathbb{R}$-ben az adott egyenlőtlenségeket!

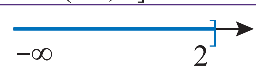
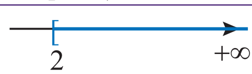
b) Ábrázoljuk mind a négy egyenlőtlenség megoldáshalmazát!

c) Oldd meg $E = [2, \infty)$ halmazon az adott egyenlőtlenségeket!

d) Ábrázold a c) alpontnál kapott megoldáshalmazokat!

e) Felhasználva az előző alpontokat, oldd meg az $M \cap \mathbb{Q}$ halmazon ugyanazokat az egyenlőtlenségeket.

f) Tanulmányozd, hogy az egyenlőtlenségek e) alpontnál kapott megoldáshalmazait lehet-e mértanilag ábrázolni!

	$x + 3 < 5$	$2x - 1 > 1$	$5x + 3 \geq -2$	$-7x + 3 \geq -11$
a)	$x < 2$ $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ $M = (-\infty, 2)$	$2x > 2$ $x > 1$ $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ $M = (1, +\infty)$	$5x \geq -5$ $x \geq -1$ $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ $M = [-1, +\infty)$	$-7x \geq -14$ $x \leq 2$ $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ $M = (-\infty, 2]$
b)				
c)	$M = (-\infty, 2) \cap [2, \infty)$ $M = \varnothing$	$M = (1, +\infty) \cap [2, \infty)$ $M = [2, \infty)$	$M = [-1, +\infty) \cap [2, \infty)$ $M = [2, \infty)$	$M = (-\infty, 2] \cap [2, \infty)$ $M = \{2\}$
d)	Az egyenlőtlenségnek nincs megoldása			
e)	$M = \varnothing \cap \mathbb{Q}$	$M = [2, \infty) \cap \mathbb{Q}$	$M = [2, \infty) \cap \mathbb{Q}$	$\{2\} \cap \mathbb{Q} = \{2\}$
f)	Az egyenlőtlenségnek nincs megoldása	Az M halmaz összes elemét nem lehet mértanilag ábrázolni a számtengelyen		

Következtetés:

1. A valós számok halmazán megoldott $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$) alakú egyenlőtlenség megoldáshalmaza egy intervallum, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Ha az egyenlőtlenséget egy olyan végtelen halmazon kell megoldani, amely nem intervallum, akkor előfordulhat, hogy a megoldáshalmazt nem lehet mértanilag ábrázolni.

Az $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$), alakú egyenlőtlenséget egy ismeretlenes I *fokú egyenlőtlenségnek* nevezzük, ahol a és b adott valós számok, $a \neq 0$.
Az a és b valós számokat az egyenlőtlenség *együtthatóiknak*, az x számot pedig *ismeretlennek* nevezzük.
A valós számok halmazán megoldott $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$) alakú egyenlőtlenség megoldáshalmaza egy intervallum, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Másold a füzetbe és egészítsd ki a minta alapján az alábbi táblázatot:

Egyenlőtlenség	Együtthatói		Ismeretlen
$ax + b \leq 0$	a	b	x
$\sqrt{2}\,y + 4 \leq 0$	$\sqrt{2}$	4	y
$-6{,}2\,m + 3{,}6 \leq 0$			
$-0{,}6\,x - 1{,}5 \leq 0$			

2. Határozd meg:
a) az 5-nél kisebb természetes számokat.
b) a –4-nél nagyobb negatív egész számokat.
c) az $M = \{-2000; -1; 0{,}75; \sqrt{2}; 17; \sqrt{199}\}$ halmaz azon elemeit, amelyekre igaz, hogy $x \leq 10$.
d) az olyan $\overline{ab}$ alakú számokat, amelyekre igaz, hogy $-\frac{72}{\overline{ab}} < -6$.

3. Ellenőrizd, hogy -1 megoldása-e a következő egyenlőtlenségeknek:
a) $4 \cdot x + 3 < 1$; **b)** $x + 4 \geq 3$; **c)** $\frac{1}{x+2} < 0$.

4. **A.** Vegyük figyelembe a következő kijelentést: „Az x cm hosszúsággal és 1,5 cm szélességgel rendelkező téglalap kerülete 10 cm.”
a) Mutasd ki, hogy az x értéke nem lehet $-2; -1{,}5; 0; 4; 6{,}5$ számok egyike sem!
b) Vizsgáld meg, hogy az x értéke lehet-e 2 vagy 3!
c) Írd le a fenti kijelentést egyenlőtlenség segítségével!

B. Adott a $2x + 3 \leq 10$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ egyenlőtlenség.
a) Indokold meg, hogy a $-2; -1{,}5; 0; 4; 6{,}5$ számok nem lehetnek az egyenlőtlenség megoldásai!
b) Indokold meg, hogy a 2 és 3 számok az egyenlőtlenség megoldásai!
c)) Másold a füzetbe, majd egészítsd ki a pontok helyén, követve a $2x + 3 \leq 10$egyenlőtlenség megoldási lépéseit, ahol $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$2 \cdot x + 3 \leq 10$	
$2 \cdot x + 3 - 3 \leq 10 - 3$	• *Kivonunk 3-at az egyenlőtlenség mindkét oldalából.*
$2 \cdot x \leq 7$	• …
$\frac{2 \cdot x}{2} \leq \frac{7}{2}$	• Elosztjuk …
$x \leq \ldots$	• ...
Az egyenlőtlenség megoldásai azok az $\mathbb{R}_+^*$ halmazbeli számok, amelyek legtöbb 3,5-tel egyenlők.	

C. Legyen M a $2x + 3 \leq 10$ egyenlőtlenség megoldás halmaza, ahol $x \in \mathbb{R}_+^*$.
a) Határozd meg az M halmazt elemeinek közös tulajdonságával.
b) Tanulmányozd, hogy a 0 illetve 3,5 szám az egyenlőtlenség megoldása-e!
c) Ábrázold a számtengelyen az M halmazt!

D. Oldd meg újra a **C** alpontnál levő követelményeket a $2x + 3 \leq 10$ egyenlőtlenség esetén, ahol $x \in \mathbb{R}$.

5. Adottak a következő egyenlőtlenségek: $2x + 4 < 0$; $5x - 10 < 0$; $-6x + 12 < 0$; $-0{,}8x + 2{,}4 < 0$.

a) Oldd meg az egyenlőtlenségeket, majd ábrázold a számtengelyen ezek megoldáshalmazait!

b) A megadott egyenlőtlenségekben cseréld ki a $<$ relációs jelet a $<$ $\leq$, $>$, $\geq$, relációs jelekkel, oldd meg a kapott egyenlőtlenségeket és ábrázold a számtengelyen a megoldáshalmazokat!

6. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket, és ábrázold a számtengelyen a megoldáshalmazokat

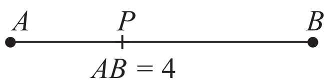
a) $x + 3 < 0$; **b)** $2{,}3 + x \geq 0$;

c) $0 > -x + \sqrt{2}$; **d)** $\frac{1}{4} \cdot x - 1 \leq 0$;

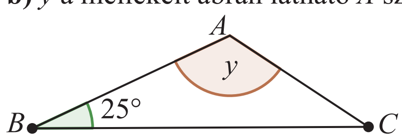
e) $\frac{x+5}{-3} \leq 0$; **f)** $-7 \cdot x > 0$.

7. A mellékelt rajzokon szereplő információk felhasználásával írd le az egyes feltételeknek megfelelő egyenlőtlenségeket:

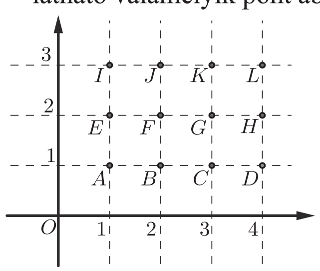
a) x az AP szakasz hossza, ahol P az AB szakasz eleme.



b) y a mellékelt ábrán látható A szög mértéke.



c) Határozd meg azt a legnagyobb m, illetve legkisebb n természetes számot, amelyre $m < x < n$ bármely x szám esetén, ahol x a mellékelt ábrán látható valamelyik pont abszcisszája.



d) Határozd meg azt a legnagyobb p, illetve legkisebb q természetes számot, amelyre $p < y < q$, bármely y szám esetén, ahol y a mellékelt ábrán látható valamelyik pont ordinátája.

8. Oldd meg $\mathbb{R}$-ben a következő egyenlőtlenségeket:

a) $3 \cdot x + 6 \geq 0$; **b)** $-4 \cdot x + 2 \leq 0$;

c) $-5 \cdot (x + 2) > 0$; **d)** $4 \cdot (x - 1) > 0$;

e) $x : 6 + 0{,}1(6) < 0$; **f)** $\frac{5}{6} \cdot (3 - x) \leq 0$;

g) $-10 \cdot (x - 0{,}25) > 0$;

h) $0 \cdot x + 1 \geq 0$; **i)** $-5 + x < 0$.

9. Oldd meg az egyenlőtlenségeket:

a) $\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{15} < 0$;

b) $-\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{32} > 0$;

c) $(1 - \sqrt{5}) \cdot x - 1 + \sqrt{5} \leq 0$.

10. Határozd meg az x valós szám azon értékeit, amelyekre

a) a ,5 $\cdot\, x + 4{,}5$ pozitív szám;

b) a $\frac{2}{3} \cdot x - \frac{4}{9}$ negatív szám;

c) a $\sqrt{10} \cdot x + 10$ nem negatív szám;

d) a $-3^2 \cdot x - 3^3$ legkevesebb 0-val egyenlő.

11. Határozd meg az y valós szám azon értékeit, amelyekre az alábbi kifejezések értelmezettek:

a) $\sqrt{y-5}$ **b)** $\sqrt{2 \cdot y - 3}$

c) $\sqrt{5{,}4 - 3 \cdot y}$ **d)** $\sqrt{\frac{1}{2 \cdot y - 7}}$

12. Tanulmányozd, hogy létezik-e olyan x valós szám, amelyre az $5 \cdot x - 3$ és $5 - 3 \cdot x$ egyidejűleg pozitív szám.

13. Oldd meg a természetes számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $3 \cdot x - \frac{9}{2} \leq 0$;

b) $-x + 2 \geq 0$;

c) $\frac{2 \cdot x - 11}{-5} \leq 0$.

d) $0 \cdot x \geq x$.

14. Oldd meg az egész számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $-2 \cdot x + 3 \leq 0$;

b) $\frac{x}{2} - 2^{-1} > 0$;

c) $x : (-2)^3 < 0$;

d) $(2^{15} - 2^{14} - \ldots - 2^9) \cdot (-x) \leq 8^3$.

3.6. $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$) alakú egyenlőtlenségre visszavezethető egyenlőtlenségek, ahol $a, b \in \mathbb{R}$

Oldjuk meg figyelmesen!

Néhány gyakorlati feladat megoldható $ax + b \leq 0$ alakra *visszavezethető egyenlőtlenségek* segítségével, ahol a és b valós számok

1. feladat. Jelenleg 27 informatikus és 15 matematikus dolgozik egy kutatóintézetben. Az intézet versenyvizsgát szervez, amely során ugyanannyi matematikust és informatikust alkalmaznak. Célunk annak kiderítése, hogy hány matematikust alkalmaznak ahhoz, hogy az intézet matematikusainak létszáma ugyanazon intézetben dolgozó informatikusok létszámának legfeljebb kétharmadával legyen egyenlő.

ET

Megoldás. **1**. *Matematikai modellezés:* Legyen x a versenyvizsga során alkalmazott matematikusok száma. Ugyanannyi, azaz x informatikust is alkalmaznak. Akkor a matematikusok létszáma $x + 15$, az informatikusok létszáma pedig $x + 27$ lesz.
Mivel az intézet matematikusainak létszáma ugyanazon intézet informatikusai létszámának legfeljebb kétharmadával legyen egyenlő, az $x + 15 \leq \frac{2}{3}(x + 27)$ egyenlőtlenséget kapjuk.

Megjegyzés. Az eset matematikai modellezése a következő feladathoz vezetett:

Határozd meg az x természetes számokat, ha

$$x + 15 \leq \frac{2}{3}(x + 27).$$

Átfogalmazás: *Oldd meg a természetes számok halmazán az* $x + 15 \leq \frac{2}{3}(x + 27)$ *egyenlőtlenséget.*

A valós számokkal végzett műveletek tulajdonságainak, valamint a számítási szabályoknak a helyes alkalmazásával az $x + 15 \leq \frac{2}{3}(x + 27)$ egyenlőtlenséget a vele ekvivalens $ax + b \leq 0$ alakú egyenlőtlenséggé alakíthatjuk, ahol a és b valós számok.

Ezért $x + 15 \leq \frac{2}{3}(x + 27)$ az $ax + b \leq 0$ alakú egyenlőtlenségre visszavezethető egyenlőtlenségnek nevezzük.

2. *Oldd meg a valós számok halmazán az* $x + 15 \leq \frac{2}{3}(x + 27)$ *egyenlőtlenséget!*

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk 3-mal:	$x + 9 \leq \frac{2}{3}(x + 15) \mid \cdot 3$
Leírjuk a kapott ekvivalens egyenlőtlenséget:	$3 \cdot (x + 9) \leq 2 \cdot (x + 15)$
Alkalmazzuk a szorzásnak disztributív tulajdonságát az összeadásra nézve, és azt kapjuk, hogy:	$3 \cdot x + 27 \leq 2 \cdot x + 30$
Az egyenlőtlenség mindkét oldalából kivonjuk a jobb oldalon levő kifejezést:	$3 \cdot x + 27 - (2 \cdot x + 30) \leq 2 \cdot x + 30 - (2 \cdot x + 30)$
Elvégezve a számításokat a mellékelt ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk:	$x - 3 \leq 0$
Leírjuk az egyenlőtlenség megoldáshalmazát:	$M = (-\infty, 3]$

3. *A felelet megfogalmazása:* A követelmény helyes megválaszolása érdekében az egyenlőtlenség megoldásai közül azokat választhatjuk ki, amelyek megfelelnek a matematikailag modellezett valós helyzet adta korlátozásoknak. Az intézet „több matematikust fog felvenni”, vagyis az alkalmazott matematikusok száma nullától különböző természetes szám. Most már meg tudjuk adni a helyes választ: A kutatóintézet 1, 2 vagy 3 matematikust alkalmaz.

2. feladat. Két silóban 2800 t illetve 1300 t takarmányt tároltak. Az első raktárból naponta 100 t takarmányt, a második raktárból pedig napi 25 t takarmányt szállítanak az állattartó telepekre. Határozd meg a napok számát tudva, hogy a szállítás után az első silóban maradt takarmány mennyisége legalább kétszerese a második silóban maradat takarmány mennyiségének!

CS

Megoldás. **1.** *Matematikai modellezés:* Jelöljük x-szel azon napok számát, amelyek után az első silóban maradt takarmány mennyisége legalább kétszerese a második silóban maradat takarmány mennyiségének. Akkor az első silóban maradt takarmány mennyiség $2800 - 100\,x$ tonna, a második silóban pedig $1300 - 25x$ tonna maradt. Mivel x nap után az első silóban maradt takarmány mennyisége legalább kétszerese a második silóban maradt takarmány mennyiségének a $2800 - 100\,x \geq 2(1300 - 25x)$ egyenlőtlenséget kapjuk, amely $ax + b \geq 0$ alakra vezethető vissza.

2. *Az egyenlőtlenség megoldása*: $2800 - 100\,x \geq 2(1300 - 25x) \Leftrightarrow 2800 - 100\,x \geq 2600 - 50x \mid -(2600 - 50x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2800 - 100\,x - 2600 + 50x \geq 0 \Leftrightarrow -50\,x + 200 \geq 0 \Rightarrow M = (-\infty, 4]$.

3. *A felelet megfogalmazása*: $2800 > 1300 \cdot 2$. Az első raktárban lévő takarmány mennyisége legalább kétszerese az első szállítás előtt a második silóban fennmaradó mennyiségnek, és 4 szállítmányig, tehát 4 napig marad ezzel a tulajdonsággal. Például 3 nap után az első silóban maradt mennyiség 2500 t, a második silóban maradt mennyiség pedig 1225 t, és $2500 \geq 2 \cdot 1225$.

Fedezzük fel, értsük meg!

1. Alkalmazás: Írd az $\dfrac{a}{bx+c} < 0$ $(>, \leq, \geq)$ egyenlőtlenséget $mx + n < 0$ $(>)$ alakba, ahol $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$

Megjegyzés. Az ilyen alakú egyenlőtlenségek tanulmányozásakor kizárjuk azt a lehetőséget, amelyre $bx + c$ értéke 0, mivel az $\dfrac{a}{bx+c}$ aránynak nem lenne értelme.

Egyenlőtlenség	Előjelszabályok	Az egyenlőtlenség átalakítása
1) $\dfrac{3}{-2x+5} < 0.$	$a > 0$ és $\dfrac{a}{bx+c} < 0 \Rightarrow bx + c < 0$	$3 > 0$, tehát $\dfrac{3}{-2x+5} < 0 \Leftrightarrow -2x + 5 < 0$
2) $\dfrac{-8}{-2x+5} < 0.$	$a < 0$ és $\dfrac{a}{bx+c} < 0 \Rightarrow bx + c > 0$	$-8 < 0$, tehát $\dfrac{-8}{-2x+5} < 0 \Leftrightarrow -2x + 5 > 0$
3) $\dfrac{12}{-2x+5} > 0.$	$a > 0$ és $\dfrac{a}{bx+c} > 0 \Rightarrow bx + c > 0$	$12 > 0$, tehát $\dfrac{12}{-2x+5} > 0 \Leftrightarrow -2x + 5 > 0$
4) $\dfrac{-7}{-2x+5} > 0.$	$a < 0$ és $\dfrac{a}{bx+c} > 0 \Rightarrow bx + c < 0$	$-7 < 0$, tehát $\dfrac{7}{-2x+5} > 0 \Leftrightarrow -2x + 5 < 0$

Megjegyzés. Mivel az a nullától különböző, arra a következtetésre jutunk, hogy az $\dfrac{a}{bx+c} \leq 0$ és $\dfrac{a}{bx+c} < 0$, egyenlőtlenségek, valamint az $\dfrac{a}{bx+c} \geq 0$ és $\dfrac{a}{bx+c} > 0$ egyenlőtlenségek is ekvivalensek.

Következtetés: Az $\dfrac{a}{bx+c} < 0$ $(>, \leq, \geq)$alakú egyenlőtlenség, ahol $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$ az $mx + n < 0$ $(>)$ alakú egyenlőtlenségre vezethető vissza, ahol m és n valós szám, $m \neq 0$.

2. Alkalmazás. $|ax+b|< c$ ($\le$) alakú egyenlőtlenségek, ahol $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$

3 feladat	*Átfogalmazás*
Határozd meg az x valós számokat tudva, hogy $\mid 2x+7 \mid < 5$	Oldd meg a valós számok halmazán a $\mid 2x+7 \mid < 5$ egyenlőtlenséget!

Feladat a portfólióba

Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $|2x+7| < 0$

b) $|2x+7| < -5$.

Megoldás. $|2x+7| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x+7 < 5$. Mindkét oldalhoz hozzáadunk -7-et, elvégezzük a műveleteket és azt kapjuk, hogy $-12 < 2x < -2$. Ezután mindkét oldalt elosztva 2-vel a $-6 < x < -1$ egyenlőtlenséget kapjuk. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $M = (-6, -1)$ lesz.

A 3. feladat általánosítása	*Átfogalmazás*
Határozd meg az x valós számokat tudva, hogy $\mid ax+b \mid < c$, ahol $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$	Oldd meg a valós számok halmazán a $\mid ax+b \mid < c$ egyenlőtlenséget, ahol $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Megoldás. **1)** Ha $c > 0$, $|ax+b| < c \Leftrightarrow -c < ax+b < c$. Mindkét oldalhoz hozzáadunk $-b$-t, elvégezzük a műveleteket és azt kapjuk, hogy $-c-b < ax < c-b$. Mindkét oldalt a-val osztva a $\dfrac{-c-b}{a} < x < \dfrac{c-b}{a}$ egyenlőtlenséghez jutunk. A kapott megoldáshalmaz $M = \left(\dfrac{-c-b}{a}, \dfrac{c-b}{a}\right)$ lesz.

2) Ha $c \le 0$, a $|ax+b| < c$ egyenlőtlenségnek nincs egyetlen megoldása sem, mivel egy valós szám abszolút értéke nem lehet negatív szám.

4. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán a $|ax+b| \le c$ egyenlőtlenséget, ahol $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Megoldás. **1)** Ha $c > 0$, $|ax+b| \le c \Leftrightarrow -c \le ax+b \le c$. Mindkét oldalhoz hozzáadunk $-b$-t, elvégezzük a műveleteket és azt kapjuk, hogy $-c-b \le ax \le c-b$. Mindkét oldalt a-val osztva a $\dfrac{-c-b}{a} \le x \le \dfrac{c-b}{a}$ egyenlőtlenséghez jutunk. A kapott megoldáshalmaz $M = \left[\dfrac{-c-b}{a}, \dfrac{c-b}{a}\right]$.

2) Ha $c = 0$, $|ax+b| \le 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, tehát $ax+b = 0$, ahol $a \ne 0$, vagyis $x = -\dfrac{b}{a}$ és $M = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

3) Ha $c < 0$, a $|ax+b| \le c$ egyenlőtlenségnek nincs egyetlen megoldása sem, mivel egy valós szám abszolút értéke nem lehet negatív szám.

Alkalmazás

1. Oldd meg a $\dfrac{3}{-2x+5} < 0$. egyenlőtlenséget!

Megoldás. $\dfrac{3}{-2x+5} < 0 \Leftrightarrow -2x+5 < 0 \Leftrightarrow -2x+5 < 0 \mid -5 \Leftrightarrow$
$-2x < -5 \mid : (-2) \Leftrightarrow x > 2{,}5$ és $M = (2{,}5; \infty)$.

2. Oldd meg a $\dfrac{-4}{\sqrt{3}x - \sqrt{12}} \ge 0$. egyenlőtlenséget!

Megoldás. $\dfrac{-4}{\sqrt{3}x - \sqrt{12}} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - \sqrt{12} < 0$.

$\sqrt{3}x - \sqrt{12} < 0 \mid + \sqrt{12} \Leftrightarrow \sqrt{3}x < \sqrt{12} \mid : \sqrt{3} \Leftrightarrow x < 2$

és $M = (-\infty, 2)$.

3. Egy négyzet oldalának hossza legyen x cm, ahol x természetes szám. Egy téglalap oldalainak hossza, centiméterben kifejezve legyen $5x - 14$ illetve 8.
Jelöljük $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ vel a négyzet illetve a téglalap kerületét. Az $5 \cdot \frac{\mathcal{K}_1}{2}$ és $\mathcal{K}_2$ arányának értéke legalább 1.
Határozd meg az x természetes szám azon legkisebb értékét, amely a négyzet oldalhossza lehet centiméterben kifejezve.

Megoldás. Centiméterben kifejezve a négyzet fél kerülete $2x$. A téglalap kerülete $2(5x - 14 + 8)$, szintén centiméterben kifejezve. Tehát $10x - 12$. Mivel „Az $5 \cdot \frac{\mathcal{K}_1}{2}$ és $\mathcal{K}_2$ arány értéke legalább 1” az $\frac{5x}{5x-6} \geq 1$ egyenlőtlenséget kapjuk. Megoldjuk az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:
$\frac{5x}{5x-6} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(5x-6)+6}{5x-6} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{5x-6}{5x-6} + \frac{6}{5x-6} \geq 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{6}{5x-6} \geq 1 \mid -1 \Leftrightarrow \frac{6}{5x-6} \geq 0$, tehát $5x - 6 > 0$, vagyis a megoldáshalmaz: $(1,2; \infty)$.

A négyzet oldalhosszát és a téglalap méreteit kifejező számok pozitív számok, tehát $x > 0$ és $5x - 14 > 0$, vagyis a megoldáshalmazok $(0; \infty)$, illetve $(2,8; \infty)$.
Akkor az x értékei az $(1,2; \infty) \cap (0; \infty) \cap (2,8; \infty)$, tehát $x \in (2,8; \infty)$.
Az x természetes szám azon legkisebb értéke, amely a négyzet oldalhossza lehet, centiméterben kifejezve nem más, mint 3.

Gyakorlatok és feladatok

1. Ellenőrizd, hogy az $A = \{-3, -1, 0, 2, 5\}$ valamely eleme megoldása-e a következő egyenlőtlenségnek: $5 \cdot x - 2 < x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

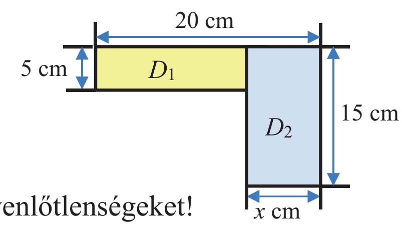
2. Határozd meg a $B = \{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{4}{3}, \sqrt{5}\}$, halmaz azon elemeit, amelyek nem megoldásai a $4 \cdot x > 2 + x$ egyenlőtlenségnek!

3. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:
a) $2 \cdot x + 3 < x + 1$;
b) $-3 \cdot y + 7 > -5 \cdot y + 3$;
c) $-10 \geq 2 \cdot (z + 1) + z$;
d) $0,5 \cdot t + \frac{1}{2} \leq 1,5 \cdot t + 4$.

4. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!
a) $\frac{2}{3} \cdot x - \frac{1}{5} > \frac{7}{15}$;
b) $1,3 \cdot x - 13 < 2 \cdot x + 8$;
c) $\frac{-2 \cdot x + 1}{5} \geq \frac{-5 \cdot x + 1}{2}$;
d) $\frac{4(x+3)}{-3} \leq \frac{2 \cdot x - 2}{9}$.

5. Adottak a számtengelyen az O, A, B, C pontok. Határozd meg az x egész szám értékét tudva, hogy az $A(x-1)$ és $B(x + 2)$ az OC szakasz eleme, $O(0)$ és $C(6)$.

6. A mellékelt ábrán a D_1 és D_2. téglalap alakú felületek láthatóak. Jelöljük $\mathcal{T}_1$, illetve $\mathcal{T}_2$-vel a D_1, illetve D_2 téglalapok területét. Határozd meg az x értékét az alábbi esetekben:
a) $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$
b) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$
c) $\mathcal{T}_1 > \mathcal{T}_2$



7. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!
a) $\frac{4}{9x-18} < 0$; **b)** $\frac{6}{-2x-5} > 0$;
c) $\frac{3}{-5x-2} \leq 0$; **d)** $\frac{\sqrt{2}}{1,6x-3,2} \leq 0$;
e) $\frac{15}{0,(3)x-0,(6)} \geq 0$; **f)** $\frac{10}{-2x+1} \geq 0$.

8. **a)** Bizonyítsd be, hogy
$-8x+17=-2(4x-7)+3$;

b) Oldd meg! $\dfrac{-8x+17}{4x-7}\le -2$.

9. Oldd meg az egyenlőtlenséget!

a) $|-4x+3|<2$;

b) $|-3x-5|\le 3$;

c) $-\sqrt{2}\,|0{,}5x-0{,}2|\ge -\dfrac{\sqrt{18}}{10}$;

d) $\left|x-\dfrac{3x+2}{5}\right|\le 0$;

e) $\left|5-\dfrac{x+6}{2}\right|<0$;

f) $\left|5-\dfrac{x+6}{2}\right|<1$.

10. Kiszámítva a $2\cdot(z+1)-3\cdot(z-2)$, kifejezést eredményül 10-et kapunk. Határozd a z értékét tudva, hogy negatív egész szám.

11. Határozd meg az n természetes számot tudva, hogy $\dfrac{0{,}1}{5-1{,}2\cdot n}$ pozitív szám.

12. **a)** Írd le azokat az egész számokat, amelyek abszolút értéke legtöbb 3 !
b) Írj négy irracionális számot tudva, hogy abszolút értékük kisebb, mint 1,8!

13. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!

a) $|x|<2$;

b) $|x-2|\le 3$;

c) $|1-x|\le 0$;

d) $-15\cdot|x-1|>-105$;

e) $3-|4\cdot x-1|\ge 0$;

f) $|x|\cdot(x-4)>0$.

14. Az ABC háromszögben $AB=8$ cm, $BC=(3\cdot x-10)$ cm, $AC=(10-x)$ cm. Határozd meg az x természetes számot tudva, hogy ABC egyenlő szárú háromszög.

15. Három füzet és négy golyóstoll 27 lejbe kerül. Határozd meg egy füzet minimális és maximális árát tudva, hogy az ár természetes számban és lejben kifejezett érték.

16. Sándor meg kellett oldja a valós számok halmazán az $\dfrac{x-2}{-6}\le 0,(6)$ egyenlőtlenséget.

A füzetbe a következőt írta:
$$\frac{x-2}{-6}\le^{-2)}\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{x-2}{-6}\le\frac{-4}{-6}\Leftrightarrow x\le -4+2\Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow x\le -2$,
$M=(-\infty,-2]$
Tanulmányozd az egyenlőtlenség megoldását és a Sándor által leírt megoldás helyességét! Indokold válaszod!

17. **a)** Ha $a\in\left(\dfrac{1}{5},+\infty\right)$, mutasd ki: $15\cdot a-3>0$.

b) Ha $\dfrac{2\cdot b-1}{3}\in(-\infty,3)$, mutasd ki:
$-3\cdot b+16>1$.

18. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!

a) $\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{x}{6}$;

b) $x\sqrt{2}-1<x\sqrt{8}+|-1|$;

c) $\dfrac{2\cdot x}{-3}+\dfrac{1}{-4}<-\dfrac{x}{-6}+\dfrac{5}{-12}$;

d) $3\cdot(x-\dfrac{1}{3})-2\cdot(x+\dfrac{1}{2})\le 4\cdot(x-\dfrac{1}{4})$.

19. **a)** Határozd meg az

$A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\dfrac{x^1+1}{4\cdot x-12}>0\right\}$,

$B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,3\cdot x+8\ge 4\cdot x+5\ge 2\cdot x-1\}$ és

$C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-2\le\dfrac{3\cdot x+1}{4}\le 4\}$ halmazt!

b) Mutasd ki, hogy $C\setminus A=B$.

20. Határozd meg azt az intervallumot, amelynek $1-a\sqrt{6}$ alakú számok elemei, ahol $a\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

21. Határozd meg az x értékét tudva, hogy $3-2x\in(-1,1]$.

22. Adottak az intervallumok: $I_1=\left(-\infty,\dfrac{1+a}{2}\right]$ és $I_2=[a-1,+\infty)$.

a) Határozd meg az a értékét tudva, hogy $I_1\cap I_2\ne\varnothing$.

b) Határozd meg az a azon értékeit, melyekre az $(I_1\cap I_2)$ metszett csak természetes számokat tartalmaz!

ISMERETFELMÉRŐ *Hivatalból 10 pont*

I. tétel

Az alábbi feladatokban keresd az egyetlen helyes válasznak megfelelő betűt!

5p **1.** Az n természetes szám azon értékei, melyekre az $\sqrt{1,5-0,75\cdot n}$ kifejezés értelmezett:

A. $\{0\}$; B. $\{0, 1\}$; C. $\{1, 2\}$; D. $\{0, 1, 2\}$.

5p **2.** Az $\{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 3\}$ halmazban levő legkisebb szám:

A. -2; B. -1; C. 0; D. 1.

5p **3.** Az $\{x \in \mathbb{R} \mid 3^{-1} < x < 3^0\}$ halmaz intervallumként felírva:

A. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$; B. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$; C. $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$; D. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

5p **4.** A $\left(-\frac{7}{3}, \frac{3}{7}\right)$ intervallumban levő egész számok összege:

A. -3; B. -2; C. -1; D. 0.

5p **5.** Ha $a = b + 2$ és $b \in [-3,2]$, akkor $a \in$:

A. $[-1, 0]$; B. $[1, 0]$; C. $[1, 4]$; D. $[-1, 4]$.

5p **6.** Az a legnagyobb x valós szám, amelyre igaz, hogy $\frac{x}{\sqrt{3}} - \sqrt{12} \geq x \cdot \sqrt{3}$ nem más, mint:

A. -4; B. -3; C. -2; D. 0.

5p **7.** Ha $44 \cdot x - 484 \leq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza n természetes számot tartalmaz, akkor az n értéke:

A. 10; B. 11; C. 12; D. 13.

5p **8.** A $2 \cdot x + 1 \geq -3 \cdot x - 9$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza:

A. $[-2, +\infty)$; B. $(-\infty, -2]$; C. $[2, +\infty)$; D. $\varnothing$.

II. tétel *A feladatok részletes megoldását kell leírni.*

10p **1.** Adott a $\mathcal{C}_1(O_1, r)$ és $\mathcal{C}_2(O_2, 3\text{ cm})$ kör úgy, hogy $O_1O_2 = 10$ cm. Határozd meg az r szám értékeit tudva, hogy természetes szám és a $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ metsző körök.

10p **2.** Adott az $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 5\}$ halmaz és az $I = (a, b)$ intervallum, ahol $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$. Határozd meg az a és b számot tudva, hogy az $M \cap I$ halmaz elemeinek összege 5.

III. tétel *A feladatok részletes megoldását kell leírni.*

1. Adott $A = \left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ és B azon valós számok halmaza, amelyek egész része -3.

5p **a)** Határozd meg a B halmazt!

10p **b)** Számítsd ki $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

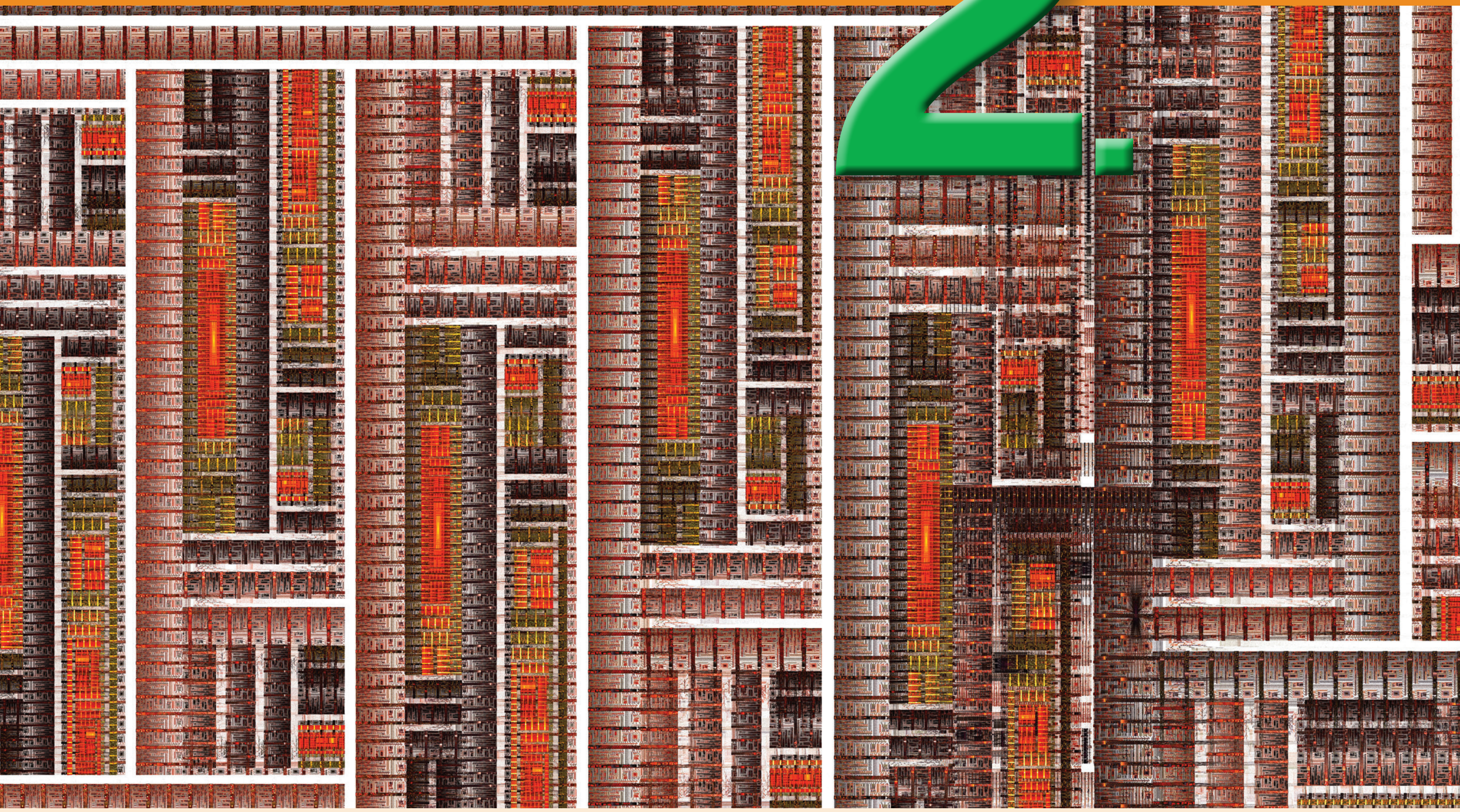
10p **2. a)** Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket:

(1) $4 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) < x - 0,25$ (2) $2 \cdot x - 2^{-1} > x - 3^{-1}$

és jelöld M_1-gyel illetve M_2-vel ezek megoldáshalmazát!

5p **b)** Határozd meg az n természetes számot tudva, hogy $\frac{1}{n} \in M_1 \cap M_2$.

2. FEJEZET



Algebrai számítások $\mathbb{R}$-ben

1. Valós számokkal végzett műveletek
2. Rövidített számítási képletek
3. Tényezőkre bontás számítási szabályokkal
4. Algebrai törtek. Műveletek algebrai törtekkel
5. $ax^2 + bx + c = 0$ alakú egyenletek, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$

Sajátos kompetenciák

1.2. 2.2. 3.2. 4.2. 5.2. 6.2.

1. Valós számokkal végzett műveletek

1.1. Valós számokkal végzett műveletek

Történelmi áttekintés Az *algebra* szó az arab nyelvből (*al-jabr*) származik. Az algebra gyökerei az ókori Babilonból erednek. A babilóniak fejlett számtani rendszert fejlesztettek ki különösen a számítások algoritmikus módjában. Az ismert algebrai módszerek Al-Horezmi (Muhammad ibn Musa Khwārizmī) matematikusnál jelentek meg, aki körülbelül 780 és 850 között írta híres művét, az *Összeadás és kivonás könyve indiai módszerekkel.*

A valós számok halmazán a következő műveleteket tanulmányoztuk: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, valamint a hatványozást és a valós szám négyzetgyökét.

Alkalmazás

1 Végezd el a következő számításokat. Add meg az egyes számítási lépésekben használt tulajdonságokat!

FT

a) $\left(-\sqrt{7}+5\right)+\sqrt{7}$. **b)** $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 5\right)\cdot\sqrt{3}$.

a) *Megoldás*	*Indoklás*
$\left(-\sqrt{7}+5\right)+\sqrt{7}=$	Kiindulás
$=\left[5+\left(-\sqrt{7}\right)\right]+\sqrt{7}=$	A valós számok összeadásának kommutatív tulajdonságát használjuk.
$=5+\left[\left(-\sqrt{7}\right)+\sqrt{7}\right]=$	A valós számok összeadásának asszociatív tulajdonságát használjuk.
$=5+0=$	A $-\sqrt{7}$ szám ellentettje $\sqrt{7}$ és $\left(-\sqrt{7}\right)+\sqrt{7}=0$.
$=5$	0 a semleges elem a valós számok összeadására nézve
$\left(-\sqrt{7}+5\right)+\sqrt{7}=5$	Befejezés

b) *Megoldás*	*Indoklás*
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 5\right)\cdot\sqrt{3}=$	Kiindulás
$=\left(5\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{3}=$	A valós számok szorzásának kommutatív tulajdonságát használjuk.
$=5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\right)=$	A valós számok szorzásának asszociatív tulajdonságát használjuk.
$=5\cdot 1=$	A $\sqrt{3}$ szám inverze $\frac{1}{\sqrt{3}}$ és $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}=1$.
$=5$	1 a semleges elem a valós számok szorzására nézve.
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 5\right)\cdot\sqrt{3}=5$	Befejezés

2 Adott az $S=\frac{7}{6}+\left(-\frac{2}{3}\right)+\sqrt{14}+\left(-\sqrt{27}\right)$ valós számok összege.

ET

a) Számológép használata nélkül közelítsd hiánnyal tizedekre a $\frac{7}{6}+\left(-\frac{2}{3}\right)$ számot!

b) Számológép segítségével közelítsd hiánnyal tizedekre a $\sqrt{14}$ és $\sqrt{27}$ számot!

c) Az előző közelítő értékeket használva becsüld fel az S összeg értékét!

Megoldás: **a)** $\frac{7}{6}+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{6}-{}^{2)}\frac{4}{3}=\frac{7}{6}-\frac{8}{6}=-\frac{1}{3}\approx -0{,}4$. **b)** $\sqrt{14}\approx 3{,}7$ és $\sqrt{27}\approx 5{,}1$.

Tehát $S\approx -0{,}4+3{,}7-5{,}1=-5{,}5+3{,}7=-1{,}8$. Az eredmény $S\approx -1{,}8$.

Feladatok a portfólióba

1. Írd le a valós számokkal végzett műveletek végrehajtásának sorrendjét és a zárójelek használatát a valós számokkal végzett műveletekben!

2. Alkoss két feladatot, amelyek számításokat tartalmaznak, oldd meg leírva mindegyik lépésnél a műveletek elvégzésének sorrendjét!

Gyakorlatok és feladatok

1. Számítsd ki:

a) $5\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}$;

b) $4\sqrt{2}-5\sqrt{2}+3\sqrt{2}$;

c) $-2\sqrt{5}+10\sqrt{5}-6\sqrt{5}$

d) $3\sqrt{7}-\left(2\sqrt{7}-5\sqrt{7}+\sqrt{7}\right)-4\sqrt{7}$;

e) $4+\sqrt{4}$; **f)** $9+\sqrt{9}$.

2. Másold le a füzetbe, majd egészítsd ki a táblázatot:

a	$2\sqrt{3}$	$7\sqrt{2}$	$4\sqrt{5}$			$-9\sqrt{6}$
b		$-4\sqrt{2}$			$3\sqrt{7}$	$4\sqrt{6}$
$a+b$			$11\sqrt{5}$			
$a-b$				$4\sqrt{11}$	$-5\sqrt{7}$	
$-b$	$-5\sqrt{3}$			$14\sqrt{11}$		

3. Másold le a füzetbe, majd egészítsd ki a táblázatot:

a	$3\sqrt{3}$	$5\sqrt{2}$			$6\sqrt{7}$	
b	$2\sqrt{2}$		$-4\sqrt{5}$			$-8\sqrt{3}$
$a\cdot b$		$10\sqrt{10}$		$36\sqrt{2}$		
$a:b$			$2\sqrt{2}$		2	$2\sqrt{3}$
b^{-1}				$\frac{1}{9}$		

4. Számítsd ki:

a) $2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$; **b)** $4\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}$;

c) $6\sqrt{11}:2\sqrt{11}$; **d)** $108\sqrt{19}:36\sqrt{19}$.

5. Számítsd ki:

a) $6\sqrt{12}:3\sqrt{2}$; **b)** $-10\sqrt{18}:5\sqrt{6}$;

c) $27\sqrt{9}:9\sqrt{3}$; **d)** $4\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{2}$;

e) $-2\sqrt{10}\cdot 5\sqrt{5}$; **f)** $8\sqrt{8}\cdot 4\sqrt{2}$.

6. Számítsd ki:

a) $\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3$; **b)** $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{10}}{\left(\sqrt{3}\right)^{8}}$;

c) $\left[\left(\sqrt{5}\right)^2\right]^3$; **d)** $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)^3$;

e) $\left(\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}\right)^2$; **f)** $\sqrt{27^2}$.

7. Számítsd ki:

a) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; **b)** $\left(-3\sqrt{2}\right)^2$;

c) $\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2$; **d)** $\left(-2\sqrt{5}\right)^3$.

8. Másold le a füzetbe, majd egészítsd ki a táblázatot:

a	$\sqrt{2}$				
$-a$		$-\sqrt{3}$			
a^{-1}			$\sqrt{5}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
a^2					
a^3				$16\sqrt{2}$	

9. Számítsd ki az $a+b-c$ értékét, ha:

a) $a=2\sqrt{3}-5$, $b=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, $c=-5+3\sqrt{2}$.

b) $a=2-\sqrt{5}$, $b=-4\sqrt{7}+2\sqrt{5}$, $c=\sqrt{5}-4\sqrt{7}$.

10. Számítsd ki: **a)** $12\sqrt{6}:2\sqrt{3}$; **b)** $-20\sqrt{27}:4\sqrt{9}$; **c)** $72\sqrt{63}:\left(-4\sqrt{7}\right):\left(-\sqrt{3}\right)$.

11. Hasonlítsd össze a következő számokat:

a) $7 + 3\sqrt{2}$ és $7 + 2\sqrt{3}$;

b) $-5\sqrt{2} + 11$ és $-\sqrt{49} + 11$.

12. Gyöktelenítsd a nevezőt és egyszerűsíts, ha lehet:

a) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; **b)** $\dfrac{10}{2\sqrt{5}}$;

c) $\dfrac{-4\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}$; **d)** $\dfrac{15}{2\sqrt{15}}$.

13. Számítsd ki:

a) $\left(-2\sqrt{6}\right)^2$; **b)** $\left(\dfrac{1}{5}\cdot\sqrt{10}\right)^2$;

c) $\left(\dfrac{7}{\sqrt{7}}\right)^2$; **d)** $\left(\dfrac{12\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)^2$.

14. Számítsd ki kétféleképpen:

a) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{6} - \left(\dfrac{2}{\sqrt{12}}-\dfrac{3}{\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt{24} - 6$;

b) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}-\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{10} + \left(\dfrac{5}{\sqrt{10}}-\dfrac{2}{5}\right)\cdot\sqrt{50}$.

15. Végezd el:

a) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$;

b) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}} + \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$.

16. Határozd meg az x értékét az egyenlőségekből:

a) $\dfrac{x}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$; **b)** $\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

c) $\dfrac{x}{\sqrt{10}} + \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}}$.

17. Számítsd ki:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}\right):\sqrt{6}$;

b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}-\dfrac{3}{\sqrt{90}}+\dfrac{5}{\sqrt{98}}-\dfrac{4}{\sqrt{32}}\right):$

$:\left(\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-1\right)$.

18. Adott az $a = 4\sqrt{2}-\sqrt{32}+\sqrt{128}$ és $b = 5\sqrt{3} + \sqrt{27} - 6\sqrt{12}$ szám. Számítsd ki:

a) $a - b$; **b)** $a \cdot b$; **c)** $a : b$; **d)** $a^2 + b^2$.

19. Mutasd ki, hogy az alábbiak racionális számok:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}$; **b)** $\dfrac{2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$;

c) $\dfrac{14}{\sqrt{7}} - \sqrt{28}$.

20. Ha $a = 0{,}1(6) + \sqrt{0{,}36} + 1\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{0{,}09}$, számítsd ki $\sqrt{\dfrac{6}{7}}\cdot a$ értékét.

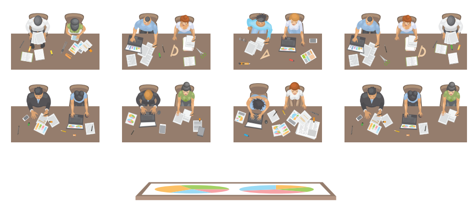
2.6. Betűkkel jelölt valós számokkal végzett műveletek

Oldjuk meg figyelmesen

1 FT

a) Egy osztályterem három padsorában két-két pad van, és mindegyik padban két tanuló ül, valamint még egy sorban van 2 olyan pad, melyben 3-3 tanuló ül. Határozd meg az osztályban levő tanulók számát!

b) Határozd meg az osztályban levő tanulók számát tudva, hogy a teremben x olyan padsor van, melynek mindegyikében y pad található és ezekben 2-2 tanuló ül, valamint egy olyan sor, melyben z pad van és ezekben 3-3 tanuló ül!



Megoldás. **a)** $(3 \cdot 2) \cdot 2 + (1 \cdot 2) \cdot 3 = 18$.
A teremben 18 tanuló van.
b) $(x \cdot y) \cdot 2 + (1 \cdot z) \cdot 3 = 2xy+3z$
Az osztályban $2xy+3z$ tanuló van.

2 FT

Egy téglalap szélessége $a = 3$ méter és a hosszúsága $b = 6$ méter. Egy ugyanakkora területű téglalap szélessége $c = 2$ méterrel kisebb, mint az előző téglalap hosszúsága. Számítsd ki a második téglalap hosszúságát!

Megoldás: A két téglalap területe egyenlő, vagyis ab. Mivel a második téglalap szélessége c-vel kisebb, mint az első téglalap hosszúsága, akkor a második téglalap hosszúságának hossza $\frac{ab}{b-c}$. Az $a = 3$, $b = 6$ és $c = 2$ esetén a keresett hosszúság $\frac{3 \cdot 6}{6-2} = 4{,}5$ (m).

A $2xy + 3z$ és $\frac{ab}{b-c}$ neve *algebrai kifejezés.*

Fedezzük fel, értsük meg!

A. Algebrai kifejezés

Az *algebrai kifejezés* olyan műveleteket tartalmaz, amelyeket ismert és ismeretlen valós számokkal végzünk, és betűkkel jelölünk. Ezeket néha *változónak* vagy *ismeretlennek* nevezzük.

Példa változókra
$a, b, \ldots, x, y, \ldots$ (ismeretlen valós számok)

Az $\mathbb{R}$ halmaz elemei és a *változók* algebrai kifejezések.
Két algebrai kifejezés összege, különbsége és szorzata szintén algebrai kifejezés. 0-val nem lehet osztani.
Algebrai kifejezést hatványozva szintén algebrai kifejezést kapunk.
Algebrai kifejezés négyzetgyöke, ha értelmezett, akkor szintén algebrai kifejezés.
Algebrai kifejezés abszolút értéke algebrai kifejezés.

Példa algebrai kifejezésre:

$6;\ \frac{2}{3};\ a;\ 5 \cdot x - 4;\ -6(x + y);$
$ab + 3x - 2;\ \sqrt{x - 2y};$
$\frac{x^2 y - 1}{a};\ \left|\frac{1}{3} \cdot x - 2y\right|.$

Egy algebrai kifejezés egy, két vagy több *változót* tartalmazhat. Az olyan algebrai kifejezést, mely egyetlen x változót tartalmaz E vagy $E(x)$ szimbólummal jelöljük. Az olyan algebrai kifejezésre, mely két változót tartalmaz, x-et és y-ot, az E vagy $E(x, y)$ jelölést használjuk. Az E betű bármilyen más betűvel helyettesíthető, sőt alsó indexet is használhatunk. Hasonlóképpen megtehetjük ezt több változós algebrai kifejezések esetén is.
Megjegyzés. A gyakorlatban, amikor nem téveszthető össze, az algebrai kifejezéseket egyszerűen kifejezéseknek fogjuk hívni.

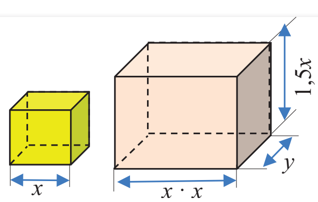
1. példa: A $-2x + 3$ algebrai kifejezést E-vel, vagy $E(x)$-szel, vagy $E_1(x)$-szel jelöljük.
Így írjuk:
$E = -2x + 3$ vagy $E(x) = -2x + 3$ vagy $E_1(x) = -2x + 3$

2. példa: Az $u^2 - 2uv + 3$ algebrai kifejezést F-fel, vagy $F_2(u,v)$-vel, vagy $F(u,v)$-vel, vagy $A(u,v)$-vel jelölhetjük.
Így írjuk:
$F = u^2 - 2uv + 3$ vagy $F_2(u,v) = u^2 - 2uv + 3$ stb.

B. Betűkkel jelölt valós számok szorzása és hatványozása

Algebrai szorzat. Redukált algebrai szorzat

1. feladat. Adott egy kocka, élének hossza x cm és egy téglatest, melynek hosszúsága a kocka élének x-szerese, magassága a kocka élének 1,5-szöröse, szélessége pedig y cm. Számítsd ki a téglatest térfogatát!



Megoldás. A téglatest térfogata ugyanabban a mértékegységben vett méreteinek (hosszúság, szélesség, magasság) szorzata. A téglatest cm-ben kifejezett méretei: hosszúság $= x \cdot x$, szélesség $= y$, magasság $= 1{,}5 \cdot x$.

A téglatest térfogata, cm³-ben kifejezve: $\mathcal{V} = (x \cdot x) \cdot y \cdot (1{,}5 \cdot x)$.

A valós számok szorzásának asszociatív tulajdonsága miatt elhagyhatjuk a zárójeleket, tehát:

$\mathcal{V} = x \cdot x \cdot y \cdot 1{,}5 \cdot x$;

Használva a szorzás kommutatív és asszociatív tulajdonságát azt kapjuk, hogy: $\mathcal{V} = 1{,}5 \cdot (x \cdot x \cdot x) \cdot y$, tehát $\mathcal{V} = 1{,}5x^3y$.

Azt a szorzatot, melyben a tényezők számok vagy betűk (betűkkel jelölt valós számok) ***algebrai szorzatnak*** *nevezzük.*

Példa: $x \cdot x \cdot y \cdot 1{,}5 \cdot x$

$$(-2) \cdot x \cdot y \cdot z \cdot x \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x \cdot z$$

Az n nullától különböző természetes szám esetén az x szám n-dik hatványa *algebrai szorzat*, azaz $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$, melyben n darab tényező van és jele x^n.

Az x nullától különböző értékei esetén igaz, hogy $x^{-n} = (x^{-1})^n$.

Vigyázz! 0^0 nem értelmezett.

A valós számokkal végzett műveletek számítási szabályait használva az algebrai szorzat egyszerűsíthető. Egy algebrai szorzat redukált, ha egyik tényezője valós szám (neve *együttható*), a többi tényezője pedig különböző betűk természetes hatványa.

Elvégezni vagy *kiszámolni* egy *algebrai szorzatot* azt jelenti, hogy hozzuk *redukált alakba.*

Példa: 1). Az $x \cdot x \cdot y \cdot 1{,}5 \cdot x$ algebrai szorzat nem redukált. Elvégezve a számításokat az egyszerűbb alakja $1{,}5x^3y$ lesz. Tehát: $x \cdot x \cdot y \cdot 1{,}5 \cdot x = 1{,}5x^3y$.

2) $(-2) \cdot x \cdot 3 \cdot y \cdot z \cdot x \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x \cdot z =$

$= 3 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3x^3y^2z^2$.

Egy algebrai szorzatban megkülönböztetjük az *együtthatót* és a *betűrészt*.

$$\text{együttható} \leftarrow \overbrace{\boxed{-4}\,\boxed{x^5y^4}}^{\text{algebrai szorzat}} \rightarrow \text{betűrész}$$

C. Azonos nevű tagok összevonása

Algebrai összeg. Egynevű tagok

Több algebrai szorzat összege vagy különbsége egy *algebrai összeg*. Eszerint, egy *algebrai összeg tagjai* algebrai szorzatok, az együtthatóikat pedig az összeget képező *tagok együtthatóinak* nevezzük.

$$\overbrace{\underbrace{-\frac{1}{2}x^5y^3}\ \underbrace{+2xy^3}\ \underbrace{-7x}\ \underbrace{+9}}^{\text{algebrai összeg}}$$

az összeg tagjai

Az összeg tagjainak együtthatói:

$-\frac{1}{2}$, 2, -7, 9

Az algebrai összeg két vagy több redukált tagját *egynevű tagnak* nevezzük, ha ugyanaz a *betűrészük*.

$2xy^3 - 7xy + 3{,}5x + 2{,}3xy - 5xy^3 + 8 - \sqrt{3}\,xy$

egynevű tagok: $2xy^3$ és $-5xy^3$

egynevű tagok: $-7xy$, $2{,}3xy$ és $-\sqrt{3}\,xy$

Egynevű tagok összevonása

A *közös tényezők kiemelésének* tulajdonságát használva azt az összeget, amely csak egynevű tagokat tartalmaz, algebrai szorzattá alakíthatjuk.

Példa:

$S_1 = 2\,xyz^2 - 3xyz^2 + 0{,}2\,xyz^2$	← 1	csak egynevű tagokat tartalmazó összeg
$S_1 = (2 - 3 + 0{,}2)\,xyz^2$	← 2	a közös tényező kiemelése
$S_1 = -\,0{,}8xyz^2$	← 3	algebrai szorzat

Azt a műveletet, melynek során a csak egynevű tagokat tartalmazó algebrai kifejezést algebrai szorzattá alakítjuk, az *egynevű tagok összevonásának* nevezzük.

Két algebrai összeg szorzatának elvégzése

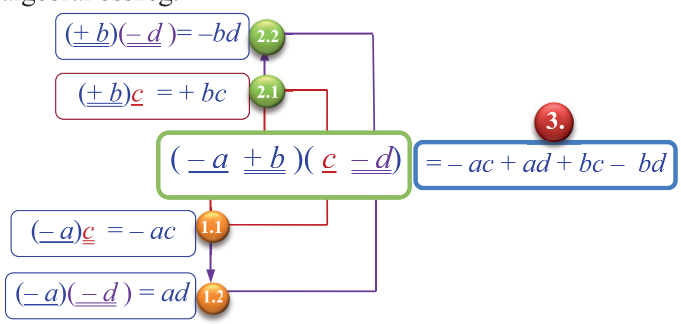
Számítsd ki: $(-a + b)(c - d)$	*A számítás lépései*
$(-a + b)\underbrace{(c - d)}_{x}$ 1	a $(c - d)$ zárójelet jelöljük x-szel
$(-a + b)\,x$ 2	alkalmazzuk a szorzás disztributív tulajdonságát az összeadásra nézve
$-ax + bx$ 3	x-et $(c + d)$-vel helyettesítjük
$-a\,(c - d) + b\,(c - d)$ 4	alkalmazzuk a szorzás disztributív tulajdonságát az összeadásra/kivonásra nézve
$-(ac - ad) + bc - bd$ 5 $(-a + b)(c - d) = -ac + ad + bc - bd$	befejezés

Megjegyzések: **1.** Két algebrai összeg szorzata szintén algebrai összeg.

2. Két algebrai összeg szorzatának elvégzése azt jelenti, hogy a szorzás eredményét redukált algebrai összeggé alakítjuk.

3. A redukált algebrai összeg nem tartalmaz egynevű tagokat.

4. A mellékelt ábra az S_1 és S_2 szorzásának folyamatát mutatja be, ahol $S_1 = -a + b$ és $S_2 = c - d$. Ebből a számításból látható bármely két algebrai összeg szorzásának számítási szabálya:



Szabály		*Példa: Számítsd ki a* $(-2x - 3)(4 - 3x)$ *szorzatot!*
Összeszorozzuk az első összeg minden tagját a második összeg minden tagjával.	⇒	$(-2x)\cdot 4$ $\quad(-2x)\cdot(-3x)$ $\quad(-3)\cdot 4$ $\quad(-3)(-3x)$
Összeadjuk a kapott algebrai szorzatokat.	⇒	$(-2x)\cdot 4 + (-2x)\cdot(-3x) + (-3)\cdot 4 + (-3)(-3x)$
Egyszerűsítjük az összeg tagjait, és aláhúzzuk az egynevű tagokat.	⇒	$-\underline{8x} + 6x^2 - 12 + \underline{9x}$
Összevonjuk az egynevű tagokat.	⇒	$x + 6x^2 - 12$
Leírjuk az eredményt:		$(-2x - 3)(4 - 3x) = 6x^2 + x - 12$

Megjegyzés
A betűkkel jelölt valós számokkal végzett számítás eredménye *algebrai kifejezés*.
Sajátos esetben az algebrai szorzatok és összegek algebrai kifejezések.

Alkalmazás

Kiszámítjuk:	A használt tulajdonság/számítási szabály
1. $(-3x^2y)^3 = (-3)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = -27x^6y^3$	• hatványozás • előjelszabály
2. $\dfrac{-27x^6y^3}{3x^2y^4z} = -\dfrac{27}{3} \cdot \dfrac{x^6}{x^2} \cdot \dfrac{y^3}{y^4} \cdot \dfrac{1}{z} = = -9\,x^4\,y^{-1}z^{-1}$	• törtek szorzása • hatványokkal végzett műveletek
3. $(-x^2y + 5xy + 7x) - (3xy + x^2y - 3x - 2z) =$ $= -x^2y + 5xy + 7x - 3xy - x^2y + 3x + 2z =$ $= (-1-1)\,x^2y + (5-3)\,xy + (7+3)\,x + 2z =$ $= -2x^2y + 2xy + 10x + 2z$	• az összeadás asszociatív tulajdonsága, figyelembe véve, hogy a zárójel előtti mínusz előjel nem más, mint a zárójelben levő összegnek –1-gyel való szorzása, valamint használjuk a szorzásnak disztributív tulajdonságát az összeadásra nézve. • egynevű tagok összevonása.
4. $x(2x - y) = x \cdot 2x + x \cdot (-y) = 2x^2 - xy$	• A szorzás disztributív tulajdonsága az összeadásra nézve: $a(b + c) = ab + ac$
5. $-2x(x - 3y + 1) = -2x \cdot x - 2x \cdot (-3y) - 2x \cdot 1 =$ $= -2x^2 + 6xy - 2x$	• A szorzás disztributív tulajdonsága az összeadásra nézve: $a(b + c + d) = ab + ac + ad$

MINITESZT Válaszd ki az egyetlen helyes megoldás betűjelét az alábbi feladatokban:

1. A $4x^2 + [x \cdot (x + 6) - (5x^2 + 2x)]$ számítás eredménye:			
A. $2x$	B. $-4x$	C. $4x$	D. $6x$
2. Ha $A = 3x - y$ és $B = 2x + 5y$, akkor a $2x \cdot A + y \cdot B$ számítás eredménye:			
A. $x^2 + 5y^2$	B. $6x^2 + y^2$	C. $x^2 + y^2$	D. $6x^2 + 5y^2$
3. Egy téglalap kerülete $4a + 2b$, ahol $a > 0$, $b > 0$, az egyik oldalának hossza pedig $2a$ cm. A téglalap területe:			
A. $a \cdot b$ cm²	B. $-2 \cdot a \cdot b$ cm²	C. $2 \cdot a \cdot b$ cm²	D. $a^2 \cdot b^2$ cm²

Gyakorlatok és feladatok

1. Egyszerűsítsd az algebrai szorzatokat!

a) $3a \cdot 6 \cdot (-2ab)$ **b)** $-3 \cdot 2x \cdot (-x)$

c) $\dfrac{1}{3}a \cdot \dfrac{2}{5}b \cdot \left(-\dfrac{21}{4}a\right)$ **d)** $-\dfrac{1}{2}x^2a \cdot (-6x^2a^2)$

2. Adott az

$$S_1 = 3xyz^2 - \frac{1}{2}xyz^2 + 0{,}2xyz^2 \text{ és}$$

$$S_2 = -3ax + \frac{1}{2}ax - \frac{5}{2}ax + 7ax \text{ összeg.}$$

A közös tényező kiemelésével alakítsd algebrai szorzattá az összegeket!

3. Másold le a füzetbe az

$S_1 = 3x^2 - 7x - x^3 - 5x^2 + 9x + 15$ összeget!

a) Húzd alá egy vagy két vonallal az összeg tagjait úgy, hogy az egy vonallal aláhúzott tagok egynevűek, és a két vonallal aláhúzott tagok szintén egynevűek legyenek.

b) Végezd el az a) alpontbeli követelményeket az $S_2 = -2ab^2 + 3cd - 7ab^2 + \sqrt{3}\,cd - ab^2$ összeg esetén!

4. Vond össze az egynevű tagokat!

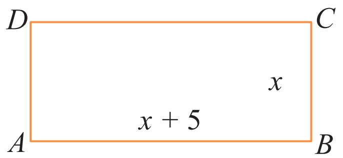
a) $3x - x + 5x - 7x$;

b) $x - 2 - 3x + 5$;

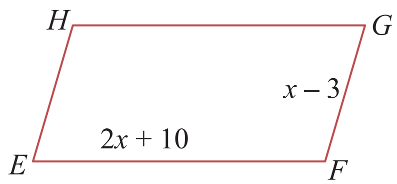
c) $0,2 - 0,3x + 0,5 - 0,7x$.

5. Számítsd ki x függvényében a következő mértani alakzatok kerületét:

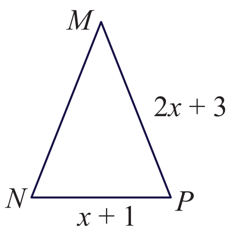
ABCD téglalap



EFGH paralelogramma és $x > 3$



$MNP\Delta$ egyenlő szárú, $x > 0$



6. Vond össze az egynevű tagokat!

a) $5x + (-4x + 2y) - (5x - 7y) - (9y + 3x)$;

b) $y^2 - 2y + 3 - (3y - 1 + y^2) + (1 + 5y)$;

c) $-\sqrt{2}\, x^2y + 2xy^2 + 3\sqrt{2}\, x^2y - 2xy^2$;

d) $(0,1x + 0,7x^2 - 0,3) + (0,3x^2 + 0,9x + 1,3)$;

e) $(3\sqrt{2}\, x - 2\sqrt{3}\, y + \sqrt{6}\,) - (\sqrt{18}\, x - \sqrt{12}\, y)$.

7. Végezd el a szorzásokat!

a) $2ab^2 \cdot (-3a^2b)$; **b)** $-5x^2 \cdot \frac{1}{2}xy^2 \cdot (-x)$;

c) $\sqrt{2a} \cdot \frac{1}{2}a^2b \cdot \sqrt{8b}$; **d)** $x(x - 2)$;

e) $x(-x + y - 1)$; **f)** $-4xy(3x - 2y)$.

8. Adott az $A = -x + y^2 - 2$ és $B = 3 + y^2 - 2x$.

a) Írd az $A + B$ összeget redukált alakba!

b) Hozd a $3A - B$ kifejezést a lehető legegyszerűbb alakba!

c) Számítsd ki az A és B számot $x = -1$ és $y = 2$ esetén.

9. Végezd el az osztásokat!

a) $(2x^2 + 3x) : x$;

b) $(x^2y - xy^2 + x^2y^2) : xy$;

c) $(2x^3y - x^2y^2 + 4x^2y) : 2xy$.

10. Legyen x természetes szám és $A = 3x - 1$, $B = -x$.

a) Mutasd ki, hogy $A + B$ páratlan természetes szám, bármely x nullától különböző szám esetén.

b) Írd a $-2A + 5B$ algebrai kifejezést redukált alakba!

c) Mutasd ki, hogy $A + 3B$ egész szám!

11. Végezd el a szorzásokat és vond össze az egynevű tagokat!

a) $(x + 1)(2x - 1)$;

b) $(x - 2)(-2x + 3)$;

c) $(0,5x - 1)(10x + 2)$;

d) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$;

e) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$.

12. Ha a, b, c valós számok, $c \neq 0$, akkor ellenőrizzük az $(a + b) : c = a : c + b : c$ és $(a - b) : c = a : c - b : c$ egyenlőséget *az*

1) $a = 25$, $b = 30$, $c = -5$.

2) $a = 6x$, $b = 9x$, $c = -3x$ esetén.

13. Végezd el a hatványozásokat!

a) $(-a^2b)^3$;

b) $\left(\frac{1}{3}xy^2z^3\right)^2$;

c) $\left(\sqrt{2}ab^2c\right)^3$.

14. Ha $A = -3x^2y$, $B = \frac{1}{3}xy^2$, $C = xy$, akkor végezd el a számításokat, és hozd az eredményt redukált alakba:

a) $A \cdot B \cdot C$ **b)** $A \cdot B : C$ **c)** $A^2 \cdot B : C^1$

15. Adott az $A = -\sqrt{2}xyz^2$, $B = \sqrt{6}x^2yz$ és $C = \sqrt{3}\, xy^2z$ kifejezés. Számítsd ki:

a) $A \cdot B \cdot C$;

b) $A \cdot C : B$;

c) $(A \cdot B^2) : (\sqrt{3} \cdot C)$.

16. Végezd el a számításokat és hozd a lehető legegyszerűbb alakba:

a) $x(-2x + 1) + 3x(x - 2)$;

b) $(2x + 3)(x - 1) + (3x - 2)(-x + 5)$;

c) $(-5x + 2)(3x - 1) + (15x + 7)(x - 3)$;

d) $(x - 1)(-5x + 3) + 5x(x - 1)$;

e) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x^3 + 8$;

f) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) + 1 - 8x^3$.

2. Rövidített számítási képletek

1.*l.* Binom négyzete. Két tag összegének és különbségének szorzata

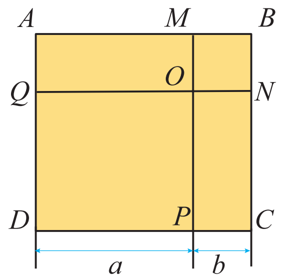
1. feladat. A mellékelt ábrán látható $ABCD$ négyzet az $MONB$ és $OQDP$

ET négyzetekből és az $ONCP$ és $AMOQ$ téglalapokból áll. Az a és b hosszúságok ugyanabban a mértékegységben kifejezett számok.

a) Számítsd ki az $OQDP$ és $MONB$ négyzet területét!

b) Számítsd ki az $ONCP$ és $AMOQ$ téglalap területét!

c) Számítsd ki kétféleképpen az $ABCD$ négyzet területét, és következtess az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, összefüggésre, ahol a és b tetszőleges pozitív valós szám.



Megoldás. **a)** $\mathcal{T}_{(OQDP)} = a^2$; $\mathcal{T}_{(MONB)} = b^2$.

b) $\mathcal{T}_{(ONCP)} = a \cdot b$; $\mathcal{T}_{(AMOQ)} = a \cdot b$.

c) Észrevesszük, hogy $\mathcal{T}_{(ABCD)} = \mathcal{T}_{(OQDP)} + \mathcal{T}_{(MONB)} + \mathcal{T}_{(ONCP)} + \mathcal{T}_{(AMOQ)}$. De $\mathcal{T}_{(ABCD)} = (a + b)^2$ felhasználva az előző eredményeket az $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ egyenlőséget kapjuk, ahol a és b tetszőleges pozitív valós szám.

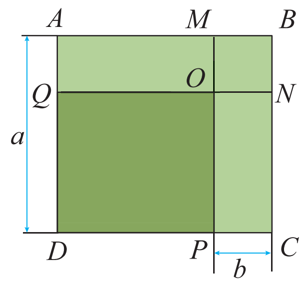
Következtetés. Két pozitív tag *összegének négyzete* megegyezik a *két tag négyzetének és szorzatuk kétszeresének összegével.*

2. feladat. A mellékelt ábrán az $ABCD$, $MONB$ és $OQDP$ négyzet, valamint az

ET $ABNQ$ és $MBCP$ téglalap látható. Az a és b hosszúságok ugyanabban a mértékegységben kifejezett számok.

a) Számítsd ki az $OQDP$, $MBCP$, $ABNQ$ és $MONB$ négyszögek területét!

b) Számítsd ki kétféleképpen az $OQDP$ területét, majd következtess az $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ összefüggésre, ahol a és b tetszőleges pozitív valós szám.



Megoldás. **a)** $\mathcal{T}_{(OQDP)} = (a - b)^2$; $\mathcal{T}_{(MBCP)} = ab$; $\mathcal{T}_{(ABNQ)} = ab$; $\mathcal{T}_{(MONB)} = b^2$.

b) Észrevesszük, hogy $\mathcal{T}_{(OQDP)} = \mathcal{T}_{(ABCD)} - \mathcal{T}_{(MBCP)} - \mathcal{T}_{(ABNQ)} + \mathcal{T}_{(MONB)}$.

Mivel $\mathcal{T}_{(ABCD)} = a^2$, felhasználva az előző eredményeket az $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ egyenlőséget kapjuk, ahol az a és b pozitív valós szám.

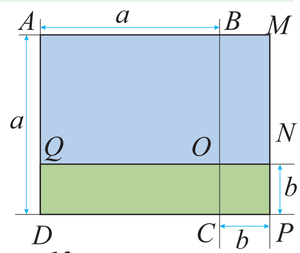
Következtetés. A két pozitív tag *különbségének négyzete* megegyezik a *két tag négyzetének összege és szorzatuk kétszeresének különbségével.*

3. feladat A mellékelt ábrán az $ABCD$ és $ONPC$ négyzet, valamint az $ONMB$

ET és $OCDQ$ téglalap látható. Az a és b hosszúságok ugyanabban a mértékegységben kifejezett számok.

a) Számítsd ki az $AMNQ$, $ABCD$, $BMPC$, $OCDQ$ és $ONPC$ négyszögek területét!

b) Számítsd ki kétféleképpen az $AMNQ$ négyszög területét, majd következtess az $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ összefüggésre, ahol a és b tetszőleges pozitív valós szám, $a > b$.



Megoldás. **a)** $\mathcal{T}_{(AMNQ)} = (a + b)(a - b)$; $\mathcal{T}_{(ABCD)} = a^2$; $\mathcal{T}_{(MBCP)} = ab$; $\mathcal{T}_{(OCDQ)} = ab$; $\mathcal{T}_{(ONPC)} = b^2$.

b) Észrevehetjük, hogy $\mathcal{T}_{(AMNQ)} = \mathcal{T}_{(ABCD)} + \mathcal{T}_{(BMPC)} - \mathcal{T}_{(OCDQ)} - \mathcal{T}_{(ONPC)} = a^2 + ab - ab - b^2$.

Mivel $\mathcal{T}_{(AMNQ)} = (a + b)(a - b)$, felhasználva az előző eredményeket az $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ egyenlőséget kapjuk, ahol az a és b pozitív valós szám, $a > b$.

Következtetés: Két tag *összegének és különbségének szorzata* megegyezik a tagok *négyzetének különbségével.*

Fedezzük fel, értsük meg!

Mivel a szakaszok hossza pozitív szám, az egyenlőségeket csak arra az esetre indokoltuk, amikor az *a* és *b* számok nagyobbak, mint 0.
Algebrai számítással bizonyítjuk be a három egyenlőséget bármely két valós számra.

4. feladat Kifejtve a baloldali algebrai kifejezést bizonyítsd

ET az alábbi három egyenlőséget bármely *a és b valós szám esetén*!

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Megoldás:
a) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
b) $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c) $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Megjegyzés. A három egyenlőséget bizonyítottuk anélkül, hogy feltételeket kellett volna meghatározni az *a* és *b* változók értékeire. Az ilyen egyenlőséget *azonosságnak* vagy *képletnek* nevezzük. A felsorolt egyenlőségeket *rövidített számítási képlet*eknek nevezzük. Gyakran használják algebrai számítások elvégzésére.

Következtetés. Bármely *a* és *b* valós szám esetén igazak az alábbi *rövidített számítási képletek:*

1. Két tag *összegének négyzete*
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Két tag *különbségének négyzete*
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Két tag *összegének és különbségének szorzata*
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Példa:
1) $(\underline{a}\ \underline{-b})^2 = \underline{a}^2 + (\underline{-b})^2 + 2 \cdot a \cdot (\underline{-b}) = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$.

2) $(\underline{-2x}\ \underline{+3})^2 = (\underline{-2x})^2 + \underline{3}^2 + 2 \cdot (\underline{-2x}) \cdot \underline{3} = 4x^2 + 9 - 12x = 4x^2 - 12x + 9$

Alkalmazás

1 Fejtsd ki az $E_1 = (-2x^2y + xy^2)^2$ és $E_2 = (2x^2 - 5x)(2x^2 + 5x)$ algebrai kifejezést!

$E_1 = (-2x^2y + xy^2)^2$

A megoldás lépései	Megoldás
Megjelöljük az algebrai összeg két tagját.	$E_1 = (\underline{-2x^2y} + \underline{xy^2})^2$
Alkalmazzuk a két tag összegének négyzetére vonatkozó képletet.	$E_1 = (\underline{-2x^2y})^2 + (\underline{xy^2})^2 + 2(\underline{-2x^2y}) \cdot (\underline{xy^2})$
Elvégezzük a számításokat	$E_1 = 4x^4y^2 + x^2y^4 - 4x^3y^3$.
Befejezés	$(-2x^2y + xy^2)^2 = 4x^4y^2 + x^2y^4 - 4x^3y^3$

$E_2 = (2x^2 - 5x)(2x^2 + 5x)$

A megoldás lépései	Megoldás
Megjelöljük az összeget alkotó tagokat, melyek a különbség tagjai is.	$E_2 = (\underline{2x^2} - \underline{5x})(\underline{2x^2} + \underline{5x})$
Alkalmazzuk a két tag összege és különbsége szorzatára vonatkozó képletet.	$E_2 = (\underline{2x^2})^2 - (\underline{5x})^2$
Elvégezzük a számításokat	$E_2 = 4x^4 - 25x^2$
Befejezés	$(2x^2 - 5x)(2x^2 + 5x) = 4x^4 - 25x^2$

2 Alkalmazzuk a rövidített számítási képleteket: **a)** 61^2; **b)** 59^2; **c)** $61 \cdot 59$.

Megoldás.
a) $61^2 = (60 + 1)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3600 + 120 + 1 = 3721$
b) $59^2 = (60 - 1)^2 = 60^2 - 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3600 - 120 + 1 = 3481$
c) $61 \cdot 59 = (60 + 1)(60 - 1) = 60^2 - 1^2 = 3600 - 1 = 3599$

Gyakorlatok és feladatok

1. Adottak a $2x + 3y$; $\sqrt{2}\cdot t-2\sqrt{2}$; $-2xy + 4z$; $-4u - 0{,}5v$ algebrai összegek. Mindegyik esetén
a) húzd alá egy vonallal az első és két vonallal a második tagot!
b) fejtsd ki az összeg négyzetét, majd írd redukált alakba a kapott kifejezést!

2. Fejtsd ki a következő algebrai kifejezéseket:
a) $(3x + 1)^2$; **b)** $(2a + 3b)^2$;
c) $(5a - 2b)^2$; **d)** $(-4u + 3v)^2$;
e) $(-4xy - 3z)^2$; **f)** $(4xy + 3z)^2$.

3. Számítsd ki a rövidített számítási képletek segítségével:
a) 101^2; 102^2; 105^2;
b) 99^2; 199^2; 57^2;
c) $1{,}1^2$; $0{,}9^2$; 1001^2.

4. Másold le a táblázatot, majd egészítsd ki a megoldási lépésekkel, illetve a megoldással!

A $(-ax + by)^2$ kifejezés kifejtése	
A megoldás lépései	*Megoldás*
…	…

A $(ax - by)^2$ kifejezés kifejtése	
A megoldás lépései	*Megoldás*
…	…

5. Az algebrai összeg négyzetére vonatkozó rövidített számítási képlettel számítsd ki!
a) $(x^2 + 2y)^2$; **b)** $(4x - 3y)^2$;
c) $(\sqrt{2}x+\sqrt{3})^2$; **d)** $(x-\sqrt{5}y)^2$.
e) $\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2$; **f)** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

6. A két tag összege és különbsége szorzatára vonatkozó rövidített számítási képlettel számítsd ki!
a) $(3x + y)(3x - y)$; **b)** $\left(5x-\frac{1}{2}\right)\left(5x+\frac{1}{2}\right)$;
c) $\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)$.

7. Számítsd ki a megfelelő rövidített számítási képlettel!
a) $101\cdot 99$; **b)** $102 \cdot 98$;
c) $299 \cdot 301$; **d)** $805 \cdot 795$; **e)** $4{,}1 \cdot 3{,}9$.

8. Számítsd ki a megfelelő rövidített számítási képlettel!
a) $(7a + 5)^2$; $(3b - 5c)^2$; $(2u + v)(2u - v)$;
b) $\left(\frac{1}{2}a+3\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}x-3y\right)^2$;
$\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b\right)$;
c) $(\sqrt{5}\,a + 3)^2$; $(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y)^2$;
$(\sqrt{2}\,p+\sqrt{5}\,q)(\sqrt{2}\,p-\sqrt{5}\,q)$.

9. A rövidített számítási képletek segítségével végezd el!
a) $(x + 2y)^2 + (x - 2y)(x + 2y)$;
b) $(3x - y)^2 - (3x + 5)(3x - 5)$;
c) $(1 - 5y)^2 + (1 + 5y)^2 - 25y^2 - 2$;
d) $(2 + x)^2 + (1 + x)^2 - (3 + x)^2$.

10. Adott az alábbi algebrai kifejezés:
$E(x) = (2x - 3)^2 + 2(2x - 3)(2x + 3) + (2x + 3)^2$.
a) Mutasd ki, hogy az $E(x)$ egy algebrai kifejezés négyzete, bármely x valós szám esetén!
b) Mutasd ki, hogy az $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ szám esetén
$n = (2x - 3)^2 + 2(2x - 3)(2x + 3) + (2x + 3)^2$
természetes szám!

11. Végezd el a számításokat, és vond össze az egynevű tagokat!
a) $3x(x + 1)^2 - (2x - 3)(2x + 3)^2 + x^2(5x + 6)$;
b) $-2x(x^2 - x + 1) - 2x(x + 1) + (x + 1)^2 + {}$
$+ 2x(x^2 + 1)$;
c) $11x(2x - 3) - (25x^2) : (-5x) + (2x + y)^2 -{}$
$- 4x(x + y) - 2x(11x - 14)$.

12. Számítsd ki a két tag összege és különbsége szorzatára vonatkozó rövidített számítási képlettel!
a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$;
b) $(2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9)$;
c) $(\sqrt{2}\,x + 5)(\sqrt{2}\,x - 5)(2x^2 + 25)$.

13. **a)** Adott $k \in \mathbb{R}$. Számítsd ki $(4 \cdot k)^2$, $(4 \cdot k + 1)^2$, $(4 \cdot k + 2)^2$, $(4 \cdot k + 3)^2$.
b) Mutasd ki, hogy egy teljes négyzet 4-gyel való osztási maradéka 0 vagy 1!
c) Bizonyítsd be, hogy az $a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 10$ szám nem teljes négyzet, bármely $a \in \mathbb{N}$ szám esetén.

2.4. A rövidített számítási képletek alkalmazása. Törtek nevezőjének gyöktelenítése (racionalizálása).

Emlékeztető

1. Ha a nullától különböző racionális szám és $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $a \cdot \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Ha az a, b, c racionális szám, $a > 0$, $c > 0$, akkor $\left(\sqrt{a}\right)^2$ és $(b\sqrt{c}) \cdot \sqrt{c}$ szintén racionális szám.
3. Ha $m \in \mathbb{Q}$ és $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $m + \sqrt{n}$, $m - \sqrt{n}$ irracionális számok.
4. Ha n és p olyan pozitív racionális szám, amelyre $\sqrt{n}$, $\sqrt{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $\sqrt{n} + \sqrt{p}$ irracionális szám. Továbbá, ha $n \neq p$, akkor $\sqrt{n} - \sqrt{p}$ szintén irracionális szám.

Megjegyzés. Két irracionális szám összege lehet racionális vagy irracionális szám is.
Két irracionális szám szorzata lehet racionális vagy irracionális szám is.

5. a) Ha $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Q}^*$, akkor a következőképpen gyöktelenítjük az $\frac{a}{\sqrt{b}}$ tört nevezőjét : $^{\sqrt{b})}\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$

$$^{\sqrt{3})}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Ha $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Q}^+$ és $c \in \mathbb{Q}^*$, akkor a következőképpen gyöktelenítjük az $\frac{a}{c\sqrt{b}}$ tört nevezőjét $^{\sqrt{b})}\frac{a}{c\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{c\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{bc}$

$$^{\sqrt{2})}\frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

Oldjuk meg figyelmesen!

Feladat. Adott az $a = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2$, $b = \left(\sqrt{2} - 3\right)^2$, $c = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$, $d = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2$,

$e = (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})$ és $f = (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})$ szám.

Határozd meg az $\{a, b, c, d, e, f\} \cap \mathbb{Q}$ és $\{a, b, c, d, e, f\} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmazokat!

Megoldás. Alkalmazzuk a rövidített számítási képleteket, és azt kapjuk, hogy:

$a = 7 + 4\sqrt{3}$, $b = 11 - 6\sqrt{2}$, $c = 5 + 2\sqrt{6}$, $d = 5 - 2\sqrt{6}$, $e = 4 - 3 = 1$, $f = 2 - 3 = -1$.

Tehát $\{a, d, c, d, e, f\} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{a, b, c, d\}$ és $\{a, d, c, d, e, f\} \cap \mathbb{Q} = \{e, f\}$

Fedezzük fel, értsük meg!

Észrevesszük, hogy:

1. Ha $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}_+$ és $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b \in \mathbb{Q}$.
2. Ha $a \in \mathbb{Q}_+$, $b \in \mathbb{Q}_+$ és $\sqrt{a}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a \neq b$, akkor $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \in \mathbb{Q}$.

A két négyzet különbségére vonatkozó rövidített számítási képlet segít megfogalmazni egy módszert egyes törtek nevezőjének gyöktelenítésére.

Alkalmazás. (a nevező gyöktelenítése)

a) Ha $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}_+$, $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor írd racionális szám alakjában az $\frac{1}{a+\sqrt{b}}$ tört nevezőjét!

Megoldás. Tudjuk, hogy $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - b$, amely egy racionális szám. Arra következtethetünk, hogy a törtet $a-\sqrt{b}$ -vel bővítve azt kapjuk, hogy ${}^{a-\sqrt{b})}\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$, ahol a nevező egy racionális szám

Megjegyzés. Hasonlóan, ${}^{a+\sqrt{b})}\frac{1}{a-\sqrt{b}} = \frac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}$, ahol $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}_+$, $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b) Ha $a \in \mathbb{Q}_+$, $b \in \mathbb{Q}_+$, $\sqrt{a}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ tört nevezőjét írd racionális szám alakjában!

Megoldás. Tudjuk, hogy $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$, amely egy racionális szám. Arra következtethetünk, hogy a törtet $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ -vel bővítve ${}^{\sqrt{a}-\sqrt{b})}\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$, ahol a nevező racionális szám.

Megjegyzés. Hasonlóan, ${}^{\sqrt{a}+\sqrt{b})}\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$, ahol $a \in \mathbb{Q}_+$, $b \in \mathbb{Q}_+$ és $\sqrt{a}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $a \neq b$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Gyöktelenítsd a törtek nevezőjét: $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$, $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$, $\frac{-9}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

2. Emeld ki a tényezőket a gyökjel alól, majd gyöktelenítsd a nevezőt!

$\frac{4}{\sqrt{12}+2}$, $\frac{6}{3-\sqrt{27}}$, $\frac{3\sqrt{12}}{\sqrt{12}-\sqrt{9}}$, $\frac{10}{\sqrt{3}-\sqrt{8}}$, $\frac{6}{\sqrt{20}+\sqrt{8}}$.

3. Számítsd ki: **a)** $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

b) $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{3-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

c) $\frac{18}{\sqrt{6}} - \frac{5}{\sqrt{6}-1} - \sqrt{24}$.

4. Gyöktelenítsd a nevezőt! $\frac{11}{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-5\sqrt{2}}$

5. Mutasd ki, hogy a $\frac{-2}{\sqrt{9}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ szám irracionális!

6. Hasonlítsd össze az $a = \left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^{-1}$ és $b = \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^{-1}$ számot!

7. Végezd el a számításokat!

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{10}+\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{25}+\sqrt{10}}$

c) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} - \frac{6}{3\sqrt{3}+5}\right) : \left(\frac{1}{3-2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

8. Számítsd ki az m és n szám számtani és mértani közepét! $m = \frac{2}{3+\sqrt{7}} - \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}$ és $n = \sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}$.

9. Adott a következő szám:

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \left[\frac{1}{3\sqrt{2}} - (2\sqrt{2})^{-1}\right] \cdot 2\sqrt{2}$$

a) Mutasd ki, hogy p racionális szám!

b) Számítsd ki: $\frac{1}{\sqrt{p+6}}$.

10. Adott $a = \left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}\right) : \left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right)^{-1}$

és $b = \left(\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right) : (\sqrt{7}-\sqrt{5}) : \frac{5}{\sqrt{5}}$.

Vizsgáld meg, hogy a $b - a$ racionális szám-e?

3. Tényezőkre bontás számítási szabályokkal

1.*l.* Tényezőkre bontás közös tényező kiemelésével

Emlékeztető

A valós számok szorzása disztributív az összeadásra nézve.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén

Példa:
1. $3 \cdot (x + 2) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3x + 6$
2. $7y \cdot (y + 3) = 7y \cdot y + 7y \cdot 3 = 7y^2 + 21y$
3. $-5ab \cdot (a - 2) = (-5ab) \cdot a + (-5ab) \cdot (-2) = -5a^2b + 10ab$

Oldjuk meg figyelmesen!

Mivel a szorzás disztributív az összeadásra nézve az $a \cdot (b + c)$ *szorzatot* leírhatjuk egy *algebrai összeg* alakjában.

Az $a \cdot (b + c)$ algebrai kifejezést az $a \cdot b + a \cdot c$ algebrai összegként írhatjuk. Így járunk el, amikor ki kell *bontani* egy szorzatot.

Példa: Bontsd ki az $x(1 + x)(2 - x)$ kifejezést!

Megoldás:
$x(1 + x)(2 - x) = (x + x^2)\,(2 - x) =$
$= 2x - x^2 + 2x^2 - x^3 = - x^3 + x^2 + 2x.$

Célunk olyan módszerek keresése, melyek segítségével egy kifejezést *tényezők szorzata*ként tudunk leírni.
Az $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ egyenlőséget ekvivalens alakba írva az $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$, egyenlőséget kapjuk. Észrevesszük, hogy:
1. az egyenlőség bal oldala egy olyan összeg, ahol az *a közös tényező* az *ab* és *ac* tagokban;
2. a jobb oldal az *a* közös tényező és a $(b + c)$ tényezők szorzata.
Az $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$, egyenlőséget tekintve azt mondhatjuk, hogy „az $a \cdot b + a \cdot c$ összeget az $a \cdot (b + c)$, szorzattá alakítottuk *kiemelve közös tényezőnek* az *a* számot” vagy, hogy „az $a \cdot b + a \cdot c$ összeget felbontottuk tényezők szorzatára a *közös tényező kiemelésének módszerével*”.
Általában egy összeg szorzattá alakítását az adott összeg *tényezőkre bontásának* nevezünk.
A fentiekben kibontott kifejezéseket a következőképpen is tekinthetjük:

Kifejezés	***Tényezők szorzatára bontva***
$a \cdot b + a \cdot c$	$a \cdot (b + c)$
$3x + 6 = 3 \cdot x + 3 \cdot 2$	$3 \cdot (x + 2)$
$7y^2 + 21y = 7y \cdot y + 7y \cdot 3$	$7y \cdot (y + 3)$
$-5a^2b + 10ab = -5ab \cdot a + (-5ab) \cdot (-2)$	$-5ab \cdot (a - 2)$
$-x^3 + x^2 + 2x$	$x(1 + x)(2 - x)$

Megjegyzés.

1. Ha S egy algebrai összeg, akkor $S = \frac{1}{a} \cdot (aS)$, formában írható, ahol *a* tetszőleges nullától különböző valós szám. Következésképpen kiemelve közös tényezőnek egy *nullától* különböző tetszőleges valós számot bármely algebrai összeg leírható két tényező szorzataként, ahol az *a* szám nem feltétlenül volt közös tényező.
2. Ha egy összeg *tényezőkre bontásáról* beszélünk, akkor csak azt az esetet figyeljük, amikor az a közös tényező a felbontandó összeg minden tagjában.

Fedezzük fel, értsük meg

Nem egyszerű mindig felbontani egy algebrai összeget tényezők szorzatára. Nem létezik egy egységes *felbontási módszer* bármely algebrai összegre, és nem mindegyik algebrai összeg bontható fel tényezők szorzatára.
Példákon keresztül szemléltetünk néhány *felbontási módszert*.

Alkalmazás. Bontsd tényezőkre: **a)** $12x^2 - 28x$; **b)** $(2x + 3)(x - 2) - (2x + 3)(-2x + 1)$.

a) $12x^2 - 28x$	Kiindulás
$= \underline{4x} \cdot 3x - \underline{4x} \cdot 7$	Megjelöljük a $4x$ kifejezést közös tényezőként.
$= \underline{4x}(3x - 7)$	Kiemeljük a $4x$ kifejezést közös tényezőnek.

b) $(2x + 3)(x - 2) - (2x + 3)(-2x + 1)$	Kiindulás
$= \underline{(2x + 3)}(x - 2) - \underline{(2x + 3)}(-2x + 1)$	Megjelöljük a $(2x + 3)$ kifejezést közös tényezőként.
$= (2x + 3)[(x - 2) - (-2x + 1)]$	Kiemeljük közös tényezőnek a $(2x + 3)$ kifejezést.
$= (2x + 3)(x - 2 + 2x - 1)$	Összevonjuk az egynevű tagokat.
$= (2x + 3)(3x - 3)$	Megjelöljük közös tényezőnek a második zárójelben levő 3 számot.
$= (2x + 3) \cdot 3 \cdot (x - 1)$	Kiemeljük közös tényezőnek a 3-t.

Gyakorlatok és feladatok

1. Bontsd fel használva a közös tényező kiemelésének módszerét!
a) $6x + 6y$; **b)** $-8x - 8z$;
c) $3n - 30m$; **d)** $a^3 + 5a$;
e) $9ab + 6a^2$; **f)** $-5abc + 25bc$;
g) $4u^2 - 3uv + 6u$; **h)** $8x^3 - 6x^2 + 2x$.

2. Bontsd tényezők szorzatára:
a) $am + bm$; **b)** $5nmp + 10mp$;
c) $p^2 - pq$; **d)** $\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}$;
e) $\sqrt{2}\, a^2 + a$; **f)** $3ab - 9bcd$;
g) $11x^3 - 22ax$; **h)** $4d^2 - \sqrt{3}\, d$.

3. Bontsd tényezők szorzatára!
a) $x - x^2$; **b)** $\frac{3}{2}xy - \frac{9}{2}y$;
c) $-\sqrt{6}uv + \sqrt{3}v$; **d)** $0,(3)t - 0,(6)\, t^2$.

4. Határozd meg a hiányzó tagot úgy, hogy a következő kijelentések igazak legyenek:
a) $7x - 7y + \ldots = 7 \cdot (x - y + 3)$;
b) $6x - 12xy + 18xyz = 6x \cdot (1 - 2y + \ldots)$;
c) $x^3 + x^2 + \ldots = x(\ldots + \ldots + 1)$.

5. Írd fel szorzatként a következő kifejezéseket!
a) $x(x + 4) + 3(x + 4)$;
b) $2x(x + \sqrt{3}) - 5(x + \sqrt{3})$;
c) $(x + 6)(x - 3) + (x + 6)(x + 5)$.

6. Adott az $E(x) = (x - 1)(x + 2) + (x - 1)(2x + 5)$; és $F(x) = (x - 11)(x - 2) - (11 - x)$ kifejezés, ahol $x \in \mathbb{R}$
a) Mutasd ki, hogy $a - x = -(x - a)$.
b) Bontsd tényezők szorzatára az $E(x)$, $F(x)$ és $E(x) + F(x)$ kifejezést!
c) Mutasd ki, hogy bármely $n \in \mathbb{Z}$ szám esetén az $E(n) + F(n)$ szám egy egész szám négyzete!

7. Bontsd tényezők szorzatára!
$E(x) = 3x(x - 3) - (x - 3)(2x - 1)$;
$F(a) = (a + 1)^2 - 3a(a + 1)$;
$G(x) = (x + 2)(x + 1) - (x + 2)(2x - 1)$;
$H(x) = (x + 1)^2 - x(x + 1)$.

8. Számold ki, a közös tényező kiemelésének módszerével!

a) $2009^2 + 2008 \cdot 2009 - 4018 \cdot 2009$;
b) $1957 \cdot 1959 - 1958 \cdot 1957$;
c) $2009 \cdot 2010 + 2009 \cdot 2008 - 2009 \cdot 4018$;
d) $2009^2 + 2009 \cdot 2008 - 2009 \cdot 4017$.

9. **a)** Ha $a + b + c = 15$ és $d = 2$ akkor számítsd ki: $ad + bd + cd$.
b) Ha $ab = ac = -3$ akkor számítsd ki: $a(b + c)$.
c) Ha $ac = ad = bc = bd = -2$, akkor számítsd ki: $(a + b)(c + d)$ és $(a + b)(c - d)$.

10. Adott az $E(t) = (3t - 7)^2 + (4t + 9)(3t - 7)$ kifejezés.
a) Írd le a $(3t - 7)^2$ kifejezést két tényező szorzataként!
b) Bontsd fel az $E(t)$, kifejezést, használva a közös tényező kiemelésének módszerét!

11. Bontsd tényezők szorzatára!
a) $1 + \frac{3}{5}a + \frac{9}{25}a^2 + \frac{27}{125}a^3$;
b) $(3x + 1)^2 - (3x + 1)(3x + 2) - 6x(3x + 1)$.
c) $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 2abc$

2.*l*. Tényezőkre bontás rövidített számítási képletekkel

Emlékeztető

Az előző leckékben bebizonyítottuk, hogy bármely két valós szám esetén egy binom (két tag algebrai összege) négyzetét, illetve két tag összegének és különbségének szorzatát kibonthatjuk az alábbi képletek valamelyikével:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, illetve $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

A fenti képleteket így is olvashatjuk:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2, \qquad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Így olyan képleteket kaptunk, amelyek segítségével az $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ és $a^2 - b^2$ kifejezéseket szorzattá alakíthatjuk, vagyis ezek a képletek a kifejezések *tényezőkre bontását* szolgálják.

Binom négyzetének kibontása
$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

Tényezőkre bontás
$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$
$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$

Megjegyzés. Igazak az $a^2 + b^2 - 2ab = (-a)^2 + b^2 + 2(-a)\,b = b^2 + (-a)^2 + 2(-b)a$ egyenlőségek. Felhasználva az első képletet azt kapjuk, hogy $a^2 + b^2 - 2ab = (-a + b)^2 = (a - b)^2$.

Két tag összege és különbsége szorzatának kibontása
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Két négyzet különbségének tényezőkre bontása
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Adott az $A = a^2 + 2ax + x^2$, $B = x^2 + 2x + 1$, $C = 4 - 12y + 9y^2$, $D = 4 - x^2$, és $E = 4x^2 - 9$ Feladatunk ezek tényezőkre bontása *rövidített számítási képleteket alkalmazva*. Megvizsgáljuk mindegyik kifejezést, kiválasztjuk a használandó rövidített számítási képletet, valamint megnevezzük a képletet alkotó tagokat.

Kifejezés	A tagok kiválasztása, a képlet meghatározása	Tényezőkre bontás	A használt képlet
$A = a^2 + 2ax + x^2$	$A = a^2 + 2ax + x^2$	$A = (a + x)^2$	$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$
$B = x^2 + 2x + 1$	$B = x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2$	$B = (x + 1)^2$	
$C = 4 - 12y + 9y^2$	$C = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot (3y) + (3y)^2$	$C = (2 - 3y)^2$ vagy $C = (3y - 2)^2$	$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$
$D = 4 - x^2$	$D = 2^2 - x^2$	$D = (2 + x)(2 - x)$	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$E = 4x^2 - 9$	$E = (2x)^2 - 3^2$	$E = (2x + 3)(2x - 3)$	

Alkalmazás

A. Tényezőkre bontás egy binom négyzetére vonatkozó képlet segítségével

1. feladat. Bontsd tényezőkre a $9-3xy+\frac{1}{4}x^2y^2$ kifejezést.

Megoldás:

$9=3^2=(-3)^2$. Tehát az *egyik tag* 3 vagy −3

$\frac{1}{4}x^2y^2=\left(\frac{1}{2}xy\right)^2=\left(-\frac{1}{2}xy\right)^2$, vagyis a másik tag $-\frac{1}{2}xy$ vagy $\frac{1}{2}xy$

$-3xy$ leírható a $-3xy=2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}xy\right)$ vagy $-3xy=2\cdot(-3)\cdot\left(\frac{1}{2}xy\right)$ alakba

A következő esetek lehetségesek:

a) $9-3xy+\frac{1}{4}x^2y^2=3^2+\left(-\frac{1}{2}xy\right)^2+2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}xy\right)=\left(3-\frac{1}{2}xy\right)^2$

b) $9-3xy+\frac{1}{4}x^2y^2=(-3)^2+\left(\frac{1}{2}xy\right)^2+2\cdot(-3)\cdot\left(\frac{1}{2}xy\right)=\left(-3+\frac{1}{2}xy\right)^2$

A megoldás lépései:

1. Meghatározzuk a kifejezés két olyan tagját, amely valamely algebrai kifejezés négyzete.

2. Ellenőrizzük, hogy a kifejezés három tagja közül az egyik felírható-e a másik két tag szorzatának kétszereseként.

3. Használjuk a *képleteket*, kiemelve a kapott tagokat.

A kifejezés felbontása nem más, mint: $9-3xy+\frac{1}{4}x^2y^2=\left(3-\frac{1}{2}xy\right)^2$ vagy $9-3xy+\frac{1}{4}x^2y^2=\left(-3+\frac{1}{2}xy\right)^2$.

Megjegyzés:

Abban az esetben, ha az 1) és 2) kijelentés egyidejűleg nem igaz, akkor a bemutatott felbontási módszer nem alkalmazható. Általában az a) változatot használjuk, de a változatok bármelyike helyes.

B. Tényezőkre bontás két négyzet különbségére vonatkozó képlettel

2. feladat. Bontsd tényezőkre a $3x^4y^2-4z^2$.

Megoldás:

$3x^4y^2=(\sqrt{3}x^2y)^2$ és $4z^2=(2z)^2$

$3x^4y^2-4z^2=(\sqrt{3}x^2y)^2-(2z)^2$

$(\sqrt{3}x^2y)^2-(2z)^2=(\sqrt{3}x^2y+2z)(\sqrt{3}x^2y-2z)$

$3x^4y^2-4z^2=(\sqrt{3}x^2y+2z)(\sqrt{3}x^2y-2z)$.

A megoldás lépései:

1. Észrevesszük, hogy a különbség két tagja felírható algebrai kifejezések négyzeteként.

2. A kifejezést két négyzet különbségeként írjuk le.

3. Alkalmazzuk a felbontási *képletet.*

4. Leírjuk a kifejezés felbontott alakját.

3. feladat Bontsd tényezőkre: **a)** $16x^4y^2+40x^2y+25$; **b)** $4x^2-14x+12$; **c)** $25-16x^2$; **d)** x^4+4.

Megoldás:

a) $16x^4y^2+40x^2y+25$
$=(4x^2y)^2+40x^2y+(5)^2$
$=(4x^2y)^2+2\cdot(4x^2y)\cdot 5+5^2=(4x^2y+5)^2$

b) $4x^2-14x+12$
$=(2x)^2-14x+\left(\sqrt{12}\right)^2$

A megoldás lépései:

$16x^4y^2=(4x^2y)^2$, valamint $25=5^2$
$40x^2y^2=2\cdot(4x^2y)\cdot 5$

$4x^2=(2x)^2$, $12=\left(\sqrt{12}\right)^2$, $-14x$ a harmadik tag és $-14x\neq-2(2x)\cdot\sqrt{12}$.

Következtetés: A $4x^2 - 14x + 12$ kifejezés nem bontható tényezőkre a binom négyzetére vonatkozó képlettel. A következő leckében további olyan módszert ismertetünk, amely segít a kifejezések tényezőkre bontásában (lásd a 2.*a alkalmazását*)

c) $25 - 16x^2 = 5^2 - (4x)^2 = (5 - 4x)(5 + 4x)$, tehát $25 - 16x^2 = (5 - 4x)(5 + 4x)$

d) $x^4 + 4$; $x^4 = (x^2)^2$ és $4 = 2^2$; $x^4 + 4 = (x^2)^2 + 2^2$. Nem tudjuk a képletet használni, mivel a kifejezés nem két négyzet különbsége. Ez négyzetek összege és ezzel a módszerrel nem bontható fel (lásd a következő lecke 2.*b alkalmazását*).

Gyakorlatok és feladatok

1. Bontsd tényezők szorzatára!

a) $x^2 + 10x + 25$; **b)** $y^2 - 6y + 9$;
c) $x^2y^2 + 4xy + 4$; **d)** $100 - 20ab + a^2b^2$;
e) $16x^2 + 8x + 1$; **f)** $81y^2 - 18y + 1$;
g) $4x^2 - 28x + 49$; **h)** $9x^2 - 12xy + 4y^2$;
i) $5x^2 + 2\sqrt{5}x + 1$; **j)** $3y^2 - \sqrt{24}\,xy + 2x^2$.

2. Másold le kiegészítve a hiányzó tagokkal úgy, hogy egy binom négyzetét kapjad!

a) $9a^2 - 6a + \ldots$; **b)** $25x^2 + 4 + \ldots$;
c) $9y^2 - 12y + \ldots$; **d)** $x^2 + 5 + \ldots$;
e) $3 - 2\sqrt{6}\,y + \ldots$; **f)** $1 - 6b + \ldots$.

3. Bontsd tényezőkre a következő kifejezéseket!

a) $(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 1$;
b) $(m + 5)^2 - 4(m + 5) + 4$;
c) $(x + 3)^2 - 2(x + 3)(x - 1) + (x - 1)^2$;
d) $9x^4y^2z^2 + 24x^2yz + 16$;
e) $4(x - 2)^2 - 12(x - 2) + 9$.

4. Bontsd tényezőkre!

a) $x^2 - 64$; **b)** $121 - y^2$;
c) $4x^2 - 25$; **d)** $9x^4y^2 - 16$;
e) $4(2x - 1)^2 - 49$; **f)** $81x^6y^2 - 4$.

5. Bontsd tényezőkre:

a) $a^2b^2 - 9$; **b)** $x^2y^2 - 1{,}21$;
c) $x^2 - 2$; **d)** $5a^2 - 3$.

6. Tényezőkre bontást használva számítsd ki!

a) $98^2 + 2 \cdot 98 \cdot 2 + 2^2$; **b)** $201^2 - 2 \cdot 201 + 1$;
c) $104^2 - 96^2$; **d)** $4^2 \cdot 19^2 - 24^2$.

7. Bontsd tényezőkre a négyzetek különbségét!

a) $y^2 - 25$; **b)** $4x^2 - 1$;
c) $25 - 4y^2$; **d)** $81x^2 - 16y^2$;
e) $1{,}69x^2 - 1{,}44$; **f)** $1 - 2{,}25x^2y^2$.

8. Írd egy összeg vagy különbség négyzeteként!

a) $a^4 + 8a^2 + 16$; **b)** $81 - 72b^2 + 16b^4$;
c) $2x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 1$; **d)** $y^2 + 2\sqrt{3}\,y + 3$.

9. Használva a rövidített számítási képleteket, írd le valós számok szorzatként!

a) $99^2 - 1^2$; **b)** $996^2 - 4^2$;
c) $199^2 - 198^2$; **d)** $74^2 - 2 \cdot 74 \cdot 49 + 49^2$;
e) $999^2 + 2 \cdot 999 \cdot 1001 + 1001^2$.

10. Bontsd tényezőkre!

a) $x^2 - x + \dfrac{1}{4}$; **b)** $7x^2 - 2\sqrt{7}x + 1$;
c) $x^2 + \dfrac{1}{9} - 0{,}(6)x$; **d)** $9x^2 - \dfrac{1}{4}$;
e) $(x + 2)^2 - 1$; **f)** $x^2 + 10xy + 25y^2$;
g) $(\sqrt{3})^2 - x^2$; **h)** $3x^2 - 2$ **i)** $2x^2 - 5$.

11. Bizonyítsd be, hogy két egymás utáni természetes szám négyzetének különbsége egy páratlan természetes szám!

3.b. További tényezőkre bontási módszerek

Az előző leckékben az algebrai kifejezések olyan tényezőkre bontási módszereivel ismerkedtünk meg, amelyekben a közös tényező kiemelését vagy a rövidített számítási képleteket használtuk. Ezután megtudtuk, hogy bizonyos helyzetekben előnyös, ha a kifejezés tagjait csoportosítjuk, hogy többször felhasználjuk a közös tényezőket. Meg fogjuk látni, hogy az algebrai kifejezések tényezőkre bontásakor gyakran ötvöződnek a különböző módszerek, előnyös alakba írhatjuk a kifejezés tagjait, átalakíthatjuk a kifejezést vagy matematikai fogásokat[1] alkalmazhatunk.

[1] *Matematikai fogások* = az az eljárás, melynek során a kifejezés tagjait úgy írjuk, hogy lehessen közös tényezőt kiemelni, eldönthessük a tagok megfelelő csoportosítását és a rövidített számítási képlet használatát.

Oldjuk meg figyelmesen!

1. feladat. ET

Írd algebrai összegként: $(x + 2)(x + 3)$.

A megoldás lépései	*Megoldás*
Kiindulás	$(x + 2)(x + 3)$
A szorzat kibontása	$= x^2 + 3x + 2x + 2 \cdot 3$
Azonos nevű tagok	$= x^2 + 3x + 2x + 6$
összevonása	$= x^2 + 5x + 6$

Következtetés: $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$.
Megjegyzés. $x^2 + 5x + 6$ az $(x + 2)(x + 3)$ algebrai kifejezés kibontása..

2. feladat. ET

Írd két összeg szorzataként! $x^2 + 5x + 6$

A megoldás lépései	*Megoldás*
Kiindulás	$x^2 + 5x + 6$
$5x = 3x + 2x$	$= x^2 + (3x + 2x) + 2 \cdot 3$
$6 = 2 \cdot 3$	$= \underline{x^2} + \underline{3x} + \underline{2x} + \underline{2} \cdot 3$
x közös tényező	$= x\,(x + 3) + 2\,(x + 3)$
2 közös tényező	$= x\,\underline{(x + 3)} + 2\,\underline{(x + 3)}$
$(x + 3)$ közös tényező	$= (x + 2)\,(x + 3)$

Következtetés: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.
Megjegyzés. $(x + 2)(x + 3)$ az $x^2 + 5x + 6$ algebrai kifejezés *tényezőkre bontott alakja*.

3. feladat ET Igazold, hogy bármely $x^2 + mx$ alakú algebrai kifejezés felírható két négyzet különbségeként.
Három lépésben leírt módszer:

1. Írhatjuk, hogy $mx = \dfrac{2mx}{2} = 2 \cdot x \cdot \dfrac{m}{2}$.
2. Megkeressük azt a tagot, amely ahhoz szükséges, hogy egy összeg négyzetét kapjuk.
   Felírjuk a kifejezést kihangsúlyozva az összeg négyzetét.
3. Az összeg négyzetét összevonva a négyzetek különbségét kapjuk:

$$\underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{m}{2} + \left(\frac{m}{2}\right)^2}_{\text{összeg négyzete}} - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$x^2 + mx = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

1. alkalmazás. Bontsd tényezőkre: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

A megoldás lépései:	*Megoldás:*
Előnyösen csoportosítjuk a tagokat	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
Alkalmazzuk a számítási képleteket és kiemeljük közös tényezőt	$= (a^2 + 2ab + b^2) + (ac + bc) + (ac + bc + c^2)$
Közös tényező	$= \underline{(a + b)}^2 + c\underline{(a + b)} + c(a + b + c)$
Közös tényező	$= (a + b)\underline{(a + b + c)} + c\underline{(a + b + c)}$
Számítási szabály	$= (a + b + c)(a + b + c) = (a + b + c)^2$

Következtetés. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$.

2. alkalmazás. Bontsd tényezőkre: **a)** $4x^2 - 14x + 12$; **b)** $x^4 + 4$; **c)** $x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}$.

A megoldás lépései:	*Megoldás:*
Matematikai fogással átírjuk kifejezést.	**a)** $4x^2 - 14x + 12$
Csoportosítjuk a tagokat.	$= 4x^2 - 8x - 6x + 12$
Mindegyik csoportban kiemeljük a közös tényezőt: $2x$-et az elsőből és a 3-at a második csoportból.	$= (4x^2 - 8x) - (6x - 12)$
Kiemeljük $(2x - 4)$-et közös tényezőként.	$= 2x(2x - 4) - 3(2x - 4)$
Az első zárójelből közös tényezőnek kiemelhetjük a 2-est.	$= (2x - 4)(2x - 3)$
	$= 2(x - 2)(2x - 3)$

Egy *matematikai fogással*
Csoportosítjuk az első három tagot.
Felírjuk a zárójelben levő kifejezést négyzetként.
Két négyzet különbségeként írjuk a kifejezést.
A négyzetek különbségének képletével bontjuk fel.
Használjuk a számítási szabályokat.

b) $x^4 + 4$
$= (x^2)^2 + 2^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 - 4x^2$
$= [(x^2)^2 + 2^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2] - 4x^2$
$= (x^2 + 2)^2 - 4x^2$
$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$
$= [(x^2 + 2) + (2x)] \cdot [(x^2 + 2) - (2x)]$
$= (x^2 + 2 + 2x) \cdot (x^2 + 2 - 2x)$

A *három lépésben* leírt módszerrel négyzetek különbségeként írható le az $x^2 - \frac{4}{3}x$ algebrai kifejezés.

c) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

$$x^2 - \frac{4}{3}x = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{2}{3} = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} =$$

$x^2 - \frac{4}{3}x$ -t $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ -vel helyettesítjük

$$= \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$$

kiszámoljuk $-\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = -\frac{4}{9} + \frac{1}{3} = -\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$$= \left(x - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$$

Tényezőkre bontjuk a négyzetek különbségét.
Elvégezzük a zárójelben levő számításokat.

3. alkalmazás.

ET **a)** Írd az $E_1 = x^2 + 10x + 26$ kifejezést négyzetek összegeként, és számold ki a kifejezés értékét, ha $x = -5$.

b) Írd az $E_2 = x^2 - 20x + 104$ kifejezést négyzetek összegeként, és számold ki a kifejezés értékét, ha $x = 10$.

c) Alkalmazva az $a^2 \geq 0$ egyenlőtlenséget bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén bizonyítsd be, hogy $x^2 + 10x + 26 \geq 1$, bármely x valós szám esetén.

d) Alkalmazva a $-a^2 \leq 0$ egyenlőtlenséget bármely $a \in \mathbb{R}$, esetén, bizonyítsd be, hogy $-x^2 + 20x - 104 \leq -4$, bármely x valós szám esetén.

a) $E_1 = x^2 + 10x + 26 = x^2 + 10x + 25 + 1$
$E_1 = (x + 5)^2 + 1^2$ és $E_1(-5) = 1$.

b) $E_2 = x^2 - 20x + 104 = x^2 - 20x + 100 + 4$
$E_2 = (x - 10)^2 + 2^2$ és $E_2(10) = 4$.

c) $(x+5)^2 \geq 0$-ból következik, hogy $(x+5)^2 + 1^2 \geq 1$ és $x^2 + 10x + 26 \geq 1$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

d) $-x^2 + 20x - 104 = -(x^2 - 20x + 104) =$
$= -[(x - 10)^2 + 2^2] = -(x - 10)^2 - 2^2$.

Mivel $-(x - 10)^2 \leq 0$, ezért $-(x - 10)^2 - 2^2 \leq -4$, tehát $-x^2 + 20x - 104 \leq -4$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Megjegyzés. Megállapítjuk, hogy:

1. $E_1(-5) = 1$ és $E_1(x) \geq 1$, bármely x valós szám esetén. Azt mondjuk, hogy az E_1 kifejezés minimális értéke 1.

2. $E_2(10) = -4$ és $E_2(x) \leq -4$, bármely x valós szám esetén. Azt mondjuk, hogy az E_2 kifejezés maximális értéke 1.

Feladat a portfólióba

a) Igazold, hogy az $x^2 - 4x + 7$ kifejezés minimális értéke 3.
b) Bizonyítsd be, hogy az $x^2 + 6x + 10$ kifejezés minimális értéke 1.
Igaz a „Ha a és b olyan pozitív szám, amelyre $E_1 \geq a$ és $E_2 \geq b$, akkor $E_1 \cdot E_2 \geq ab$", kijelentés. Bizonyítsd be, hogy $(x^2 - 4x + 7)(x^2 + 6x + 10) \geq 3$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén!

Gyakorlatok és feladatok

1. Bontsd tényezőkre!

a) $(x + y) \cdot a^2 - (x + y) \cdot b^2$;

b) $ax^2 + bx^2 - ay^2 - by^2$;

c) $49a^2 + 14a(2x + 1) + (2x + 1)^2$;

d) $(\sqrt{3} - x)^2 + 6(\sqrt{3} - x) + 9$.

2. A tagokat megfelelően csoportosítva bontsd tényezőkre!

a) $3ax^2 + 4ax^3 + 6a^2x + 8a^2x^2$;

b) $12a^2b^3 + 4a^2b + 9ab^2 + 3a$;

c) $2xy + 3x^2y - 4x^2y^2 - 6x^3y^2$;

d) $5x^2 + 2a^2x - 10ax - 4a^3$.

3. Bontsd tényezőkre!

a) $x^2 - 2x - 35$; **b)** $x^2 + 16x + 63$;

c) $x^2 - x - 2$; **d)** $y^4 + 64$;

e) $15x^2 + 7x - 2$; **f)** $3x^2 - 5x - 2$;

g) $5x^2 + 13x - 6$; **h)** $x^2 - 12x + 35$.

4. Bontsd tényezőkre!

a) $81x^4 - 16$;

b) $256x^4y^4 - 1$;

c) $x^2 + 6x + 9 - y^2$;

d) $(3x + 2)^2 - 2 \cdot (3x - 2)(3x + 2) - 12 - 18x$;

e) $(3x - 2)(2x + 1) - 3(2x + 1)^2 + 2x(2x + 1)$;

f) $4(x - 2)^2 - (x + 1)^2$;

g) $16(x + 3)^2 - 9(x + 2)^2$;

5. Adottak a következő kifejezések: $E = x^2 - 9$ és $F = (x + 3)(3x - 4) - (x + 3)(2x - 1)$.

a) Számítsd ki az E kifejezés értékét $x = 0$, majd $x = -1$ esetén!

b) Számítsd ki az F kifejezés értékét $x = 0$, majd $x = -1$ esetén!

c) Bontsd tényezőkre az E és F kifejezést, és ellenőrizd, hogy $E = F$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

6. Bontsd tényezőkre az $E = 9x^2 - 4 + (3x + 2)(x - 2)$ kifejezést!

7. Használva az $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b) \cdot x + a \cdot b$ egyenlőséget, bontsd tényezőkre:

a) $x^2 + 5x + 6$; **b)** $x^2 - 9x + 20$;

c) $x^2 + 6x - 7$; **d)** $x^2 - 12x + 20$;

e) $x^2 - 8x + 15$; **f)** $x^2 - 3x - 28$.

8. Adott egy a, b és c oldalhosszúságú háromszög. Bizonyítsd be, hogy:

a) Ha $a^4 + b^4 - c^4 = 2a^2b^2$, akkor a háromszög derékszögű.

b) Ha $a^2b - b^2a + b^2c - c^2b = a^2c - c^2a$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

c) Ha $ab + bc + ac = a^2 + b^2 + c^2$, akkor a háromszög egyenlő oldalú.

9. Mutasd ki, hogy az $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + (x^2 + 2x)(x^2 - 1)$ szám osztható 24-gyel, bármely x egész szám esetén.

10. Mutasd ki, hogy bármely a valós szám esetén igazak az alábbi relációk:

a) $a^2 + 4a + 4 \geq 0$ **b)** $a^2 - 6a \geq -9$.

11. Határozd meg a következő kifejezések minimális értékét:

a) $x^2 + 2x + 2,\ x \in \mathbb{R}$ **b)** $9x^2 - 6x - 3,\ x \in \mathbb{R}$

c) $(3x - 2)(3x + 4),\ x \in \mathbb{R}$.

12. Határozd meg a következő kifejezések maximális értékét:

a) $-x^2,\ x \in \mathbb{R}$ **b)** $-7 - 6x - x^2,\ x \in \mathbb{R}$

c) $(2x - 1)(3 - 2x),\ x \in \mathbb{R}$.

13. **a)** Bizonyítsd be, hogy $1 + x + x^2 \geq \frac{3}{4}$, bármely x valós szám esetén.

b) Tudva, hogy $x \in \mathbb{R}$, határozd meg az $(1 + x + x^2)(1 - x + x^2)$ kifejezés minimális értékét!

4.6. Gyakorlati alkalmazások

A gyakorlatban sokszor gyors számításokat kell végezzünk, néha meglehetősen nagy számokkal. A rövidített számítási képletek segítenek időt spórolni.

1. alkalmazás. Téglalap vagy négyzet alakú felület területének kiszámítása olyan méretekkel, amelyek lehetővé teszik a számítási képletek használatát.

1.1. Számítsd ki egy téglalap alakú telek területét, ha méretei:
a) $a = 1005$ m és $b = 995$ m;
b) $a = 693$ m és $b = 707$ m.

Megoldás. Ha egy téglalap alakú felület méretei a és b, akkor a felület területe $\mathcal{T} = ab$.
a) $\mathcal{T} = ab = 1005 \cdot 995 = (1000 + 5) \cdot (1000 - 5) =$
$= 1000^2 - 25 = 1\,000\,000 - 25 = 999\,975$ (m²).
b) $\mathcal{T} = ab = 693 \cdot 707 = (700 - 7) \cdot (700 + 7) =$
$= 700^2 - 49 = 490\,000 - 49 = 489\,951$ (m²).

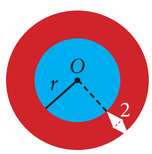
1.2. Számítsd ki egy négyzet alakú telek területét tudva, hogy:
a) a négyzet oldala $a = 51$ m;
b) a négyzet oldala $a = 48$ m.

Megoldás. Ha a négyzet alakú felület oldalhossza a, akkor a felület területe $\mathcal{T} = a^2$.
a) $\mathcal{T} = a^2 = 51^2 = (50 + 1)^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$ (m²).
b) $\mathcal{T} = a^2 = 48^2 = (50 - 2)^2 = 2500 - 200 + 4 = 2304$ (m²).

Megjegyzés. Egy kis gyakorlással az ilyen számítások fejben nagyon gyorsan elvégezhetők.

2. alkalmazás. Terület számítás rövidített számítási képletek alkalmazásával

A mellékelt képen egy régi fajáték látható. Az egymást átfedő korongok a játék egyik kerekét ábrázolják. A két korong középpontja azonos, sugaraik centiméterben vannak kifejezve.
A kék színű korong sugara r. A korongok sugarainak különbsége 2 cm. A piros rész területét egy $\mathcal{T}(\pi, r)$ algebrai kifejezéssel írhatjuk le.



a) Írd le a $\mathcal{T}(\pi, r)$ kifejezést algebrai összegként!
b) Írd le a $\mathcal{T}(\pi, r)$ kifejezést két négyzet különbségeként!
c) Az **a)** és **b)** alpont eredményei segítségével bontsd fel a $\mathcal{T}(\pi, r)$, kifejezést két módszerrel!
d) 1 cm², felület befestéséhez egy gramm festékre van szükség. Tudva, hogy $r = 5$ cm, ellenőrizd, hogy elegendő-e 75,4 g festék a piros színű rész befestéséhez! Indokold válaszod!

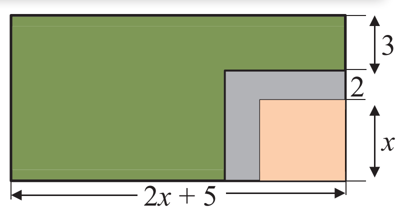
Megoldás.
a) $\mathcal{T}(\pi, r) = \pi(r + 2)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 4r + 4) - \pi r^2 =$
$= 4\pi r + 4\pi$, tehát $\mathcal{T}(\pi, r) = 4\pi r + 4\pi$.
b) $\mathcal{T}(\pi, r) = \left[\sqrt{\pi}(r+2)\right]^2 - \left(\sqrt{\pi}r\right)^2$.
c) I. Az **a)** alpont alapján alkalmazzuk a közös tényezők kiemelését: $\mathcal{T}(\pi, r) = 4\pi\,(r + 1)$.
II. Felbontjuk a **b)**-nél levő négyzetek különbségét:
$\mathcal{T}(\pi, r) = \left[\sqrt{\pi}(r+2) + \sqrt{\pi}r\right]\left[\sqrt{\pi}(r+2) - \sqrt{\pi}r\right]$,
tehát $\mathcal{T}(\pi, r) = \left(2\sqrt{\pi}r + 2\sqrt{\pi}\right) \cdot 2\sqrt{\pi}$.
Kiemeljük közös tényezőnek $\sqrt{\pi}$ -t és azt kapjuk, hogy: $\mathcal{T}(\pi, r) = 4\pi(r + 1)$.
d) $\mathcal{T}(\pi, r) = 4\pi(r + 1)$, $r = 5$ cm. A piros rész területe $\mathcal{T} = 24\pi$ cm². Befestéséhez pontosan 24 π gramm festék szükséges.

Ismert, hogy $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$
$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416 \mid \cdot 24$
$24 \cdot 3{,}1415 < 24 \cdot \pi < 3{,}1416 \cdot 24$
$75{,}3960 < 24 \cdot \pi < 75{,}3984 < 75{,}4$
$24 \cdot \pi < 75{,}4$

Következtetés: a piros rész befestéséhez elegendő 75,4 gramm festék.

3. alkalmazás. Területek meghatározása algebrai kifejezésekként, rövidített számítási képletek segítségével.

Egy téglalap alakú telken egy házat szeretnének építeni.
A mellékelt ábrán a következő információk vannak feltüntetve:
– a házat egy x oldalhosszúságú négyzet alakú területre építik;
– a szürke színű rész egy 2 m szélességű sétány;
– a zöld színű rész a házhoz tartozó kert;
– minden hosszúság méterben van kifejezve.



Jelöljük $\mathcal{T}$-vel a telek teljes területét, $\mathcal{T}_1$-gyel a sétány, $\mathcal{T}_2$-vel pedig a kert területét.

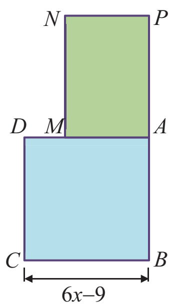
a) Számítsd ki az $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ értékeit x függvényében, és írd az $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ kifejezéseket redukált algebrai összegek alakjába.
b) Számítsd ki a $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ értékét x = 10 m esetén.
c) Mutasd ki, hogy az $\mathcal{T}_2$ kifejezés két négyzet különbsége.

Megoldás.
a) $\mathcal{T} = (2x + 5)\cdot(x + 2 + 3) = 2x^2 + 15x + 25$. Észrevesszük, hogy az a felület, amelyre a házat építenék és a sétány együtt egy olyan négyzet alakú felületet alkot, melynek oldalhossza $x + 2$
Azt kapjuk, hogy $x^2 + \mathcal{T}_1 = (x + 2)^2$, vagyis
$\mathcal{T}_1 = (x + 2)^2 - x^2 = 4x + 4$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T} - (x + 2)^2 = (2x + 5)(x + 5) - (x + 2)^2 = x^2 + 11x + 21$.
b) Ha az előző algebrai összegekben x-et 10-zel helyettesítjük, azt kapjuk, hogy: $\mathcal{T} = 375$ m²; $\mathcal{T}_1 = 44$ m²; $\mathcal{T}_2 = 331$ m².
c) $\mathcal{T}_2 = x^2 + 11x + 21$
Az $x^2 + 11x$ kifejezést leírjuk két négyzet különbségeként. $\longleftrightarrow$ $\mathcal{T}_2 = \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 + 21$

Az eredmény: $\longleftrightarrow$ $\mathcal{T}_2 = \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2$.

Gyakorlatok és feladatok

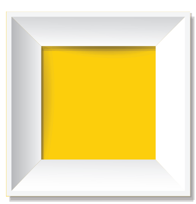
1. Egy telek két részből áll: $ABCD$ négyzet alakú és $AMNP$ téglalap alakú részből, ahol AM az AB kétharmada és $AP = AB$ (lásd a mellékelt ábrát). $\mathcal{T}_1$-gyel gyel a négyzet területét, $\mathcal{T}_2$-vel a téglalap területét és $\mathcal{T}$-vel a telek teljes területét jelöljük.



a) Bizonyítsd be, hogy $x \in [1,5; \infty)$.
b) Számítsd ki a $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ és $\mathcal{T}$ értékét! Az eredményeket írd redukált algebrai összeg alakjában!
c) Ellenőrizd a $\mathcal{T} = 15\,(2x - 3)^2$ egyenlőséget!
d) Számítsd ki a telek teljes területét, ha $x = 15$ méter.

2. Adott n egy természetes szám, $n \geq 2$.
a) Igazold, hogy: $n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$.
b) Az előző alpont alapján számítsd ki a 272 és 271 számok négyzeteinek különbségét!

3. Egy kép keretének külső élei egy 143 cm oldalhosszúságú négyzetet, a belső élek pedig egy 133 cm oldalhosszúságú négyzetet alkotnak. A megfelelő rövidített számítási képlettel számítsd ki gyorsan a képkeret területét!

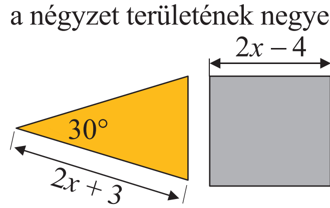


4. Az ABC derékszögű háromszög befogói $AB = x$ cm és $AC = 3$ cm, az MNP derékszögű háromszög befogói pedig MN és MP. Az MN befogó hossza az AB szakasz hosszának duplája, az NP átfogó hossza pedig x cm-rel kisebb, mint az AC befogó hossza.
a) Számítsd ki az MP befogó hosszának négyzetét!
b) Számítsd ki az MNP háromszög területének négyzetét!
c) Bizonyítsd be, hogy $x \in (0, 1)$.

5. Megfelelő rövidített számítási képletet használva számítsd ki:
a) $397 \cdot 403$; **b)** 53^2; **c)** 54^2; **d)** 56^2; **e)** 57^2.

6. **a)** Adott az $n^2 - (n + 1)(n - 1)$. algebrai kifejezés. Végezd el a számításokat és vond össze az egynevű tagokat!
b) Számológép használata és bármiféle számítás elvégzése nélkül állapítsd meg a $4{,}13^2 - 5{,}13 \cdot 3{,}13$ kifejezés értékét!

7. A mellékelt ábrán egy egyenlő szárú háromszög és egy négyzet látható. Az oldalak hossza ugyanabban a mértékegységben van megadva. Határozd az x valós számok halmazát, tudva, hogy a háromszög területe legkevesebb a négyzet területének negyedével egyenlő!



4. Algebrai törtek. Műveletek algebrai törtekkel.

1.1. Algebrai törtek. Algebrai tört értelmezési tartománya. Algebrai kifejezés számértéke.

Oldjuk meg figyelmesen

1. feladat
Tibor a könyvesboltba megy füzeteket vásárolni. Egy füzet y lejbe kerül, de a könyvesboltban megtudja, hogy minden megvásárolt füzetre 0,5 lej kedvezmény jár. Tibornak x leje van, és megállapítja, hogy éppen annyi pénze van, amennyi a füzetekre kell.

a) Fejezd ki algebrai törttel a Tibor által megvásárolható füzetek számát, ha a teljes pénzösszeget erre költötte!

b) Tibor barátja, Mihály azt mondja, hogy az eladó $\frac{2x}{2y-1}$ darab füzetet kell adjon. Ellenőrizd, hogy igaza van-e Mihálynak!

c) Ha $x = 10{,}50$ és $y = 2$, számítsd ki, hány füzetet vásárolhat Tibor a teljes pénzösszegre!

Megoldás

a) Jelöljük n-nel a Tibor által megvehető füzetek számát, p-vel egy füzet árát és c-vel a teljes költséget.
Kedvezmény előtt egy füzet ára y lej volt, kedvezmény után pedig az ára $(y – 0{,}5)$ lej, tehát $p = y – 0{,}5$.
Tibor pénzösszege x lej, tehát a teljes költség $c = x$.

Akkor, $n = \frac{c}{p}$, vagyis a megvehető füzetek száma: $n = \frac{x}{y-0{,}5}$.

b) Bővítjük az $\frac{x}{y-0{,}5}$ törtet 2-vel, azaz

$$^{2)}\frac{x}{y-0{,}5} = \frac{2\cdot x}{2\cdot(y-0{,}5)} = \frac{2x}{2y-1}$$. Mihálynak igaza volt.

c) A füzetek számát jelentő algebrai törtbe helyettesítve az x és y értékét azt kapjuk, hogy

$$n = \frac{10{,}5}{2-0{,}5} = \frac{10{,}5}{1{,}5} \overset{2)}{=} \frac{10{,}5\cdot 2}{1{,}5\cdot 2} = \frac{21}{3} = 7 \text{ (füzet)}.$$

2. feladat
Egy négyzet oldalhossza a, és egy téglalap hosszúsága b, ahol a és b ugyanabban a mértékegységben kifejezett szám.
Ha a téglalap hosszát két egységgel csökkentik, akkor az kapott új téglalap területe egyenlő lesz a négyzet területével.

a) Számítsd ki a téglalap szélességét és kerületét!

b) Oldd meg a feladatot $a = 2$ cm és $b = 4$ cm esetén!

Megoldás

a) T-vel jelöljük az új téglalap területét és szélességét h-val.
A négyzet területe a^2.
Mivel $T = (b – 2) \cdot h$, az eredmény $a^2 = (b – 2) \cdot h$, tehát $h = \frac{a^2}{b-2}$.
Az új téglalap kerülete:

$$K = 2\cdot\left[(b-2)+\frac{a^2}{b-2}\right] = 2\cdot\left[\frac{(b-2)^2}{b-2}+\frac{a^2}{b-2}\right]$$

$$= 2\cdot\frac{b^2-4b+4+a^2}{b-2} = \frac{2a^2+2b^2-8b+8}{b-2}.$$

b) $h = \frac{2^2}{4-2} = 2\,(\text{cm})$; $K = \frac{2\cdot 2^2+2\cdot 4^2-8\cdot 4+8}{4-2} = 8\,(\text{cm})$.

Megjegyzés:

1. Az előző feladatban kapott $\frac{x}{y-0{,}5}$; $\frac{2x}{2y-1}$; $\frac{a^2}{b-2}$; $\frac{2a^2-8b+2b^2+8}{b-2}$ algebrai törteket *betűkkel jelölt valós számok arányának vagy algebrai törteknek* nevezzük.

2. Adott a $\frac{2x}{2y-1}$. algebrai tört. Az algebrai tört függ az x és y *ismeretlennek* vagy *változónak* nevezett valós számoktól, ezért $F(x, y)$-nal jelöljük, és így írjuk $F(x,y)=\frac{2x}{2y-1}$.

2.1. Ha a $\frac{2x}{2y-1}$ algebrai törtben az x ismeretlen értékét 10,5-tel, az y ismeretlent pedig 2-vel helyettesítjük, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{2\cdot 10{,}5}{2\cdot 2-1}=\frac{21}{3}=7$. Írhatjuk, hogy $F(10{,}5;\,2) = 7$ és azt mondjuk, hogy az $F(x, y)$ algebrai tört *számértéke* 7, az $x = 10{,}5$ és $y = 2$ esetén.

2.2. Ha a $\frac{2x}{2y-1}$ algebrai törtben az y ismeretlent 0,5-tel helyettesítjük a tört nevezője 0 lesz. Mivel a 0-val való osztás értelmetlen, azt mondjuk, hogy az $y = 0{,}5$ esetén a tört *nem értelmezett*, vagy a *törtnek nincs értelme*, bármely értéket is kapna az x változó.

3. Mivel az algebrai törtek valós számok aránya, ezért a valós számokkal végzett összes tanult művelet elvégezhető.

Fedezzük fel, értsük meg!

1 Két algebrai kifejezés olyan arányát, melyben az osztó nullától különbözik *algebrai aránynak* vagy *algebrai törtnek* nevezzük.

$\frac{x}{y}$, $\frac{x+1}{xy}$, $\frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$, $-\frac{a^3+b^2-4}{abc}$ algebrai törtek.

$\frac{x+y}{0}$; $\frac{xyz+3(x+y)+z}{0}$ nem algebrai törtek.

2 Egy algebrai tört akkor *értelmezett*, ha a nevezője nullától különböző.

Az $\frac{x+1}{x^2+(y-1)^2+2z}$ algebrai tört *értelmezett* ha

$x, y, z \in \mathbb{R}$ és $x^2 + (y-1)^2 + 2z \neq 0$.

3 Ha az algebrai kifejezés változójának (változóinak) olyan számértéket adunk, melyre a nevező nullától különbözik, akkor a kapott valós számot a kifejezés számértékének nevezzük.

$x = -2$ esetén az $F(x)=\frac{3x+1}{x^2+4}$ tört számértéke

$F(-2)=\frac{3\cdot(-2)+1}{(-2)^2+4}=\frac{-5}{8}$.

Az $E(x, y) = 2x - 5y$, kifejezés értéke $x = 1$ és $y = 2$ esetén $E(1, 2) = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = 8$.

4 Az értelmezett törtet eredményező változók által alkotott valós számok halmazát az algebrai tört *értelmezési halmazának* vagy *értelmezési tartományának* nevezzük. *Következmény:*

a) Az $\frac{E(x)}{F(x)}$ algebrai tört értelmezési tartománya

$\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \neq 0\}$.

b) Az $\frac{E(x,y)}{F(x,y)}$ algebrai tört értelmezési tartománya

$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid F(x, y) \neq 0\}$

1) A $\frac{3x+1}{3x^2-12}$ tört értelmezési tartománya

$\{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 12 \neq 0\}$.

2) Az $\frac{xy}{x^2+y^2}$ tört értelmezési tartománya

$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$.

3) Az $\frac{x}{y+3}$ tört értelmezési tartománya

$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y + 3 \neq 0\}$.

Alkalmazás

1 Adott az $F(x, y) = \dfrac{9x^2 - 4y^2}{3x + 2y}$ algebrai tört.

a) Számítsd ki az algebrai tört számértékét $x = 2$ és $y = 1{,}5$.

Megoldás. $F(2;\ 1{,}5) = \dfrac{9 \cdot 2^2 - 4 \cdot 1{,}5^2}{3 \cdot 2 + 2 \cdot 1{,}5} = \dfrac{9 \cdot 4 - 4 \cdot 2{,}25}{6+3} = \dfrac{36-9}{6+3} = \dfrac{27}{9} = 3$, tehát $F(2;\ 1{,}5) = 3$.

b) Ellenőrizd, hogy $F(x, y)$ értelmezett-e $x = -2$ és $y = 3$ esetén!

Megoldás. Kiszámoljuk $3x + 2y$ értékét $x = -2$ és $y = 3$ esetén, és azt kapjuk, hogy $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 0$. Mivel a tört nevezője nulla lesz, az adott algebrai tört *nem értelmezett* $x = -2$ és $y = 3$ esetén.

2 Határozd meg az $F(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{(2x-5)^2 - 4x^2}$ algebrai tört értelmezési tartományát!

Megoldás. $((2x-5)^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow -20x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}25$.

Az algebrai tört nem értelmezett $x = 1{,}25$ esetén, tehát az értelmezési tartománya $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1{,}25\} = \mathbb{R} - \{1{,}25\}$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Másold a füzetbe az alábbi táblázatot, és egészítsd ki a második sort az első sorban található algebrai tört értelmezési tartományával. Használd a megadott modellt!

Tört	$\dfrac{6}{6x}$	$\dfrac{x}{x-1}$	$\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$	$\dfrac{x}{x^2-1}$	$\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$	$\dfrac{6x-1}{x^2-36}$
Értelmezési tartomány		$\mathbb{R} - \{1\}$				
Indoklás		$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$				

2. Határozd meg az x azon értékeit, amelyekre az alábbi törtek értelmezettek!

a) $\dfrac{x+5}{x}$ **b)** $\dfrac{x-3}{-3x}$ **c)** $\dfrac{7x^4}{x^2}$

d) $\dfrac{2x-7}{x+1}$ **e)** $\dfrac{2-x}{-x-2}$ **f)** $\dfrac{101}{x^2+1}$

g) $\dfrac{x^2+x}{3x+8}$ **h)** $\dfrac{x-12}{(x+1)(x-2)}$

i) $\dfrac{x+4}{x^2-4x+4}$ **j)** $\dfrac{5x-7}{x^2-25}$

3. Tudva, hogy az $\dfrac{5+x}{x^2+ax-16}$ kifejezés értelmezett $x \in \mathbb{R} - \{-4;\ 4\}$ esetén, határozd meg az a valós számot.

4. $x = -1$ és $x = \sqrt{5}$ esetén határozd meg az $\dfrac{5}{x}$ arány számértékét!

5. Másold a füzetbe az alábbi táblázatot, és egészítsd ki az üres cellákat olyan értékekkel, amelyre a tört nem értelmezett. Használd a megadott modellt!

$\dfrac{3+x}{x-2}$	$\dfrac{x}{x+3}$	$\dfrac{x+6}{2x-10}$	$\dfrac{4x+5}{3x^2-48}$
$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Az x azon értékeinek halmaza, amelyre a tört *nem értelmezett* a $\{2\}$.			

6. Számold ki a kifejezés számértékét az x megadott értékei esetén!

a) $\dfrac{4}{x+2}$ ha $x \in \{0{,}2\}$

b) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ ha $x \in \{-1, \sqrt{2}, \sqrt{3} - 1\}$.

7. Adott az $F(x)=\dfrac{x^3-x^2+x}{x^2+x+1}$. Számold ki a tört számértékét, ha

a) $x=-1$; **b)** $x=0$; **c)** $x=\dfrac{1}{2}$

8. Adottak a következő algebrai kifejezések:

1) $\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-2x+1}$; **2)** $\dfrac{x^2+x-2}{x(x+2)-3}$;

3) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; **4)** $\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}$.

a) Bonts tényezőkre a törtek nevezőit!

b) Mindegyik kifejezés esetén határozd meg az x azon valós értékeit, amelyekre a tört nevezője 0.

c) Mindegyik tört esetén határozd meg az x azon valós értékeit, amelyekre a tört nem értelmezett!

d) Határozd meg mindegyik tört értelmezési tartományát!

9. Határozd meg az alábbi törtek értelmezési tartományát!

a) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2-4x+6y+13}$;

b) $\dfrac{x+y}{xy+3x-2y-6}$

2.ℓ. Betűkkel jelölt valós számok arányának bővítése és egyszerűsítése

Emlékeztető

Bővíteni egy törtet az m nullától különböző valós számmal azt jelenti, hogy a tört számlálóját és a nevezőjét is megszorozzuk ugyanazzal az m számmal.

Egyszerűsíteni egy törtet a p nullától különböző valós számmal azt jelenti, hogy a tört számlálóját és nevezőjét is elosztjuk ugyanazzal a p számmal.

A tört bővítése és egyszerűsítése során az eredeti törttel *ekvivalens törtet* kapunk.

Ha a, $c \in \mathbb{R}$, és b, $d \in \mathbb{R}^*$, akkor:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$$

1) A $\dfrac{6}{8}$ törtet 3-mal bővítve a $\dfrac{18}{24}$ ekvivalens törtet kapjuk, és így írjuk: ${}^{3)}\dfrac{6}{8}=\dfrac{18}{24}$.

2) A $\dfrac{6}{8}$ törtet 2-vel egyszerűsítve a $\dfrac{3}{4}$ ekvivalens törtet kapjuk, és így írjuk: $\dfrac{6}{8}^{(2}=\dfrac{3}{4}$.

3) $${}^{m)}\frac{a}{b}=\frac{m\cdot a}{m\cdot b} \qquad \frac{a}{b}^{(p}=\frac{a:p}{b:p}$$

4) $\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 6\cdot 4=8\cdot 3$

Fedezzük fel, értsük meg!

Hasonlóképpen határozzuk meg az algebrai törtek halmazán az egyenlőségi relációt, majd az algebrai törtek bővítését és egyszerűsítését. A kapott eredményeket algebrai törtekkel végzett műveletek elvégzésére fogjuk felhasználni.

Két algebrai tört, $\dfrac{E}{F}$ és $\dfrac{G}{H}$ egyenlő akkor és csakis akkor, ha $E\cdot H=F\cdot G$.

$$\frac{E}{F}=\frac{G}{H} \Leftrightarrow E\cdot H=F\cdot G$$

Példa: Bizonyítsd be, hogy $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x}{x-1}$.

Megoldás. $(x^2+x)(x-1)=x^3-x^2+x^2-x=x^3-x$ és $(x^2-1)x=x^3-x$. Azt kapjuk, hogy $(x^2+x)(x-1)=(x^2-1)x$, tehát $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x}{x-1}$.

Megjegyzés. Két algebrai tört egyenlősége feltételezi számértékeik egyenlőségét a közös értelmezési tartományukon. A fenti példa esetén az értelmezési tartományuk metszete $\mathbb{R}-\{-1;1\}$.

2 Az $\dfrac{E}{F}$ algebrai tört bővítése egy $G \neq 0$ algebrai kifejezéssel:

$$^{G)}\frac{E}{F} = \frac{E \cdot G}{F \cdot G}$$

Példa. Bővítsd az $\dfrac{x}{x-1}$ algebrai törtet az $x + 1$, $x + 1 \neq 0$ algebrai kifejezéssel.

Megoldás: $^{x+1)}\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x^2+x}{x^2-1}$

Megjegyzés. Két algebrai tört egyenlősége feltételezi számértékeik egyenlőségét a közös értelmezési tartományukon. A fenti példa esetén az értelmezési tartományuk metszete $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

3 Az $\dfrac{E}{F}$ algebrai tört egyszerűsítése egy $G \neq 0$ algebrai kifejezéssel:

$$\frac{E}{F}^{(G} = \frac{E : G}{F : G}$$

Példa. Egyszerűsítsd az $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ algebrai törtet az $x + 1$, $x + 1 \neq 0$ algebrai kifejezéssel:

Megoldás: $\dfrac{x^2+x}{x^2-1} = \dfrac{x \cdot \cancel{(x+1)}}{(x-1) \cdot \cancel{(x+1)}}^{(x+1} = \dfrac{x}{x-1}$

Megjegyzés. Egy algebrai tört egyszerűsítéséhez szükséges a tört számlálójának és nevezőjének is a tényezőkre bontása.

Alkalmazás

Adott az $F_1(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ és $F_2(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ algebrai tört.

a) Határozd meg az $F_1(x)$ és $F_2(x)$ tört értelmezési tartományát!

A megoldás lépései:	*Megoldás:*
Meghatározzuk az $F_1(x)$ tört értelmezési tartományát.	$x + 1 = 0$ vagyis $x = -1$. Az $F_1(x)$ tört értelmezési tartománya $\mathbb{R} - \{-1\}$.
Meghatározzuk az $F_2(x)$ tört értelmezési tartományát.	$x^2 - 1 = 0$ tehát $x = -1$ vagy $x = 1$. Az $F_2(x)$ tört értelmezési tartománya $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

b) Bizonyítsd be, hogy $F_1(x) = F_2(x)$.

Az $F_1(x)$ és $F_2(x)$ törtek egyenlősége értelmezett bármely $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ esetén.

A megoldás lépései:	*Megoldás:*
Kezdés	$F_1(x) = F_2(x) \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;
Kiszámoljuk: $(x-1)(x^2-1)$ és $(x+1)(x^2-2x+1)$	$(x-1)(x^2-1) = x^3 - x - x^2 + 1 = x^3 - x^2 - x + 1$; $(x+1)(x^2-2x+1) = x^3 - 2x^2 + x + x^2 - 2x + 1 = x^3 - x^2 - x + 1$.
Befejezés:	Mivel $(x-1)(x^2-1) = (x+1)(x^2-2x+1)$, ezért $F_1(x) = F_2(x)$

c) Az $F_1(x)$ törtet az $(x - 1)$ algebrai kifejezéssel bővítve bizonyítsd be, hogy $F_1(x) = F_2(x)$.

Megoldás. $F_1(x) = {}^{x-1)}\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1} = F_2(x)$

d) Az $F_2(x)$ törtet egyszerűsítve bizonyítsd be, hogy $F_1(x) = F_2(x)$.

A megoldás lépései:	*Megoldás:*
Az $F_2(x)$ tört számlálójának és nevezőjének tényezőkre bontása	$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = (x - 1)(x - 1)$; $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$
Egyszerűsítjük az $F_2(x)$ törtet	$F_2(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \dfrac{x-1}{x+1} = F_1(x)$
Befejezés	Az $F_2(x)$ törtet az $(x - 1)$ algebrai kifejezéssel egyszerűsítve azt kapjuk, hogy $F_1(x) = F_2(x)$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Bővítsd:

a) $\dfrac{x^2}{x-1}$ törtet $2x$-szel;

b) $\dfrac{2x-3}{x+2}$ törtet x –1-gyel.

2. Bővítsd és végezd el a számításokat:

a) az $\dfrac{x}{2x+1}$ törtet 4-gyel;

b) az $\dfrac{x-1}{x+1}$ törtet 1-gyel;

c) az $\dfrac{x}{2x+1}$ törtet 5-tel;

d) az $\dfrac{x-1}{x+1}$ törtet 1-gyel.

3. Bővítsd $x + 3$-mal az alábbi algebrai törteket:

a) $\dfrac{7}{x^2}$; **b)** $\dfrac{x}{x+1}$;

c) $\dfrac{1-x}{x^2-3x}$; **d)** $\dfrac{x-3}{x^2-3x+9}$.

4. Hozd közös nevezőre a törteket:

a) $\dfrac{1}{x}, \dfrac{3}{x^2}$; **b)** $\dfrac{3}{2y}, \dfrac{-4}{3y}$;

c) $\dfrac{1}{9x^2}, \dfrac{5}{12x}, \dfrac{1}{18x}$; **d)** $\dfrac{a}{8x^2y}, \dfrac{5b}{6xy^3}, \dfrac{c}{3x^3}$.

5. Egyszerűsítsd a következő arányokat:

a) $\dfrac{2x^2}{x^3}$; **b)** $\dfrac{5x^2y}{xy^3}$;

c) $\dfrac{-3ab^2c^3}{15a^3b^2c}$; **d)** $\dfrac{x-1}{1-x}$.

6. **a)** Bontsd tényezőkre az $x^2 + x$, $x^2 - x$ és $x^3 - x$ kifejezést!

b) Egyszerűsítsd az $\dfrac{x^2+x}{x^2-x}, \dfrac{x^2-x}{x^3-x}, \dfrac{x^3-x}{x^2+x}$ arányt!

7. Egyszerűsítsd az arányokat:

a) $\dfrac{24}{8x-16}$; **b)** $\dfrac{2x^2-6x}{4x-12}$;

c) $\dfrac{y^2-10y+25}{y^2-25}$;

d) $\dfrac{a^2-4}{a^2-4a+4}$; **e)** $\dfrac{(2b-3)^2-b^2}{3b^2-9b}$.

8. Az alábbi esetekben igazold, hogy $F_1(x)$ és $F_2(x)$ egyenlők a közös értelmezési tartományon:

a) $F_1(x) = \dfrac{7x}{6}$ és

$F_2(x) = \dfrac{14x^2-7x}{12x-6}$;

b) $F_1(x) = \dfrac{6x^2+x-1}{4x^2+8x+3}$ és

$F_2(x) = \dfrac{3x-1}{2x+3}$;

c) $F_1(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}$ és

$F_2(x) = \dfrac{x-3}{x+3}$;

d) $F_1(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3-7x+6}$ és

$F_2(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2x-3}$.

3.6. Algebrai törtekkel végzett műveletek

Az algebrai törtek betűkkel jelölt valós számok aránya. Az algebrai törtekkel végzett műveletek elvégzése során betartjuk a valós számokkal végzett műveletek számítási szabályait.

Oldjuk meg figyelmesen!

1 **a)** Bontsd prímtényezők szorzatára a 132 és 198 természetes számokat, majd határozd meg a két szám legkisebb közös többszörösét!

b) Hozd közös nevezőre a törteket: $\dfrac{1}{132}$ és $\dfrac{5}{198}$

Megoldás:

a) $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$

$198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$

A *legkisebb közös többszörös:*
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 396.$
(a közös és nem közös prímtényezők szorzata, egyszer véve a legnagyobb hatványon)

b) ${}^{3)}\dfrac{1}{132} = \dfrac{3}{396}$ és ${}^{2)}\dfrac{5}{198} = \dfrac{10}{396}$.

Következmény.

> A közönséges törtek nevezőjének prímtényezők szorzatára való felbontása lehetővé teszi a közönséges törtek közös nevezőre hozását.

2 **a)** Bontsd tényezőkre az algebrai kifejezést!
$x^4 - x^2$ és $x^4 + x^3 - x^2 - x$

b) Hozd a törteket közös nevezőre!
$\dfrac{1}{x^4 - x^2}$ és $\dfrac{5}{x^4 + x^3 - x^2 - x}$

a) $x^4 - x^2 = x^2(x + 1)(x - 1)$

$x^4 + x^3 - x^2 - x = (x^4 - x^2) + (x^3 - x) = x^2(x^2 - 1) + x(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 + x) = x(x + 1)^2(x - 1)$

b) A *közös nevező* $x^2(x + 1)^2(x - 1)$ (a közös és nem közös tényezők szorzata, egyszer véve a legnagyobb hatványon)

$$\frac{1}{x^4 - x^2} = {}^{x+1)}\frac{1}{x^2(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x^2(x+1)^2(x-1)}$$

$$\frac{5}{x^4 + x^3 - x^2 - x - 1} = {}^{x)}\frac{5}{x(x+1)^2(x-1)} = \frac{5x}{x^2(x+1)^2(x-1)}.$$

> Az algebrai törtek nevezőjének tényezőkre való felbontása lehetővé teszi az algebrai törtek közös nevezőre hozását.

Fedezzük fel, értsük meg!

1 Azonos nevezőjű algebrai törtek összeadása és kivonása

Ha A, B, P algebrai kifejezések, és $P \neq 0$, akkor:

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{P} = \frac{A+B}{P} \text{ és } \frac{A}{P} - \frac{B}{P} = \frac{A-B}{P}.$$

Számítsd ki: $\dfrac{2x+1}{x-1} + \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{5-x}{x-1}$

Megoldás:

$$\frac{2x+1}{x-1} + \frac{x}{x-1} - \frac{5-x}{x-1} = \frac{(2x+1)+x-(5-x)}{x-1} =$$

$$= \frac{2x+1+x-5+x}{x-1} = \frac{4x-4}{x-1} = \frac{4\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 4.$$

2 Különböző nevezőjű algebrai törtek összeadása és kivonása:

1. lépés: a nevezők felbontása.

2. lépés: közös nevező meghatározása.

3. lépés bővítéssel közös nevezőre hozzuk a törteket , majd elvégezzük a számításokat

Ha A, B, P, Q algebrai kifejezések és $P \neq 0$, $Q \neq 0$, akkor:

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{Q} = {}^{Q)}\frac{A}{P} + {}^{P)}\frac{B}{Q} = \frac{AQ+BP}{PQ}$$

Számítsd ki: $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2+x} + \dfrac{1}{x^3-x^2}$.

$x^2 + x = x(x + 1)$ és $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$

$x^2(x + 1)(x - 1) = x^2(x^2 - 1)$

$$ {}^{x^2-1)}\frac{1}{x^2} + {}^{x(x-1))}\frac{1}{x(x+1)} + {}^{x+1)}\frac{1}{x^2(x-1)} =$$

$$= \frac{x^2-1}{x^2(x^2-1)} + \frac{x(x-1)}{x^2(x+1)(x-1)} + \frac{x+1}{x^2(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2-1+x^2-x+x+1}{x^2(x^2-1)} = \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x^2-1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

Megjegyzés. A számítások elvégzése után, ha lehetséges, egyszerűsítjük a kapott törtet.

Következésképpen $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^3-x^2}=\dfrac{2}{x^2-1}$.

3 Algebrai törtek szorzása

Ha A, B, P, Q algebrai törtek és $P \neq 0$, $Q \neq 0$, akkor: $\dfrac{A}{P}\cdot\dfrac{B}{Q}=\dfrac{A\cdot B}{P\cdot Q}$

Sajátos esetben $P=1$: $A\cdot\dfrac{B}{Q}=\dfrac{A}{1}\cdot\dfrac{B}{Q}=\dfrac{A\cdot B}{Q}$.

Számítsd ki: **a)** $\dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot\dfrac{x}{5x-5}$; **b)** $\dfrac{3x^2+1}{2x^3-3x}\cdot(2x^2-3)$.

Megoldás:

a) $$\frac{x^2-1}{x+2}\cdot\frac{x}{5x-5}=\frac{(x^2-1)\cdot x}{(x+2)(5x-5)}=\frac{(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}\cdot x}{(x+2)\cdot 5\cdot\cancel{(x-1)}}=\frac{(x+1)\cdot x}{(x+2)\cdot 5}=\frac{x^2+x}{5x+10}.$$

b) $$\frac{3x^2+1}{2x^3-3x}\cdot(2x^2-3)=\frac{3x^2+1}{x\,\cancel{(2x^2-3)}}\cdot\frac{\cancel{(2x^2-3)}}{1}=\frac{3x^2+1}{x}.$$

Megjegyzés: A valós számok szorzásához hasonlóan az algebrai törteket is egyszerűsíthetjük azzal a feltétellel, hogy az a kifejezés, amellyel egyszerűsítünk az egyik számláló és egyik nevező közös tényezője legyen.

4 Algebrai tört hatványozása:

Ha n egy természetes szám, $n \geq 1$ és A, P algebrai kifejezések, $P \neq 0$, akkor:

$$\left(\frac{A}{P}\right)^1=\frac{A}{P} \text{ és } \left(\frac{A}{P}\right)^n=\underbrace{\frac{A}{P}\cdot\ldots\cdot\frac{A}{P}}_{n\text{ tényező, }n\geq 2}=\frac{A^n}{P^n}$$

Továbbá, ha $A \neq 0$, akkor:

$$\left(\frac{A}{P}\right)^{-n}=\left(\frac{P}{A}\right)^n, \text{ valamint } \left(\frac{A}{P}\right)^0=1.$$

Számítsd ki: $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$.

Megoldás: a) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^3}$

$$=\frac{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)}=\frac{(x-1)^2\cdot(x-1)}{(x+1)^2\cdot(x+1)}$$

$$=\frac{(x-1)^2\cdot(x-1)}{(x+1)^2\cdot(x+1)}=\frac{(x^2-2x+1)\cdot(x-1)}{(x^2+2x+1)\cdot(x+1)}$$

$$=\frac{x^3-x^2-2x^2+2x+x-1}{x^3+x^2+2x^2+2x+x+1}=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3+3x^2+3x+1}.$$

5 Algebrai törtek osztása

Ha P, Q, R, S algebrai kifejezések és $Q \neq 0$, $R \neq 0$, $S \neq 0$ akkor:

Az $\dfrac{R}{S}$ tört *inverze* az $\dfrac{S}{R}$ tört.

Az $\dfrac{P}{Q}$ algebrai törtet az $\dfrac{R}{S}$ algebrai törttel elosztani azt jelenti, hogy az *első törtet szorozzuk a második inverzével*, azaz $\dfrac{P}{Q}:\dfrac{R}{S}=\dfrac{P}{Q}\cdot\dfrac{S}{R}$.

Számítsd ki: $\dfrac{x^2-16}{x^2}:\dfrac{x-4}{3x}$.

Megoldás: $\dfrac{x^2-16}{x^2}:\dfrac{x-4}{3x}=\dfrac{x^2-16}{x^2}\cdot\dfrac{3x}{x-4}=$

$$=\frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{x^2}\cdot\frac{3x}{\cancel{x-4}}=\frac{3x(x+4)^{(x}}{x^2}=$$

$$=\frac{3(x+4)}{x}.$$

Alkalmazás

Az algebrai törtekkel végzett műveletek elvégzésének sorrendje és a zárójelek használata hasonló a valós számokkal végzett műveleteknél tanultakhoz.

Alkalmazás. Adott a következő kifejezés $E(x, y) = \dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}\right)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $x \neq -y$.

a) Mutsd ki, hogy $E(x, y) = \dfrac{x}{x-y}$, bármely (x,y) esetén, melyben x és y, illetve x és $-y$ egymástól különbözőek.

b) Számold ki a kifejezés számértékét $x = 2$ és $y = \sqrt{2}$ esetén.

Megoldás. **a)** $E(x, y) = \dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}\right) = \dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\left({}^{x+y)}\dfrac{x}{x-y}-{}^{x-y)}\dfrac{y}{x+y}\right) =$

$$= \frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x^2+xy}{(x-y)(x+y)}-\frac{xy-y^2}{(x-y)(x+y)}\right) = \frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2+xy-\left(xy-y^2\right)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x(x+y)}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2+xy-xy+y^2}{(x-y)(x+y)} =$$

$= \dfrac{x}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{(x-y)} = \dfrac{x}{x-y}$. Tehát $E(x, y) = \dfrac{x}{x-y}$, bármely (x, y) valós számpár esetén, ahol $x \neq y$ és $x \neq -y$.

b) $E(2, \sqrt{2}) = \dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$.

Megjegyzés. Ajánlatos az eredményt olyan tört alakjában írni, amelynek nevezője racionális szám. Így

$$E\left(2, \sqrt{2}\right) = {}^{2+\sqrt{2})}\frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2} = 2+\sqrt{2}.$$

Megjegyzés. A kifejezés eredeti alakjából kiindulva is megkapható annak számértéke, a behelyettesítést és a szükséges számításokat elvégezve.

Gyakorlatok és feladatok

1. Végezd el a számításokat:

a) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{3x}{5}$; **b)** $\dfrac{x}{7}+\dfrac{3-x}{7}$;

c) $\dfrac{x+2}{x}+\dfrac{x-1}{x}$; **d)** $\dfrac{y}{4}-\dfrac{5y}{4}$;

e) $\dfrac{y}{y-2}-\dfrac{2}{y-2}$; **f)** $\dfrac{-2y}{y^2+4}-\dfrac{6-2y}{y^2+4}$.

2. Számold ki, majd egyszerűsítsd a kapott algebrai törtet!

a) $\dfrac{x^2}{x^2-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2-1}$;

b) $\dfrac{ax+a}{a-b}-\dfrac{bx+b}{a-b}$;

c) $\dfrac{11x}{6x^2-xy}-\dfrac{7x}{6x^2-xy}-\dfrac{2x}{xy-6x^2}$.

3. **3.1.** Hozd közös nevezőre az algebrai törtpárokat!

a) $E(x) = \dfrac{3}{2x}$, $F(x) = \dfrac{1}{5x}$;

b) $E(x) = \dfrac{x+1}{3x}$, $F(x) = \dfrac{1}{6x^2}$;

c) $E(x) = \dfrac{1}{2x-1}$, $F(x) = \dfrac{1}{2x+1}$.

3.2. Számítsd ki $E(x) + F(x)$ és $E(x) - F(x)$ az előző alpont mindegyikénél.

4. Végezd el a számításokat:

a) $\dfrac{-2}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4x+4}$;

b) $\dfrac{x^2+2}{2x}-\dfrac{x^2}{2x+4}+\dfrac{4}{x^2+2x}$;

c) $\dfrac{x}{2-x}-\dfrac{2-x}{x}+\dfrac{4x-4}{(x-1)^2-1}$.

5. Adott az alábbi algebrai kifejezés:

$$E(x)=\frac{1}{2x-3}-\frac{1}{4x-6}+\frac{1}{12-8x}.$$

a) Határozd meg az algebrai kifejezés értelmezési tartományát!

b) Hozd az E*(x)* kifejezést egyszerűbb alakba!

6. Számítsd ki a következő hatványokat:

a) $\left(\frac{x}{4}\right)^2$; **b)** $\left(-\frac{2}{y}\right)^3$; **c)** $\left(\frac{2ab}{13c}\right)^{-1}$;

d) $-\left(-\frac{x}{y}\right)^{-2}$; **e)** $\left(\frac{x-2}{2x}\right)^2$; **f)** $\left[\left(\frac{3a}{x+1}\right)^2\right]^3$.

7. Végezd el a szorzásokat!

a) $\frac{5}{3}\cdot\frac{x}{y}$; **b)** $\frac{x}{10}\cdot\left(-\frac{3}{x}\right)$; **c)** $\frac{2y}{3x}\cdot\frac{6x}{7y}$;

d) $-\frac{x^2}{y}\cdot\frac{y^3}{x}$; **e)** $\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{3}{x+1}\cdot\frac{x+2}{-6}$.

f) $\frac{ax+ay}{x^2-4x}\cdot\frac{x-4}{x+y}$ **g)** $\frac{x^2-4}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{x^2+2x}$.

8. Végezd el az osztásokat!

a) $-\frac{x}{y}:\frac{4}{3}$; **b)** $\frac{6a^2b}{66c}:\frac{2a^3b^2}{11c^2}$;

c) $-\frac{x^2-1}{x}:\frac{x+1}{x^2}$; **d)** $\frac{x^3-9x}{2x}:\frac{x+3}{-3x}$.

9. Számítsd ki betartva a művelete elvégzésének sorrendjét!

a) $\frac{x^2-1}{x^2+1}:\frac{4x-4}{3x^2}\cdot\frac{4}{x^2+x}$;

b) $\frac{x^2-1}{x^2+1}:\frac{3x-3}{4x^2}\cdot\frac{3}{x^2+x}$;

c) $\left(\frac{x}{4}\right)^{-1}:\left(x-\frac{x}{2}\right)^{-1}$; **d)** $\left(\frac{x}{6}\right)^{-2}:\left(x-\frac{x}{3}\right)^{-2}$.

10. Végezd el a számításokat!

a) $\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)\cdot\frac{a^2}{a^2-9}+\frac{6-a}{3}$;

b) $\left(\frac{1}{a-1}-\frac{2}{a-2}\right)\cdot\frac{(a-3)^2-1}{a}$;

c) $\left[\frac{a}{a-1}+\frac{1}{a+1}+\frac{2}{a^2-1}-\frac{2a}{(a-1)(a+1)}\right]:\frac{a^3+a}{a^2-1}$;

d) $\left(a-\frac{4ab}{a+b}+b\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$.

11. Adott az $A(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ és $B(x)=-\frac{x^2-1}{x^2+1}$ kifejezés, ahol $x\in\mathbb{R}$. Mutasd ki, hogy:

a) $B(x)=1-x\cdot A(x)$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén.

b) $[A(x)]^2+[B(x)]^2=1$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén.

12. Adott $E(x)=\left(\frac{1+x}{2x}-\frac{1+2x}{5x}\right)\cdot\frac{10x}{x+3}$,

$x\in\mathbb{R}$, $x\neq-3$, $x\neq0$.

Mutasd ki, hogy $E(x)=1$, bármely x valós szám esetén, $x\neq-3$ és $x\neq0$.

13. Adott a következő kifejezés:

$$E(x)=\left(\frac{x^2-x+4}{x^2-4}-\frac{x-2}{x+2}+\frac{1}{x-2}\right)\cdot\frac{x^2+2x-8}{4x+2},$$

$x\in\mathbb{R}-\{-2,-\frac{1}{2},2\}$.

a) Bontsd tényezőkre: x^2+2x-8.

b) Mutasd ki, hogy $E(x)=\frac{x+4}{x+2}$.

14. Adott a következő kifejezés:

$$E(x)=\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}-\frac{1-x^2}{1+x^2}\right):\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right).$$

a) Határozd meg az *E(x)* kifejezés *D* értelmezési tartományát!

b) Hozd a kifejezést egyszerűbb alakba!

c) Mutasd ki, hogy: $E(x)<\frac{1}{2}$, bármely $x\in D$ esetén.

15. Adott a következő kifejezés:

$$F(x)=\left(\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+x}-\frac{x+1}{x^2-x}+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^2-1}{2x^2-x-3}.$$

a) Határozd meg az x valós szám azon értékeinek M halmazát, melyre az $F(x)$ kifejezés értelmezett!

b) Hozd a kifejezést egyszerűbb alakba!

c) Mutasd ki, hogy $F(a)$ nem lehet egész szám, bármely $a\in M\cap\mathbb{Z}$ esetén.

16. Adott a következő kifejezés:

$$E(x)=\left(\frac{5}{2x+3}+\frac{2}{3-2x}+\frac{2x+9}{4x^2-9}\right):\frac{8}{4x^2+12x+9},$$

$x\in\mathbb{Z}$.

a) Hozd a kifejezést egyszerűbb alakba!

b) Mutasd ki, hogy

$1+2\cdot[E(0)+E(1)+...+E(18)]$ teljes négyzet!

5. $ax^2 + bx + c = 0$ alakú egyenletek, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$

1.l. Egy ismeretlenes másodfokú egyenletek

Emlékeztető

Az $x^2 = a$, alakú egyenletek megoldása során az 1) $a > 0$; 2) $a = 0$; 3) $a < 0$ eseteket tárgyaljuk, ahol $a \in \mathbb{R}$;

1) Ha $a > 0$, akkor az $x^2 = a$ egyenlet $|x| = \sqrt{a}$ alakba írható, ahol egyenlőség csakis akkor igaz, ha $x = \sqrt{a}$ vagy $x = -\sqrt{a}$. Azt mondjuk, hogy az egyenlet valós megoldásai $x_1 = \sqrt{a}$ és $x_2 = -\sqrt{a}$.
Az egyenlet megoldáshalmaza az $M = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$

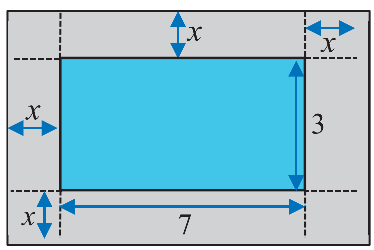
Példa: $x^2 = 15 \Rightarrow x_1 = \sqrt{15}$ és $x_2 = -\sqrt{15}$, tehát $M = \{-\sqrt{15}, \sqrt{15}\}$

2) Az $x^2 = 0$ egyenlet egyetlen megoldása $x = 0$, tehát $M = \{0\}$.

3) Az $x^2 = a$ egyenletnek, ahol $a < 0$, nincs egyetlen valós megoldása sem, mivel $x^2 \geq 0$ és $a < 0$, tehát $x^2 \neq a$, bármely x valós szám esetén. Az egyenlet megoldáshalmaza $M = \varnothing$.
Példa: Az $x^2 = -16$ egyenletnek nincs egyetlen valós megoldása sem, tehát $M = \varnothing$.

Oldjuk meg figyelmesen!

1. feladat. A 7 m hosszú és 3 m széles Sara medence téglalap alakú, x méter széles sétány veszi körül (lásd a jobb oldali ábrát). A medence és a sétány által elfoglalt terület négyzetméterben kifejezett területét $\mathcal{T}(x)$ jelöli.



a) Számítsd ki az $\mathcal{T}(x)$ értékét kétféleképpen, és következtess a $(2x + 3)(2x + 7) = 4x^2 + 20x + 21$ egyenlőségre!

b) Igazold algebrai számításokkal az előbbi egyenlőséget!

c) A medence és a sétány megépítéséhez szükséges terület 77 m², számítsd ki a sétány szélességét!

Megoldás.

a) A medence és sétány által foglalt terület olyan téglalap alakú, melynek szélessége $(2x + 3)$ m és hosszúsága $(2x + 7)$ m.
Tehát $\mathcal{T}(x) = (2x + 3)(2x + 7)$.
Másfelől a téglalap alakú terület négy négyzetből és öt téglalapból áll. Kiszámolva mindegyik területét, majd összeadva, azt kapjuk, hogy
$\mathcal{T}(x) = 4 \cdot x^2 + 2 \cdot 7x + 2 \cdot 3x + 21 = 4x^2 + 20x + 21$.
Következésképpen $\mathcal{T}(x) = 4x^2 + 20x + 21 = (2x + 3)(2x + 7)$.

b) $(2x + 3)(2x + 7) = 2x \cdot 2x + 2x \cdot 7 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 7 = 4x^2 + 14x + 6x + 21 = 4x^2 + 20x + 21$, tehát az egyenlőség igaz.

c) Ahhoz, hogy a sétány szélességét kiszámolhassuk, a következő feladatot kell megoldanunk: „Határozd meg az x értékét, tudva, hogy $\mathcal{T}(x) = 77$."
Mivel $\mathcal{T}(x) = 77$, következik, hogy $4x^2 + 20x - 56 = 0$, és a feladatot átfogalmazzuk így: „Oldd meg a pozitív valós számok halmazán a $4x^2 + 20x - 56 = 0$ egyenletet!"
Az egyenlet megoldása: $4x^2 + 20x - 56 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ vagy $x = -7$.
Mivel x a sétány szélessége: $x > 0$. Tudva, hogy $2 > 0$ és $-7 < 0$, azt kapjuk, hogy a sétány szélessége 2 m.

Fedezzük fel, értsük meg!

Értelmezés. Az olyan $ax^2 + bx + c = 0$, ahol a, b és c adott valós számok, $a \neq 0$, az x *ismeretlent* tartalmazó *másodfokú egyenletnek* nevezzük.
Az a, b és c számok az *egyenlet együtthatói.*

Egyenlet	Együtthatók
$x^2 - \sqrt{3}x + \frac{5}{2} = 0$	$a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $c = \frac{5}{2}$.
$x^2 + 2x = 0$	$a = 1$, $b = 2$, $c = 0$.
$-2x^2 - 7 = 0$	$a = -2$, $b = 0$, $c = -7$.

Az x ismeretlen azon valós értékét, amely teljesíti az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletet, az egyenlet *megoldásának* nevezzük.
Az x ismeretlen azon valós értékeinek halmazát, amelyek teljesítik az egyenlőséget, az *egyenlet megoldáshalmazának* nevezzük, és általában M-mel jelöljük.
Megoldani az egyenletet azt jelenti, hogy meg kell határozni az egyenlet megoldáshalmazát.

Példa: Az $x^2 + 3x = 0$ egyenlet és a -3, valós szám esetén $(-3)^2 + 3(-3) = 0$, egyenlőség, tehát -3 egyenletnek egyik *megoldása* $x^2 + 3x = 0$.

Példa: Az $x^2 + 3x = 0$ egyenlet megoldáshalmaza $M = \{-3, 0\}$(lennebb látható a bizonyítás).

Példa ($x^2 + 3x = 0$ egyenlet megoldása):
$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ vagy $x + 3 = 0$, azaz $x = 0$ vagy $x = -3$, tehát $M = \{-3, 0\}$.

Az $ax^2 + bx + c = 0$ alakú másodfokú egyenlet értelmezésében fontos az $a \neq 0$ feltétel. Az egyenlet többi együtthatója bármilyen valós szám lehet. Amikor egyik együttható nulla, az alábbi sajátos eseteket különböztetjük meg:

1) Az $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b = 0$, esetén az egyenlet $ax^2 + c = 0$.
2) Az $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$, $c = 0$, esetén $ax^2 + bx = 0$ alakú lesz.

ismeretlen

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,\ a \neq 0$$

x^2 együtthatója — x együtthatója — szabad tag

1 Az $ax^2 + c = 0$ alakú egyenlet megoldása ($a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)

$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$.

Ha $-\frac{c}{a} < 0$, és mivel $x^2 \geq 0$, az egyenletnek nincs valós megoldása

Ha $-\frac{c}{a} \geq 0$, akkor $x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-\frac{c}{a}} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$

vagyis $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ vagy $x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Tehát $M = \left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$.

Példa:
1) $3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 | : 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow |x| = 2$ és $M = \{-2, 2\}$.
2) $-2x^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = -32 | : (-2)$
$\Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow |x| = 4$ és $M = \{-4, 4\}$.
3) $2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -4 | : 2 \Leftrightarrow x^2 = -2$.
Mivel $-2 < 0$, következik, hogy $M = \varnothing$.

2 Az $ax^2 + bx = 0$ alakú egyenlet megoldása ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)

Alkalmazzuk a közös tényező kiemelésének módszerét.
$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x \cdot (ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ vagy $ax + b = 0$.

Tehát $M = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.

Példa:
1) $4x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ vagy $x - 2 = 0$. Tehát $M = \{0, 2\}$.
2) $-\sqrt{2}\,x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\,x(x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ vagy $x - \sqrt{2} = 0$. Tehát $M = \{0, \sqrt{2}\}$.

3 Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldása ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

Az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk az a nullától különböző számmal.

$$ax^2 + bx + c = 0 \;\Big|\cdot \frac{1}{a}$$

Leírjuk az ekvivalens egyenletet.

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Az $x^2 + \dfrac{bx}{a}$ kifejezést két négyzet különbségeként írjuk le.

$$x^2 + \frac{bx}{a} = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Leírjuk az ekvivalens egyenletet.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Elvégezzük a $-\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{c}{a}$ számítást.

$$-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = -\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Jelöljük $b^2 - 4ac = \Delta$.

A kapott eredményt a **(2)** egyenletbe helyettesítjük és a kapott ekvivalens egyenlet a következő lesz:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \qquad \textbf{(3)}$$

A $\Delta = b^2 - 4ac$ számot az $ax^2 + bx + c = 0$ *egyenlet diszkriminánsának* nevezzük ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$). Mindhárom lehetséges eset, vagyis $\Delta < 0$, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$, és a (3) egyenlet meghatározza az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldáshalmazát.

Lehetséges eset	**A (3) egyenlet következménye**	**Az egyenlet megoldásaira vonatkozó megjegyzések**
$\Delta < 0$	$-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0 \Rightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$	Az egyenletnek nincs megoldása az $\mathbb{R}$, halmazban, tehát $M = \varnothing$
$\Delta = 0$	$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) = 0$	Két egyenlő valós megoldása van $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$
$\Delta > 0$	$\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$ $\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$	Az egyenletnek két különböző megoldása van az $\mathbb{R}$ halmazban. $x_1 = -\dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ és $x_2 = -\dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Megjegyzés: Abban az esetben, ha $\Delta > 0$, általában azt mondjuk, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) egyenlet megoldásait az $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ képlettel számoljuk ki.

Alkalmazás

1 Oldjuk meg az egyenleteket:

a) $x^2 - x + 1 = 0$

$a = 1, \quad b = -1, \quad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac =$

$= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$

$\Delta < 0$

Tehát $M = \varnothing$.

b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$a = 4, \quad b = 4, \quad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$

$\Delta = 0$ és $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

Tehát $x_1 = x_2 = -\dfrac{1}{2}$ és $M = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

c) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$a = 1, \quad b = -5, \quad c = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$

$\Delta > 0$ és $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Tehát $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ és $M = \{2, 3\}$.

1. alkalmazás. Ha lehetséges, bontsd tényezőkre az $E(x) = ax^2 + bx + c$ algebrai kifejezést, ahol $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

Megoldás. Kiemeljük közös tényezőként az a számot. Tehát $E(x) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$.

Használva a $b^2 - 4ac = \Delta$, jelölést, azt kapjuk, hogy $E(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right]$.

Ha $\Delta > 0$, akkor $E(x) = a(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}) = a(x - x_1)(x - x_2)$, ahol x_1 és x_2 az $ax^2 + bx + c = 0$, egyenlet megoldásai, és az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletet az *E(x)* algebrai kifejezéshez rendelt egyenletnek nevezzük.

Ha $\Delta = 0$, akkor $E(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Ha $\Delta < 0$, akkor $E(x)$ nem bontható fel valós együtthatós tényezők szorzatára. Azt mondjuk, hogy *E(x) irreducibilis* az $\mathbb{R}$ halmazon.

2 Bontsd tényezők szorzatára a következő kifejezéseket:

a) $E(x) = x^2 + x + 1$

$x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$

Az *E(x)* kifejezéshez rendelt egyenletnek nincsen valós megoldása, tehát $E(x) = x^2 + x + 1$ *irreducibilis* az $\mathbb{R}$ halmazon.

b) $E(x) = 4x^2 + 12x + 9$

$4x^2 + 12x + 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$

Az *E(x)* kifejezéshez rendelt egyenletnek két egyenlő megoldása van, $x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}$ és

$E(x) = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = (2x+3)^2$

c) $E(x) = 6x^2 - 7x + 2$

$6x^2 - 7x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 1 > 0.$

Az $E(x)$ kifejezéshez rendelt egyenletnek lét különböző megoldása van:

$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{2}{3}$. $E(x) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) =$

$= (2x - 1)(3x - 2).$

Azok az egyenletek, amelyeket meg kell oldjunk többnyire nincsenek $ax^2 + bx + c = 0$ alakban felírva, de ekvivalensek az ilyen alakú egyenlettel. Az ilyen egyenleteket másodfokú egyenletre visszavezethető egyenletnek nevezhetjük.

Ahhoz, hogy azonosítsuk az együtthatókat és alkalmazhassuk a megoldási algoritmust szükséges több ekvivalens átalakítás. Az így kapott egyenlet ekvivalens az eredeti egyenlettel, következésképpen ugyanazok a megoldásai.

2. alkalmazás. Oldd meg a $\frac{3}{x} + x + 4 = 0$ egyenletet.

1. lépés: $ax^2 + bx + c = 0$, alakba hozzuk az egyenletet, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

2. lépés: Alkalmazzuk az egyenlet megoldási algoritmusát.

3. lépés: Leírjuk az egyenlet megoldáshalmazát, figyelembe véve az értelmezési tartományát is.

Megoldás.

$\frac{3}{x} + x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$ és $x \neq 0$;

$a = 1,\ b = 4,\ c = 3.$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0$. Az egyenlet valós megoldásai $x_1 = \frac{-4-2}{2} = -3$ és $x_2 = \frac{-4+2}{2} = -1$.

Az $x \neq 0$ feltételt mindkét kapott megoldás teljesíti, tehát $M = \{-3, -1\}$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Egészítsd ki a táblázat minden sorát a megadott egyenletek együtthatóival!

$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$-3x^2 - 5x + 0{,}4 = 0$			
$\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{3} = 0$			
$4x^2 - 8x = 0$			
$-\sqrt{3}\,x^2 + 4 = 0$			
$4x^2 = 0$			

2. Oldd meg az egyenleteket!
a) $3x^2 = 12$; **b)** $2x^2 - 6 = 0$;
c) $-x^2 + 5 = 0$; **d)** $x^2 + 4 = 0$.

3. Oldd meg az egyenleteket!
a) $x^2 - 6x = 0$; **b)** $2x^2 + x = 0$;
c) $-6x^2 + 4x = 0$; **d)** $-3x^2 = 0$.

4. Oldd meg az egyenleteket!
a) $3x^2 - 48 = 0$; **b)** $-\sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{50} = 0$;
c) $16t^2 + 1 = 0$; **d)** $16(1 - t)^2 - 1 = 0$;
e) $-16(1 - t)^2 - 25 = 0$; **f)** $32 - 2(4x + 3)^2 = 0$.

5. Oldd meg az egyenleteket!
a) $-\sqrt{3}\,x^2 + \sqrt{27}\,x = 0$; **b)** $x^2 - 4x = 0$;
c) $3t^2 + 6t = 0$; **d)** $(1-x)^2 - 4(1-x) = 0$;
e) $2(t-2)^2 - t + 2 = 0$; **f)** $-2x + 3 - 2(2x - 3)^2 = 0$.

6. Az alábbi egyenletek közül melyiknek vannak valós megoldásai? **a)** $3x^2 + 5x + 4 = 0$; **b)** $2x^2 + 7x + 5 = 0$; **c)** $9x^2 - 5x - 2 = 0$.

7. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi másodfokú egyenleteket:
a) $2x^2 + 9x + 10 = 0$; **b)** $x^2 - 5x + 4 = 0$;
c) $2x^2 + x\sqrt{7} - 7 = 0$; **d)** $-3x^2 - x + 2 = 0$;
e) $x^2\sqrt{10} - 7x + \sqrt{10} = 0$; **f)** $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$.

8. Hozd $ax^2 + bx + c = 0$, alakba a következő egyenleteket, majd oldd meg!
a) $x(x + 3) = 4$;
b) $(2x - 1)(-x + 3) = -7$;
c) $(x - 3)^2 = 2(x + 1)$;
d) $(3x + 1)^2 = (-x + 3)^2$;
e) $-2x(x + 3) = 6 + x$;
f) $(5x + \sqrt{7})(\sqrt{7} - 5x) = -24x^2$.

9. Bontsd tényezőkre az $E(x)$ kifejezést!
a) $E(x) = x^2 - x + 3$;
b) $E(x) = 4x^2 + 20x + 25$;
c) $E(x) = 6x^2 - 11x - 10$.

2.*l.* $ax^2 + bx + c = 0$ alakú egyenletekkel megoldható feladatok, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$

A matematikai modellezés révén sokkal jobban megismerhető és megérthető a környező valóság a felmerülő problémák megoldásával, valamint a konkrét körülményeknek megfelelő értelmezés és megoldások kiválasztásával.

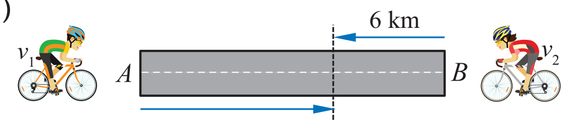
Oldjuk meg figyelmesen!

A valóság feltárásában az emberi megismerést segítő tudományágak számára nélkülözhetetlen számítási eszköz a másodfokú egyenlet.

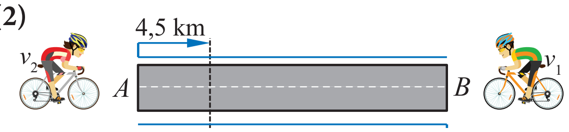
1. feladat. Két kerékpáros indul egyszerre egymás felé, az egyik az A a másik a B helységből, és oda-vissza
FT haladnak, az AB úton állandó, de eltérő sebességgel.

x a két helység távolsága. d_{11}-gyel, illetve d_{21}-gyel jelöljük az első, illetve a második kerékpáros által megtett távolságot az első találkozásig, d_{12}-vel, illetve d_{22}-vel az első, illetve a második kerékpáros által megtett távolságot a második találkozásig.
A kerékpárosok először a B helységtől 6 km-re találkoznak. Visszatérve az A helységtől 4,5 km-re találkoznak.
a) Mutasd ki, hogy d_{11} és d_{12} egyenesen arányosak d_{21}-gyel és d_{22}-vel!
b) Határozd meg a két helység távolságát!

(1)



(2)



Megoldás.

a) Jelölje v_1, illetve v_2 az első illetve második kerékpáros sebességét. Jelölje t_1 illetve t_2 az első illetve második találkozásig eltelt időt.

Akkor, $v_1 = \dfrac{d_{11}}{t_1} = \dfrac{d_{12}}{t_2}$ és $v_2 = \dfrac{d_{21}}{t_1} = \dfrac{d_{22}}{t_2}$, tehát $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{d_{11}}{d_{21}} = \dfrac{d_{12}}{d_{22}}$.

Az utolsó egyenlőség a d_{11} és d_{12} távnak a d_{21} és d_{22} távolsággal való egyenes arányosságát mutatja.

b) Az **(1)** ábrán a kerékpárosok első találkozásig megtett útját ábrázoltuk, tehát $d_{11} = x - 6$ és $d_{21} = 6$. A **(2)** ábrán a kerékpárosok második találkozásig megtett útját ábrázoltuk, tehát $d_{12} = 2x - 4{,}5$ és $d_{22} = x + 4{,}5$.

Figyelembe véve az **a)** alpontot, azt az $\dfrac{x-6}{6} = \dfrac{2x-4{,}5}{x+4{,}5}$, egyenletet kapjuk, amely az $x^2 - 13{,}5x = 0$ egyenletre vezethető vissza, és melynek megoldásai $x_1 = 0$ és $x_2 = 13{,}5$. Csak a nullától különböző megoldást fogadjuk el. Tehát $AB = 13{,}5$ km.

2. feladat. A mellékelt ábrán látható C pont az AB szakaszt $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{13}{8}$ arányban osztja.

a) A rajz alapján határozd meg az $\dfrac{AB}{AC}$ arányt!

b) Közelítsd századokra a két arány értékét jelentő tizedes számokat, és döntsd el, hogy az értékek egymáshoz közeliek-e!

c) Tudva, hogy $AB = x$ és $AC = 1$, határozd meg az x értékét úgy, hogy $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AB}{AC}$.

d) Számítsd ki: x^2, $x + 1$, $x - 1$ és $\dfrac{1}{x}$.

e) Számológépet használva, add meg az x értékét egy tizedes szám alakjában!

Az AB szakaszt 21 részre osztjuk.
A C pont a szakaszt két részre osztja.
AC a nagyobb rész, BC a kisebb rész.

Megoldás.

a) $AB = 21$ egys., $BC = 8$ egys., $AC = 13$ egys., $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{21}{13}$

b) $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{13}{8} = 1{,}625$ és $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{21}{13} = 1{,}61\ldots$.

Tehát a két arány megközelítőleg egyenlő.

c) Ha $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AB}{AC}$, akkor $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x}{1}$, amelyből az

$x^2 - x - 1 = 0$, és megoldásai $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Mivel $x > 0$, azt kapjuk, hogy $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

d) $x^2 = x + 1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{1}{x} = x - 1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

e) $x = 1{,}618033988749\ldots$

Athéni Parthenon
(477–432 Kr.e.)
$\dfrac{MN}{MP} = \dfrac{21}{13} = 1{,}61\ldots$

Ez a szám az aranyszám.
A matematikusok Pheidiasz (i.e. 490-431) építész neve után a görög φ (fi) betűvel jelölik. Pheidiasz az Athéni Parthenon építésénél használta.

Alkalmazás

Alkalmazás. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 1$ dm, $BC = 3$ dm és M és N a BC illetve CD oldalak azon pontja, melyre $BM - CN = \frac{3}{2}$ dm. Határozd meg az M és N pontok helyzetét úgy, hogy az AMN háromszög területe a téglalap területének egyharmada legyen.

1. lépés: A BM és CN szakaszok hosszának egyike legyen ismeretlen. Legyen $CN = x$.

2. lépés: $BM = x + \frac{3}{2}$, $DN = 1 - x$, $CM = \frac{3}{2} - x$.

$\mathcal{T}_{ABCD} = AB \cdot BC = 3$ dm² és $\mathcal{T}_{ABCD} = \mathcal{T}_{AMN} + \mathcal{T}_{ABM} + \mathcal{T}_{CMN} + \mathcal{T}_{ADN}$, $\mathcal{T}_{AMN} = 3 - (\mathcal{T}_{ABM} + \mathcal{T}_{CMN} + \mathcal{T}_{ADN})$.

Másrészt $\mathcal{T}_{AMN} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{T}_{ABCD}$, tehát $\mathcal{T}_{ABM} + \mathcal{T}_{CMN} + \mathcal{T}_{ADN} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - x\right) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (1 - x) = 2$,

amely a $2x^2 + x - 1 = 0$ másodfokú egyenletre vezethető vissza.

3. lépés: $2x^2 + x - 1 = 0$. $\Delta = 1 + 8 = 9$ és $x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$, $x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$.

Az egyenlet megoldásai a -1 és $\frac{1}{2}$ számok.

4. lépés: Mivel $CD = 1$ dm és N a DC oldal eleme, azt kapjuk, hogy $0 \le x \le 1$. Csak az $x = \frac{1}{2}$ megoldás elfogadott.

$CN = \frac{1}{2}$ dm, tehát N a CD szakasz felezőpontja, valamint M a BC szakasz azon pontja, melyre $BM = 2$ dm.

Gyakorlatok és feladatok

1. Számold ki annak a derékszögű háromszögnek a területét és kerületét, melynek az átfogója 10 cm, és az egyik befogójának hossza 2 cm-rel kisebb, mint a másik befogó hossza!

2. Határozd meg azt a pozitív valós számot, amely 6-tal nagyobb, mint az inverze!

3. **a)** Egy valós szám és inverzének összege 2. Határozd meg a számot!
b) Bizonyítsd be, hogy bármely pozitív valós szám esetén a szám és inverzének összege legalább 2-vel egyenlő!
c) Bizonyítsd be, hogy bármely negatív valós szám esetén a szám és inverzének összege legfeljebb –2-vel egyenlő!

4. Számítsd ki egy téglalap átlójának hosszát tudva, hogy kerülete 34 m és területe 60 m².

5. Az $a^2 + 11$, $2ab$ és $b^2 - 8$ számok számtani közepe 1. Határozd meg az a és b számok arányát!

6. Tanulmányozd kétféleképpen, hogy létezik-e két olyan egymás utáni természetes szám, melyek szorzata 136!

7. Egy konvex sokszögnek 90 átlója van. Határozd meg a sokszög oldalainak számát!

8. **a)** Írj egy olyan másodfokú egyenletet, melynek megoldásai $x_1 = 2$ és $x_2 = 5$.
b) Írj egy olyan másodfokú egyenletet, melynek megoldásai $x_1 = a$ és $x_2 = b$, ahol a és b adott két valós szám.
c) Tudva, hogy két szám összege 7 és szorzata 12, írj egy olyan másodfokú egyenletet, melynek megoldásai ezek a számok!
d) Legyen s az a és b számok összege, és p jelölje szorzatukat. Írj s és p segítségével egy olyan egyenletet, melynek megoldásai az a és b számok.

9. Határozd meg azt a két valós számot, melynek mértani közepe 40 és harmonikus közepe 32.

10. Határozd meg az x valós számot, tudva, hogy a szám és négyzetének különbsége maximális!

11. Adott az x valós szám. Ha az x^7 és x^3 racionális számok, akkor mutasd ki, hogy x is racionális szám!

ISMERETFELMÉRŐ *Hivatalból 10 pont*

I. tétel *Válaszd ki az egyetlen helyes válasz betűjelét az alábbi feladatokban!*

5p **1.** Az $a=\dfrac{5}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}$ szám értéke:

A. 0 B. 1 C. 5 D. − 5

5p **2.** Ha $a=-3\sqrt{5}$ és $b=\sqrt{180}$, akkor $a^2-\sqrt{5}\cdot b$ értéke:

A. 10 B. 15 C. 20 D. 30

5p **3.** Elvégezve a $2a\cdot 3bc+3b\cdot(-4ac)-4c\cdot(-2ab)$ számítást, azt kapjuk, hogy:

A. abc B. $-2abc$ C. $-abc$ D. $2abc$

5p **4.** Elvégezve az $(a+b)^2-(b-2a)^2+(2a-3b)(2a+3b)$ számítást azt kapjuk, hogy:

A. $a^2+6ab-9b^2$ B. $a^2-6ab-9b^2$ C. $a^2+6ab+9b^2$ D. $a^2-6ab+9b^2$

5p **5.** Egyszerűsítve a $\dfrac{\left(2a^2b^2\right)^2}{a^3b^2}$ törtet, $a\neq 0$, $b\neq 0$, a kapott eredmény:

A. $4a^2b^2$ B. $4a^2b$ C. $4ab^2$ D. $4ab$

5p **6.** Az $F(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ tört értéke $x=-1$, $y=3$ esetén:

A. 0,25 B. 0,5 C. 0,2 D. 0,52

5p **7.** Az $\dfrac{x+2}{1+x}$ törtet $1-x$-szel bővítve, a kapott eredmény $\dfrac{ax^2+bx+c}{1+dx^2}$. Az $a+b+c+d$ szám értéke:

A. 2 B. −1 C. −2 D. 1

5p **8.** Ha az $x=-\sqrt{2}$ valós szám az $x^2-2\sqrt{2}x+m=0$ egyenlet megoldása, akkor az m egyenlő:

A. $-\sqrt{2}$ B. 4 C. −6 D. $\sqrt{2}$

II. tétel *Az alábbi feladatok részletes megoldását kell leírni.*

5p **1. a)** Oldd meg $\mathbb{R}$-ben az: $x^2-4x+4=0$ egyenletet!

10p **b)** Határozd meg az $x, y\in\mathbb{R}$ számokat tudva, hogy $x^2-4x+4y^2+12y+13=0$.

2. Adott az $F(a,b)=\dfrac{a^2+b\cdot(2a+b)}{a^2+a+b\cdot(2a+b+1)}$ tört, ahol $a\neq -b$, $a\neq -b-1$.

10p **a)** Egyszerűsítsd az $F(a,b)$ törtet!

5p **b)** Határozd meg az F tört értékét tudva, hogy az a és b számok számtani közepe $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

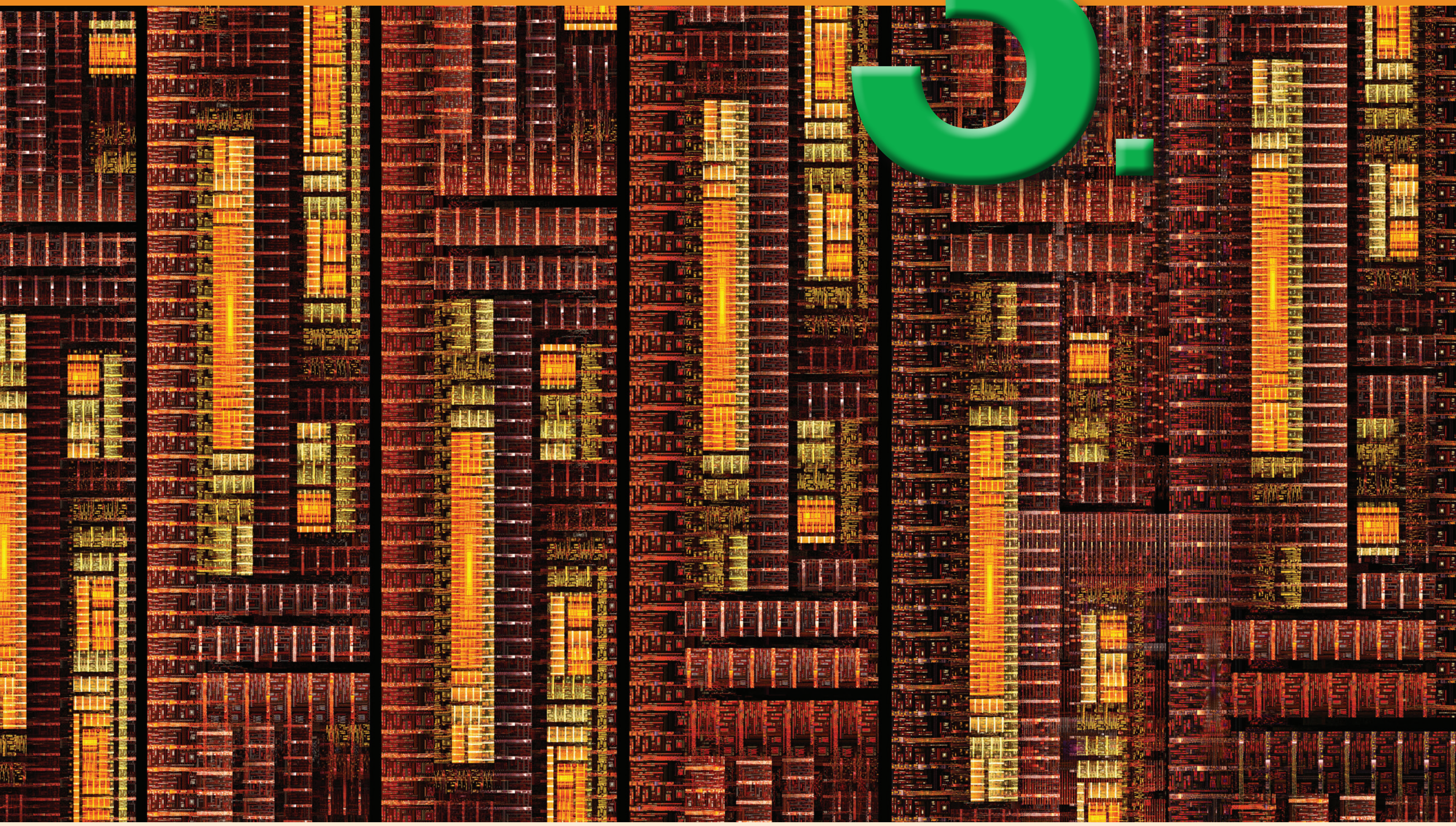
3. Adott az $E(x)=\left(\dfrac{x}{x+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3x^2}{1-x^2}\right)$ kifejezés, $x\in\mathbb{R}-\left\{-1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right\}$.

5p **a)** Tanulmányozd a $-\dfrac{3x^2}{1-x^2}=\dfrac{3x^2}{x^2-1}$ egyenlőséget, ahol $x\neq -1$, $x\neq 1$.

10p **b)** Mutasd ki, hogy $E(x)=\dfrac{x-1}{2x-1}$, bármely $x\in\mathbb{R}-\left\{-1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right\}$ esetén.

5p **c)** Határozd meg az n szám egész értékeit tudva, hogy $2\cdot E(n)$ egész szám.

3. FEJEZET



Függvények

1. **Véges halmazon értelmezett függvények. A függvény grafikonja. Számfüggvények grafikus képének mértani ábrázolása.**

2. $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ **alakú függvények, ahol** $a, b \in \mathbb{R}$**. Mértani értelmezés. A grafikus kép tanulmányozása.**

3. **A statisztika elemei.**

Sajátos kompetenciák

1.3. 2.3. 3.3. 4.3. 5.3. 6.3.

1. Véges halmazon értelmezett függvények. A függvény grafikonja. Számfüggvények grafikonjának mértani ábrázolása.

1.1. A függvény fogalma. A függvény grafikonja

A mindennapi életben, de a tudományban is (matematika, fizika, közgazdaságtan, szociológia stb.), azt a tényt, hogy egy mennyiség egy vagy több, egymástól független változó mennyiségtől függ, egy számítási képlet fejezi ki. Ez az írásmód mutatja a *függvényi kapcsolatot* a megfelelő mennyiségek között.

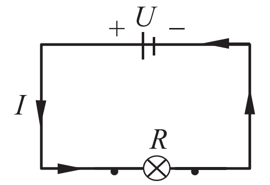
Példák:

1 Egy nullától különböző szám inverze és a szám között függvényi kapcsolat van. Ha a szám x és inverze y, akkor az x és y közötti függvényi kapcsolat az $xy = 1$ képlettel adható meg.

A két szám közül bármelyik megadható a másik függvényében: $x = \frac{1}{y}$, $y = \frac{1}{x}$.

2 Az I, U és R, mennyiségek között $R = \frac{U}{I}$ alakú függvényi kapcsolat van.

Ezt *Ohm törvényének* nevezzük. A képletben I a vezetőn áthaladó elektromos áram erőssége amperben, az U a végekre alkalmazott feszültség voltban és az R a vezető elektromos ellenállása ohmban kifejezve.

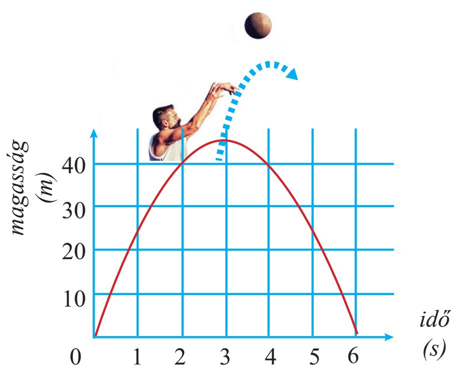


Oldjuk meg figyelmesen!

1. feladat FT Egy eszköz segítségével egy labdát felfelé dobnak. Az indítás pillanatától számított 6 másodperc elteltével a labda ismét a földre ér. Minden másodpercben egy másik eszköz méri a labda t pillanatban elért magasságát, amelyet $h(t)$ jelöl.

Egy kutató két listát állít össze:

- Az A listán rögzíti az időt másodpercről másodpercre, az indítás 0. pillanatától egészen addig a pillanatig, amikor a labda ismét a földre ér;
- A B listán a labda által t másodperc múlva elért magasságot rögzíti, és azt $h(t)$-vel jelöli.



A kutató megállapítja, hogy a t időtől függő h magasság a $h(t) = -5t^2 + 30t$ algebrai kifejezéssel írható le, majd elkészíti azt a rajzot, amelyben a $(t, h(t))$ párokat ábrázolja.

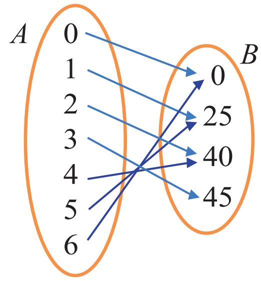
Írd le az A és B számhalmazokat!

a) Az időt jelentő másodperceket az $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz tartalmazza, és a labda által a t pillanatban elért magasságot pedig $h(t) = -5t^2 + 30t$ adja meg. Akkor a labda által a 0. pillanatban elért magasság $h(0) = 0$ (méter), majd az 1 s múlva a labda által elért magasság $h(1) = 25$ (méter), és így tovább. Azt kapjuk, hogy $B = \{0, 25, 40, 45\}$.

b) Készíts így egy táblázatot: az első sorba a t változó értékeit, a második sorba pedig a labda által, a t pillanatban elért magasságot írjad!

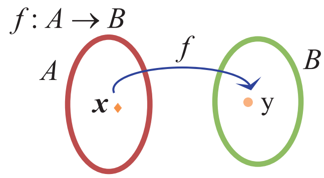
t	0	1	2	3	4	5	6
$h(t)$	0	25	40	45	40	25	0

c) Készíts egy diagramot, amelyben feltünteted a két halmazt, és az A halmaz minden eleméhez helyesen társítsad a B halmaz megfelelő elemét!



Fedezzük fel, értsük meg!

Értelmezés. Adott két, nem üres A és B halmaz. Azt mondjuk, hogy az A halmazon értelmeztük az *f függvényt*, ha valamilyen eljárással, az A halmaz minden eleméhez hozzárendeljük a B halmaz egy-egy *jól meghatározott* y elemét, ahol a B halmaz a függvény értékeit tartalmazza. Így jelöljük: $f: A \to B$ és így olvassuk *f leképezi az A halmazt a B halmazra.*



$x \in A,\ y \in B$ și $y = f(x)$

Az A halmazt a függvény *értelmezési halmazának*, vagy *értelmezési tartományának* nevezzük.
A B halmazt a függvény *értékhalmazának* vagy *értékkészletének* nevezzük.
Az az eljárást, melynek során az A halmaz mindegyik x elemének megfeleltetjük a B halmaz egy-egy jól meghatározott elemét, *megfeleltetési törvénynek* nevezzük.
Ha az A halmaz x elemének megfeleltetjük a B halmaz egyik y elemét, akkor azt mondjuk, hogy y a függvény x-ben *számított értéke*, vagy, hogy y az x-nek *f függvény* általi *képe*. Így írjuk: $y = f(x)$.

Az f függvény értékeinek halmazát a *függvény képének* nevezzük, és jele Imf.

$y \in Imf \Leftrightarrow$ létezik $x \in A$ úgy, hogy $y = f(x)$
vagy
$Imf = \{ f(x) \mid x \in A\}$

A megfeleltetési törvény megadása alapján egy függvény értelmezhető:
- diagram;
- táblázat;
- egy vagy több algebrai kifejezést tartalmazó képlet segítségével.

Példa. Az előző feladatban $h: A \to B$,
ahol $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$ és $B = \{0, 25, 40, 45\}$.
- diagrammal: $h : A \to B$ (lásd az 1. feladat diagramját)
- táblázattal: $h : A \to B$,

t	0	1	2	3	4	5	6
$h(t)$	0	25	40	45	40	25	0

- egy algebrai kifejezést tartalmazó képlet segítségével: $h : A \to B,\ h(t) = -5t^2 + 30t$.

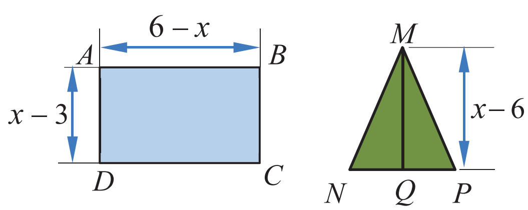
Alkalmazás

Egyes függvények esetében további feltételek jelennek meg, amelyek megkövetelik a függvénynek több képlettel való meghatározást.

2. feladat A mellékelt ábrán $ABCD$ téglalap, MNP egyenlő szárú háromszög, melynek magassága MQ és alapja NP = 4 cm, valamint x egy centiméterben kifejezett, valós számmal megadott hosszúság.

FT

a) Számítsd ki téglalap területét $x = 5$ esetén!
b) Számítsd ki a háromszög területét $x = 7$ esetén!
c) Határozd meg az x olyan valós értékeinek halmazát, amelyre a téglalap megszerkeszthető!
d) Határozd meg az x olyan valós értékeinek halmazát, amelyre a háromszög megszerkeszthető!



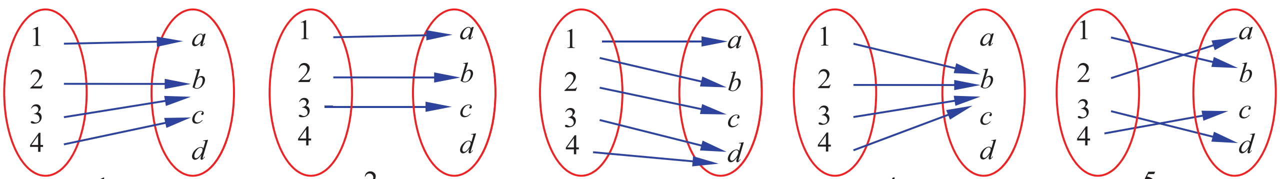
Megoldás:
a) $AB = 6 - 5 = 1$(cm); $AD = 5 - 3 = 2$(cm).
Akkor a téglalap területe 2 cm².
b) $MQ = 7 - 6 = 1$(cm); $NP = 4$ (cm).
Akkor a háromszög területe 2 cm².
c) $AB = 6 - x > 0$ és $AD = x - 3 > 0$. tehát $x \in (3, 6)$.
d) $MQ = x - 6 > 0$, tehát $x \in (6, \infty)$.

A fenti követelmények megoldása alapján kijelenthetjük, hogy:
1. Nem szerkeszthető meg, tehát nem számolható ki a két alakzat területe ugyanazon x értékek esetén.
2. Ha $x \in (3, 6)$, akkor a téglalap területe $(x - 3)(6 - x)$.
3. Ha $x \in (6, \infty)$, akkor a háromszög területe $2(x - 6)$.
Értelmezhetünk egy függvényt a következőképpen: Legyen $A = (3, 6) \cup (6, \infty)$. Egy alakzat területe pozitív szám, tehát $B = (0, \infty)$ (nem egyedi ez a megválasztás). A megfeleltetési törvény alapján az A halmaz mindegyik x eleméhez hozzárendelhető annak az alakzatnak a területe, amely megszerkeszthető, vagyis a téglalap területe abban az esetben, ha $x \in (3, 6)$ és a háromszög területe, ha $x \in (6, \infty)$

Következésképpen $f : (3, 6) \cup (6, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} (x-3)(6-x), & \text{ha } x \in (3,6) \\ 2x-12, & \text{ha } x \in (6,\infty) \end{cases}$

Gyakorlatok és feladatok

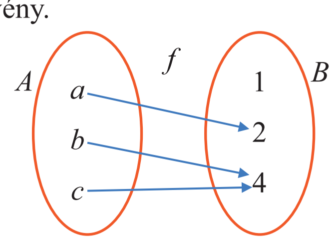
1. Adott az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és $B = \{a, b, c, d\}$ halmaz.
a) Vizsgáld meg, hogy az alábbi diagramok közül melyiken értelmeztünk egy $f : A \to B$ függvényt!.



1. 2. 3. 4. 5.

b) Indokold az a tényt, hogy a többi megfeleltetés nem függvény!

2. $f : A \to B$ mellékelt diagrammal értelmezett függvény.



a) Határozd meg az értelmezési tartományt, az értékkészletet, és sorold fel a függvény értékeit!
b) Másold a füzetbe és egészítsd ki:
$f(a) = \dots$ $\quad f(b) = \dots$
$f(c) = \dots$ $\quad f(a) + 2 \cdot f(b) + 3 \cdot f(c) = \dots$

3. Az $f : A \to B$ függvényt a mellékelt táblázattal értelmeztük.

x	0	1	2	77
$f(x)$	3	5	7	157

a) Írd le az értelmezési tartomány elemeit!
b) Írd le az értékkészlet elemeit!
c) Ábrázold a függvényt diagram segítségével!

4. Az alábbi táblázatok függvényt értelmeznek!

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	4	9	16

x	–1	0	1	2	7
$g(x)$	–3	0	3	6	21

a) Határozd meg mindegyik függvény értelmezési tartományát és az értékeinek halmazát!
b) Add meg egy-egy képlet segítségével az $x \to f(x)$, illetve $x \to g(x)$ megfeleltetést!

5. A következő függvényeket képlettel értelmeztük. Határozd meg mindegyik esetben az értelmezési tartományt, az értékek halmazát és a függvény képét!
$g : \{1, 2, 3, 4\} \to (0, \infty)$,
$g(x) = x^2$

$$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \in (-\infty, 0) \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$t(x) = \begin{cases} -2x-3, & \text{ha } x \in \{-1, -2\} \\ 3x-1, & \text{ha } x \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

6. Adott az $A = \{1, 2\}$ és $B = \{x, y, z\}$ halmaz.

a) Írd le diagram segítségével az összes olyan függvényt, melyet az A halmazon értelmezhetünk, és értékei a B halmaz elemei!

b) Határozd meg azon függvények számát, melyek az A halmazon értelmezettek, és értékeik a B halmaz elemei!

7. **a)** Írd le a legkisebb öt olyan természetes számot, amelyet 3-mal osztva a kapott osztási maradék 1!

b) Határozz meg egy olyan szabályt, amely alapján az 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 … számsorozat adható meg!

c) Határozz meg az $\mathbb{N}$ természetes számok halmazán értelmezett olyan függvényt, melynek értékei az $M = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 \ldots\}$ végtelen halmaz elemei!

d) Fejezd ki egy képlettel a c) alpontban leírt megfeleltetést!

8. Adott az $f: A \to B, f(x) = -x + 1$ függvény, ahol $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \le 2\}$. Írd le azokat az elemeket, amelyek nem hiányozhatnak a B halmazból!

9. Az alábbi táblázat két, A és B halmaz közötti megfeleltetési törvényt értelmezi.

x	–3	–1	0	2	5	8	10	15
$f(x)$	–6	–2	0	4	10	16	20	30

a) Határozd meg a –1 szám, f függvény általi képét!

b) Határozd meg azt a számot, melynek képe 10!

c) Írd le a megfeleltetési törvényt megadó képletet!

d) Számítsd ki:
$3 \cdot f(-3) + f(0) - f(5) + 2 \cdot f(10) - f(15)$.

10. Adott az $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, függvény, $f(n) =$ a 9^n szám utolsó számjegye.

a) Számold ki $f(0)$ és $f(3)$.

b) Határozd meg Imf-et!

c) Számítsd ki $f(3) + f(33) + f(333) - 3 \cdot f(3330)$.

11. Adott az $f: A \to B$ függvény, ahol $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| \le 2\}$ és $f(x) = \sqrt{x+1} + x$.

a) Írd le az értelmezési tartomány elemeit!

b) Add meg a 3 szám f függvény általi képét!

c) Ha $M = \{f(x) \mid x \in A\}$, akkor írd le az M halmaz elemeit!

d) Bizonyítsd be, hogy $-1,\ 1,\ \sqrt{2}+1,\ \sqrt{3}+2,\ 5$ a B halmaz eleme.

e) Tanulmányozd, hogy igaz-e az $M = B$ egyenlőség!

12. Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát tudva, hogy az értékkészlet mindegyik eleme az értelmezési tartomány valamely elemének képe:

a) $f: A \to \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}, f(x) = -2x + 1$;

b) $g: A \to \{0, 1, 4, 9\}, g(x) = x^2$;

c) $h: A \to \{-2, -1, 0, 2, 3\}, h(x) = x - 3$.

13. Határozd meg az alábbi függvények minimális értékkészletét tudva, hogy:

a) $f: \{-3, -1, 0, 1, 2\} \to B,\ f(x) = -x + 1$;

b) $h: \{-2, -1, 1, 2, 0\} \to B, h(x) = x^2$;

c) $g: \{-1, 0, 1, 2, 4\} \to B, g(x) = 2x - 3$.

14. Egy egyenlő oldalú háromszög oldalhossza $(4 - x)$ cm, ahol x nullától különböző természetes szám, a kerülete pedig p cm.

a) Fejezd ki egy számítási képlet segítségével a p mennyiség és x változó közötti függvényi kapcsolatot!

b) Értelmezz egy olyan függvényt, amely meghatározza az a) alpontban leírt kapcsolatot, megadva az értelmezési tartományát, az értékkészletét és a megfeleltetési törvényét!

c) Számítsd ki a 3 számnak az a) alpontban megadott függvény általi képét!

d) Ellenőrizd, hogy 7 a függvény értékei halmazának eleme-e!

e) Értelmezd a függvényt diagram, majd értéktáblázat segítségével!

15. Írd a füzetbe az alábbi követelményeket, és egészítsd ki úgy, hogy igaz kijelentéseket kapj!

a) Adott $A = \{0, 1, 2\}$ és $B = \{a, b\}$.
Az A halmazon értelmezett függvények száma, melyek értékei a B elemei egyenlő ... .
A B halmazon értelmezett függvények száma, melyek értékei az A elemei egyenlő ... .

b) Ha $C = \{-3, 3\}$ és $D = \{-2, 1, 2\}$, akkor az olyan $f: C \to D$ függvénye száma, melyekre $f(x) > 0$, bármely $x \in C$ esetén, egyenlő ... .

c) Adott a $g: \mathbb{R} \to M$, $g(x) = |x|$ függvény.
Az M halmaz legkisebb eleme …

d) Az alábbi táblázat a h: ... → …, $h(n) = …$ függvényt értelmezi.

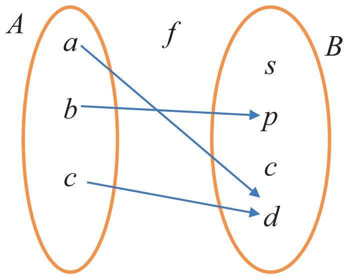
n	–1	0	1	2	10
$h(n)$	5	0	–5	–10	–50

e) Az $i: A \to \{-4, 0, 4, 8\}$, $i(x) = 4x$ függvény maximális értelmezési tartománya: $A = …$.

2.*l*. A függvény grafikonja. Számfüggvények grafikus képének mértani ábrázolása.

Oldjuk meg figyelmesen!

1. feladat. ET Az alábbi diagramon az $A = \{a, b, c\}$ és $B = \{s, p, c, d\}$ halmaz, valamint a két halmaz közötti megfeleltetési törvény van ábrázolva.



a) Vizsgáld meg, hogy az (A, B, f) elemhármas függvényt értelmez-e! Indokold válaszod!
b) Nevezd meg az értelmezési tartományt és azt a halmazt, melyben a függvény értékei találhatóak!
c) Készítsd el a függvénynek megfelelő értéktáblázatot!
d) Határozd meg elemeinek felsorolásával az $f: A \to B$ függvény értékeinek halmazát!
e) Írd le az $A \times B$ Descartes-féle szorzat elemeit!
f) Írd le elemeinek felsorolásával az $A \times B$ Descartes-féle szorzat G_f részhalmazát, ha így értelmezzük: $G_f = \{ (x, y) \in A \times B \mid x \in A \text{ és } y = f(x)\}$.

Megoldás

a) Az f megfeleltetési törvény az A halmaz mindegyik elemének megfelelteti a B halmaz egy-egy jól meghatározott elemét, tehát az (A, B, f) elemhármas egy függvényt értelmez.

b) Az értelmezési tartomány az A halmaz, valamint B halmaz tartalmazza a függvény értékeit.

c)

x	a	b	c
$f(x)$	d	p	d

d) A függvény értékeinek halmaza, azaz a függvény képe az $Imf = \{f(x) / x \in A\} = \{f(x) \cdot x \in \{a, b, c\}\} = \{f(a), f(b), f(c)\} = \{d, p\}$ halmaz. Észrevehető, hogy $\{d, p\} \subset \{s, p, c, d\}$, tehát $Imf \subset B$.

e) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ és } y \in B)\}$.

Az $A \times B$ Descartes-féle szorzat elemei:

(a, s), (a, p), (a, c), (a, d),
(b, s), (b, p), (b, c), (b, d),
(c, s), (c, p), (c, c), (c, d),
(d, s), (d, p), (d, c), (b, d).

f) Mivel $x \in A$, $A = \{a, b, c\}$ és $y = f(x)$, azt kapjuk, hogy $G_f = \{(a, d), (b, p), (c, d)\}$.

Fedezzük fel, értsük meg!

Adott az $f: A \to B$ függvény.

Értelmezés. Az $A \times B$ Descartes-féle szorzat G_f részhalmazát a *függvény grafikonjának* nevezzük, ahol $G_f = \{(x, y) \in A \times B \mid x \in A \text{ és } y = f(x)\}$ halmazként van értelmezve.

Megjegyzés. **1)** $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in A$ és $y = f(x)$;   **2)** $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.

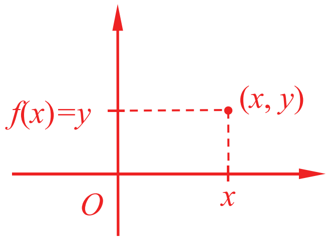
Példa: Az $f: \{-1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$, függvény értéktáblázata

x	-1	2	3
$f(x)$	-5	1	3

A táblázat alapján a függvény grafikonja: $G_f = \{(-1, -5), (2, 1), (3, 3)\}$.
$(2, 1) \in G_f$ mivel $2 \in \{-1, 2, 3\}$ és $1 = f(2)$.
$(4, 5) \notin G_f$ mivel $4 \notin \{-1, 2, 3\}$ és annak ellenére, hogy $2 \cdot 4 - 3 = 5$.

Értelmezés. Egy függvényt *számfüggvénynek* nevezünk, ha a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete is a valós számok halmazának részhalmaza.
$f: A \to B$ számfüggvény $\Leftrightarrow A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$

Adott $f: A \to B$, $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$ számfüggvény.
Az f függvény grafikonja az $A \times B$ Descartes-féle szorzat részhalmaza $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$. Tehát egy $f: A \to B$ számfüggvény grafikonja az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Descartes-féle szorzat részhalmaza, vagyis $G_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Következtetés: A számfüggvény grafikonjának minden eleméhez hozzárendelhető az x és y koordinátájú pont, ahol $y = f(x)$. Ez a pont ábrázolható a sík xOy derékszögű koordináta-rendszerében.



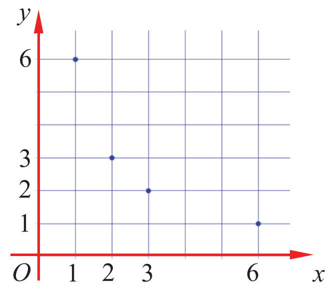
Az összes olyan x és y koordinátájú pont halmazát, ahol $y = f(x)$, a *függvény grafikonja mértani ábrázolásának* nevezzük.

Megjegyzés. Az „*f függvény grafikonjának mértani ábrázolása*” kifejezést általában az „*f függvény grafikus képe”* kifejezésként használjuk.

Példa. **a)** Ábrázold az f függvény grafikonját, ha a függvényhez rendelt értéktáblázat:

x	1	2	3	6
$f(x)$	6	3	2	1

b) Add meg az f függvény képletét!
Megoldás. **a)** $G_f = \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$
A G_f halmaz elemeit ábrázoljuk egy xOy koordináta-rendszerben:

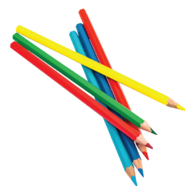


A mértani ábrázolása 4 pontból áll.
b) *Megjegyzés:* $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$, tehát az x és y fordítottan arányos mennyiségek, és teljesítik az $x \cdot y = 6$ relációt, azaz $y = \frac{6}{x}$. Tehát $f: \{1, 2, 3, 6\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{6}{x}$.

Alkalmazás

2. feladat Johanna színes ceruzákat vásárol. A ceruza ára 1,5 lej. Johanna n-nel jelöli a megvásárolt ceruzák számát, S-sel a fizetett összeget, majd elkészíti az értéktáblázatot.
ET

n	2	4	5
S			



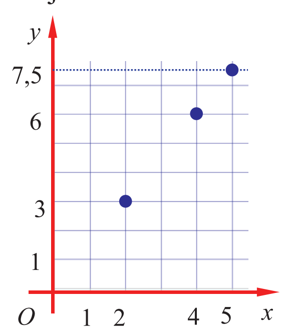
a) Fejezd ki az S összeget a megvásárolt ceruzák n számának függvényében!
b) Töltsd ki a Johanna által készített értéktáblázatot!
c) Az értéktáblázat alapján értelmezd a függvényt egy képlet segítségével!
d) Írd le a **c)** alpontban értelmezett függvény értékeinek halmazát!
e) Határozd meg a vásárolt ceruzák n számát, ha a fizetett összeg 12 lej!
f) Magyarázd meg, hogy $(n, 12)$ nem eleme a **c)** alpontban értelmezett függvény grafikonjának!
g) Írd le a **c)** alpontban értelmezett függvény grafikonját, majd ábrázold grafikusan!

Megoldás:
a) $S = 1{,}5 \cdot n$
b) Mivel $S = 1{,}5 \cdot n$, akkor:

n	2	4	5
S	3	6	7,5

$n = 2 \Rightarrow S = 1{,}5 \cdot 2 = 3.$
$n = 4 \Rightarrow S = 1{,}5 \cdot 4 = 6.$
$n = 5 \Rightarrow S = 1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5.$
c) A táblázat alapján
$S: \{2, 4, 5\} \to \{3; 6; 7{,}5\}$,
$S(n) = 1{,}5 \cdot n$.

d) $ImS = \{S(n) \mid n \in \{2, 4, 5\}\} = \{3; 6; 7{,}5\}$.
e) Ha n azon vásárolt ceruzák száma, amelyért 12 lejt fizetnek, akkor $1{,}5 \cdot n = 12$, tehát $n = 8$.
Felelet: 8 ceruza
f) A grafikon értelmezése alapján
$(n, 12) \in G_S \Leftrightarrow n \in \{2, 4, 5\}$ és $12 = S(n)$.
De $8 \notin \{2, 4, 5\}$, tehát $(n, 12) \notin G_S$.
g) $G_S = \{(n, S(n)) \mid n \in \{2, 4, 5\}\} =$
$= \{(n; 1{,}5 \cdot n) \mid n \in \{2, 4, 5\}\} =$
$= \{(2, 3), (4, 6), (5; 7{,}5)\}$.



A fenti ábrán az S függvény grafikus képe látható.

Gyakorlatok és feladatok

1. Adj példát két számfüggvényre és két olyan függvényre, amely nem számfüggvény!

2. Adott az $f: A \to B$ függvény. Az A halmaznak a eleme, a B halmaznak B b eleme van, $a, b \in \mathbb{N}$.

2.1. Hasonlítsd össze a G_f és $A \times B$ halmazok elemeinek számát!

2.2. Keress az a és b számok között egy relációt tudva, hogy $G_f = A \times B$.

3. Adott g: $\{-2, -1, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$.

a) Határozd meg a G_g halmazt!

b) Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben a G_g halmazt!

4. Adott az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x - 1$ függvény valamint az $A(2, 3)$, $B(-1, -1)$, $C(-2, 1)$, $D(0, -1)$, $E(\sqrt{3}, \sqrt{3} + 1)$ pontok. Végezd el a szükséges számításokat, majd tanulmányozd, hogy a megadott pontok közül melyik eleme és melyik nem eleme a függvény grafikonjának!

5. **a)** Készítsd el a $g: \{0, 1, 4, 9\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ függvényhez rendelt értéktáblázatot!

b) Határozd meg a függvény grafikonját elemeinek felsorolásával!

c) Ábrázold a függvény grafikonját derékszögű koordináta-rendszerben!

6. Adott a h: $A \to \{-2, 0, 4\}$, $h(x) = x + 4$ függvény.

a) Határozd meg az A halmaz elemeit tudva, hogy 3 eleme van!

b) Ábrázold grafikusan a függvényt!

7. Adott az f: $\{-1, 0, 1\} \to B, f(x) = 3x + 2$ függvény.

a) Határozd meg a függvény értékeinek halmazát, majd írd le a legkevesebb elemszámmal rendelkező B halmazt!

b) Ábrázold grafikusan a függvényt!

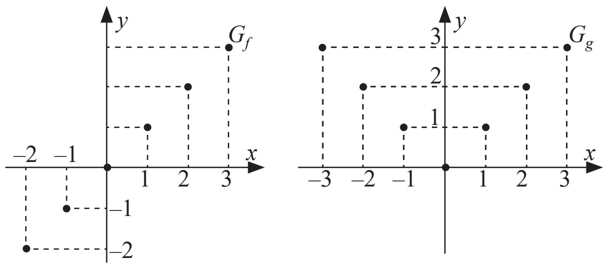
8. Adott az $f: \{0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 4$ függvény.

a) Ellenőrizd, hogy $A(-3, 7)$ eleme a függvény grafikonjának!

b) Ábrázold a függvény grafikonját derékszögű koordináta-rendszerben!

9. A h függvény mértani ábrázolása az $\{M,N,P,Q\}$ ponthalmaz, $M(-3,1)$, $N(-1,3)$, $P(1,-3)$, $Q(3,-1)$. Határozd meg a függvény értelmezési tartományát és az Imf halmazt!

10. A mellékelt ábrán az f és g függvény grafikonja látható.



a) Írd le mindegyik függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

b) Írd le egy-egy képlettel a két függvény megfeleltetési törvényét!

11. **a)** Adott az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + a$. függvény. Határozd meg az a értékét tudva, hogy $A(-2, 3) \in G_f$.

b) A $B(b, 3b)$ pont a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x-4}{3}$ grafikus képének eleme. Határozd meg a b számot!

12. Egy téglalap oldalainak hossza $2x$ cm, illetve y cm, kerülete pedig 18 cm, ahol x és y természetes szám.

a) Írd le az x és y közötti függvényi kapcsolatot, kifejezve az y számot az x függvényében!

b) Írd le az x által felvehető természetes értékek A halmazát, valamint az y által felvehető természetes értékek B halmazát!

c) Értelmezzük azt az $f: A \to B$ függvényt, amely A mindegyik x eleméhez hozzárendeli a B halmaznak az a) alpontban kifejezett egy-egy y elemét. Értelmezd az f függvényt háromféleképpen: képlet, értéktáblázat és diagram segítségével!

d) Ábrázold grafikusan az f függvényt!

e) Írd le az x és y közötti függvényi kapcsolatot, kifejezve az x számot az y függvényében!

f) Írd le az y által felvehető természetes értékek B halmazát, valamint az x által felvehető természetes értékek A halmazát!

g) Értelmezzük azt a $g: B \to A$ függvényt, amely B mindegyik y eleméhez hozzárendeli az A halmaznak az e) alpontban kifejezett egy-egy x elemét. Értelmezd az g függvényt háromféleképpen: képlet, értéktáblázat és diagram segítségével!

h) Ábrázold grafikusan a g függvényt!

2. $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ alakú függvények, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Mértani értelmezés. A grafikus kép tanulmányozása.

1.ℓ. $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ alakú függvények, ahol $a, b \in \mathbb{R}$

1. feladat. Egy szupermarketben egy biológiailag lebomló zacskó ára b lej. A megvásárolt zöldségeket biológiailag lebomló zacskóba csomagolva elektronikus mérlegre teszik. Automatikusan megjelenik egy kg zöldség ára a lej. Továbbá kiíródik az x kg zöldségért fizetett y lej összeg is, amely tartalmazza a biológiailag lebomló zacskó árát is. Mivel y és x mennyiségek között függvényi kapcsolat van, $f(x)$-szel jelöljük az x kg zöldségért fizetett y összeget.

FT

a) Határozzuk meg az $y = f(x)$ függvényi kapcsolatot megadó algebrai kifejezést!

b) Az **a)** alpontnál kapott függvényi kapcsolat alapján add meg azt az f függvényt, amely az A halmazon van értelmezve és értékei az $\mathbb{R}$ halmaz elemei, majd add meg az A halmazt a leírt feltételek alapján!

c) Dolgozz újra az **a)** alpont követelményei alapján az $a = 1{,}5$ és $b = 0{,}75$ sajátos esetben!

d) Az $\{0{,}5;\ 1{,}5;\ 2\} \subset A$ halmazt használva készítsd el az előző alpontban kapott függvény értéktáblázatát!

e) A **d)** alpontban elkészített értéktáblázat alapján azt kapjuk, hogy $(0{,}5;\ 1{,}5)$, $(1{,}5;\ 3)$ és $(2;\ 3{,}75)$ a G_f halmaz eleme. Mutasd ki, hogy az $A(0{,}5;\ 1{,}5)$, $B(1{,}5;\ 3)$ és $C(2;\ 3{,}75)$ pontok kollineárisak!

Megoldás. **a)**

- egy kg zöldség ára a lej;
- x kg zöldségért fizetett összeg ax lej, és ehhez még hozzáadják a biológiailag lebomló zacskó b lej árát

Az x kg zöldségért fizetett összeg $ax + b$, tehát $f(x) = ax + b$ az $y = f(x)$ függvényi kapcsolatot megadó algebrai kifejezés alakja.

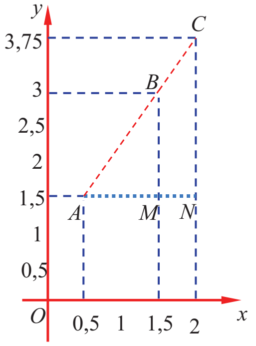
b) Az $f: A \to B$, $f(x) = ax + b$ függvényt kapjuk.
Mivel az A halmaz x elemei a vásárolt zöldség kilogrammban kifejezett mennyiségét jelentik, azt kapjuk, hogy $x > 0$, tehát $A = (0, \infty)$.
Az $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ függvényt kapjuk.

c) $a = 1{,}5$ és $b = 0{,}75$ vagyis $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1{,}5 \cdot x + 0{,}75$.

d)

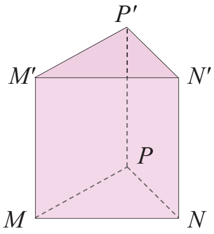
x	0,5	1,5	2
$f(x)$	1,5	3	3,75

e) Ábrázoljuk az $A(0{,}5;\ 1{,}5)$, $B(1{,}5;\ 3)$ és $C(2;\ 3{,}75)$ pontot, majd az AMB és ANC háromszögek hasonlóságát használva bizonyítjuk a pontok kollinearitását.



Feladat a portfólióba

Jelöljük P_1-gyel a mellékelt ábrán bemutatott $MNPM'N'P'$ háromoldalú hasábot. A hasáb éleinek centiméterben kifejezett hossza: $MN = 4x - 2$, $MP = NP = 10 - x$, $MM' = 1$.
Egy másik, P_2-vel jelölt hasáb oldalfelszíne17 cm^2-rel kisebb, mint a P_1 hasáb oldalfelszíne.



a) $x = 2$ esetén számítsd ki a P_1 és P_2 hasábok oldalfelszínét!

b) Adott az $x \to f(x)$ megfeleltetési törvény, ahol $x \in A$, $A = \{1, 2, 3\}$, valamint $f(x) \in \mathbb{R}$ és a P_2 hasáb oldalfelszínét jelenti. Írd le képlet segítségével az $f(x)$ megfeleltetési törvényt!

c) Add meg az $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ megfeleltetési törvényt előbb egy diagram majd egy értéktáblázat segítségével!

d) Írd le a G_f halmazt elemeinek felsorolásával!

Megjegyzés. A fent elemzett gyakorlati helyzetek megkövetelik az $f(x) = ax + b$ alakú algebrai kifejezések által meghatározott függvények tanulmányozását.

Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, alakú függvények esetén, ahol a és b adott valós számok, a következő eseteket különböztetjük meg:
1) Ha $a = 0$, akkor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$, alakú lesz, $b \in \mathbb{R}$ és *állandó függvénynek* nevezzük.
2) Ha $a \neq 0$, akkor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ függvényt *első fokú függvénynek* nevezzük.

Példák:
1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4$ állandó(konstans) függvény.
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1{,}5 \cdot x + 0{,}75$ első fokú függvény, ahol $a = 1{,}5$ és $b = 0{,}75$.
3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x$ első fokú függvény, ahol $a = -2$ *és* $b = 0$.
Ellenpélda: A következő függvények nem I. fokú függvények:
1) $f: \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ (az értelmezési tartomány nem $\mathbb{R}$)
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x+1, & x<0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ (az $f(x)$ kifejezés nem ugyanaz az értelmezési tartomány minden eleme esetén)

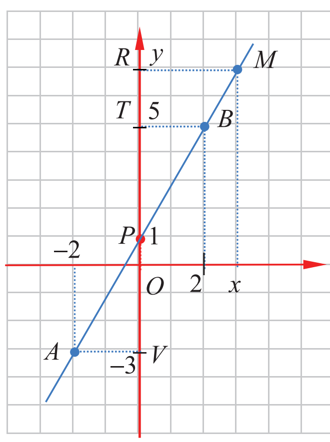
Fedezzük fel, értsük meg!

2. feladat Adott az $A(-2, -3)$ és $B(2, 5)$ két pont a derékszögű koordináta-rendszerben.

FT **a)** Mutasd ki, hogy létezik egy olyan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ alakú függvény, ahol a és b valós szám, amelyre: $(-2, -3) \in G_f$ és $(2, 5) \in G_f$.
b) Határozd meg az Oy tengely azon $P(x, y)$ pontját, melyre $(x, y) \in G_f$.
c) Határozd meg az Ox tengely azon $Q(x, y)$ pontját, melyre $(x, y) \in G_f$.
d) Tudjuk, hogy két pont meghatároz egy egyenest. Bizonyítsd be, hogy: $M(x, y) \in AB \Leftrightarrow (x, y) \in G_f$.

Megoldás: **a)** Felhasználjuk, hogy $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y$.
$(-2, -3) \in G_f \Leftrightarrow f(-2) = -3 \Leftrightarrow -2a + b = -3$, $(2, 5) \in G_f \Leftrightarrow f(2) = 5 \Leftrightarrow 2a + b = 5$.
A $\begin{cases} -2a + b = -3 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$ egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása $a = 2$ és $b = 1$.
A keresett függvény: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

b) $P(x, y) \in Oy \Leftrightarrow x = 0$, tehát $P(0, y)$, $(0, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(0)$. Azt kapjuk, hogy $y = 1$ és $P(0, 1)$.
c) $Q(x, y) \in Ox \Leftrightarrow y = 0$, tehát $Q(x, y)$. $(x, 0) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = 0$. Tehát $2x + 1 = 0$ és $Q(-0{,}5; 0)$.
d) Ábrázoljuk grafikusan az $A(-2, -3)$, $B(2, 5)$ valamint $P(0, 1)$ pontot, amely $Oy \cap G_f$, jelenti a **b)** alpont alapján.



Mivel $(-2, -3)$, $(2, 5)$ és $(0, 1)$ G_f halmaz eleme, az egyszerűbb megfogalmazás végett mondhatjuk, hogy az $A(-2, -3)$, $B(2, 5)$ és $P(0, 1)$ pont az f függvény grafikus képének eleme.
Végül be kell bizonyítanunk, hogy $M(x, y) \in AB \Leftrightarrow M(x, y) \in G_f$.
A bizonyításhoz a következő lépéseket követjük:
I) Bizonyítjuk, hogy a grafikus kép $A(-2, -3)$, $B(2, 5)$ és $P(0, 1)$ pontjai kollineárisak.
A $T(0, 5)$, $V(0, -3)$ és $P(0, 1)$ kollineáris pontok mivel az Oy tengelyen helyezkednek el. Mivel $\frac{VA}{TB} = \frac{2}{2} = 1$ és $\frac{VP}{TP} = \frac{4}{4} = 1$ akkor az AVP és BTP hasonló háromszögek. Következik, hogy APV és BPT szögek kongruensek. Mivel T, P, V kollineáris pontok, azt kapjuk, hogy A, P és B kollineáris pontok.

II) Bizonyítjuk, hogy: ha $M(x, y) \in G_f$, akkor $P(0, 1)$, $B(2, 5)$ és $M(x, y)$ kollineárisak.
A $P(0, 1)$, $T(0, 5)$ és $R(0, y)$ pontok kollineárisak, a BPT és MPR derékszögű háromszögek. Mivel $M(x, y) \in G_f$ következik, hogy $y = 2x + 1$. Ha $y > 1$, akkor $x > 0$. Majd $\frac{PT}{PR} = \frac{4}{y-1} = \frac{4}{2x+1-1} = \frac{2}{x}$ és $\frac{TB}{RM} = \frac{2}{x} = \frac{PT}{PR}$.
Tehát $BPT\Delta \sim MPR\Delta$ (SZ.O.SZ). Azt kapjuk, hogy $BPT\sphericalangle \equiv MPR\sphericalangle$, vagyis a P, B, M kollineáris pontok.

III) Bizonyítjuk, hogy: ha $M(x,y) \in G_f$, akkor $M(x, y) \in AB$. A II.-ból következik, hogy $M(x, y) \in PB$, az I.-ből pedig, hogy a PB és AB egyenesek egybeesnek. Tehát $M(x, y) \in AB$.
IV) Bizonyítjuk, hogy: ha $M(x,y)\in AB$, akkor $M(x, y) \in G_f$. Ha $M(x, y)\in AB$, akkor a BPT és MPR hasonló háromszögek, és a hasonlóság alapján igaz, hogy $\frac{PT}{PR} = \frac{TB}{RM}$. De, $\frac{PT}{PR} = \frac{4}{y-1}$ és $\frac{TB}{RM} = \frac{2}{x}$, tehát $\frac{4}{y-1} = \frac{2}{x}$.
Azt kapjuk, hogy $y = 2x + 1$, vagyis $y = f(x)$.
Következésképpen, ha $M(x,y)\in AB$, akkor $y = f(x)$, ami igazolja, hogy $M(x, y) \in G_f$.
Megjegyzés. A G_f jelölést és az „*f függvény grafikus képe*" megfogalmazást használjuk mind az $(x, f(x))$ valós számpárok halmazára, mind a síkbeli, $(x, f(x))$ koordinátákkal rendelkező pontok halmazára, de a szövegkörnyezetből kiderül, hogy a két jelentés közül melyikről van szó.

- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, alakú függvények esetén, ahol a és b adott valós szám, a függvény grafikus képét G_f szimbólummal jelöljük, és az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Descartes-féle szorzat egy részhalmaza, azaz igaz a következő egyenlőség: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ vagy $G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}$ és $y = ax + b\}$.
$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ és $y = f(x)$ vagy
$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ és $y = ax + b$.

- Az xOy Descartes-féle koordináta-rendszerben ábrázolt síkbeli, $(x, f(x))$ koordinátájú pontok halmazát az f függvény grafikonja mértani ábrázolásának nevezzük. $M(x, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(x)$
Így használjuk:
$(x, y) \in G_f$ vagy $M(x, y) \in G_f$.

Tétel. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ függvény grafikus képe egy d egyenes, ahol a és b adott valós számok. $G_f = d$.

Egy állandó $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$ alakú függvény grafikus képe az $A(0, b)$ ponton át, az Ox tengellyel párhuzamosan húzott egyenes.
Megjegyzés. Ebben a szövegkörnyezetben az $y = ax + b$ relációt az egyenes egyenletének nevezzük, és így írjuk: d: $y = ax + b$; „olvasd „a d egyenes egyenlete $y = ax + b$".

- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ függvény vagy a d: $y = ax + b$ egyenes mértani ábrázolásához szükséges a d egyenes tetszőleges, két különböző pontja.

a) Sok esetben előnyös, hogy ez a két pont a függvény grafikus képe és a koordinátatengelyek metszéspontja legyen.[1].
- *a grafikus kép és Oy tengely metszéspontja:* $G_f \cap Oy = \{A(x, y)\}$; $A(x, y) \in Oy \Leftrightarrow x = 0$;
$A(0, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(0) \Leftrightarrow y = b$, vagyis $G_f \cap Oy = \{A(0, b)\}$.
- *grafikus kép és az Ox tengely metszéspontja:* $G_f \cap Ox = \{B(x, 0)\}$; $B(x, y) \in Ox \Rightarrow y = 0$;
$B(x, 0) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0$, vagyis $G_f \cap Ox = \left\{B\left(-\frac{b}{a}, 0\right)\right\}$.

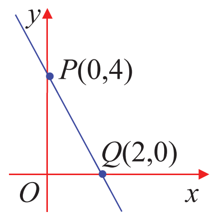
A fentiekben meghatározott A és B pont által alkotott AB egyenes az f függvény grafikus képe.
b) Ha nem szükséges a grafikus kép és a tengelyek metszéspontjának meghatározása, akkor felvesszük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ függvény grafikus képének két különböző $M(x_1, y_1)$ és $N(x_2, y_2)$ pontját.
Megfelelően kiválasztjuk az x_1 és x_2 különböző számot.
- $M(x_1, y_1) \in G_f \Leftrightarrow M(x_1, ax_1 + b)$; $N(x_2, y_2) \in G_f \Leftrightarrow N(x_2, ax_2 + b)$.

A fentiekben meghatározott M és N pont által alkotott MN egyenes az f függvény grafikus képe.
c) Egy állandó $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$ alakú függvény grafikus képe az $A(0, b)$ ponton át, az Ox tengellyel párhuzamosan húzott egyenes.

[1] Egy ilyen ábrázolást az *egyenes tengelymetszetes ábrázolásának* nevezzük.

Alkalmazás

1. alkalmazás. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 4$ függvény.
a) Írd le a G_f halmazt.
b) Határozd meg a függvény grafikus képe és a koordinátatengelyek metszéspontjait!
c) Ábrázold grafikusan az f függvényt!

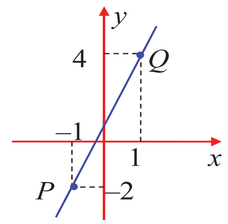


Megoldás: **a)** $G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}$ és $y = f(x)\}$ vagy $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$
vagy $G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}$ és $y = -2x + 4\}$.
b) $G_f \cap Oy = \{P(0, y)\}$ ahol $y = f(0)$. Mivel $f(0) = b$, azt kapjuk, hogy $G_f \cap Oy = \{P(0, 4)\}$;
$G_f \cap Ox = \{Q(x, 0)\}$ ahol $f(x) = 0$. Mivel $-2x + 4 = 0$, azt kapjuk, hogy $x = 2$, vagyis $G_f \cap Ox = \{Q(2, 0)\}$.
c) A függvény grafikus képe a PQ egyenes.

2. alkalmazás. Adott a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x + 1$ függvény.
a) Írd le a G_g halmazt!
b) Ábrázold grafikusan a g függvényt!

Megoldás. **a)** $G_g = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ vagy $G_g = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}$ és $y = 3x + 1\}$.
b) A függvény grafikus ábrázolásához elégséges két különböző pont. Adunk az x változónak tetszőleges két különböző értéket. Legyen $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$ ez a két érték.

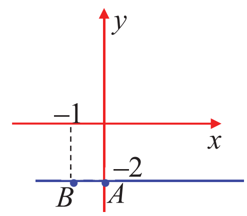
x	-1	1
$y = 3x + 1$	-2	4
(x, y) pont	$P(-1,-2)$	$Q(1,4)$



Mivel $g(-1) = -3 + 1 = -2$ és $g(1) = 3 + 1 = 4$, azt kapjuk, hogy $P(-1,-2)$ és $Q(1,4)$, azok a pontok, amelyek meghatározzák a $PQ = G_g$ egyenest.
Megjegyzés. A két pontot értéktáblázat segítségével is megkaphatjuk:

3. alkalmazás. Adott $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -2$.
a) Számítsd ki $h(0)$ és $h(-1)$ értékét!
b) Írd le a G_h halmazt!
c) Ábrázold grafikusan a g függvényt!

Megoldás. **a)** $h(0) = h(-1) = -2$.
b) $G_h = \{(x, -2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
c) Az $A(0, -2)$ és $B(-1, -2)$ pont meghatározza az $AB = G_h$.



Gyakorlatok és feladatok

1. Az alábbi függvények $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. alakúak. Határozd meg az a és b számokat tudva, hogy
a) $f(x) = 3x + 2$; **b)** $f(x) = -x + 6$;
c) $f(x) = -4x$; **d)** $f(x) = -1$.

2. Adott a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3x - 1$. függvény.
Számítsd ki $g(-1)$; $g(0)$; $g\left(\frac{1}{3}\right)$; $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. Adott a $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -x + 2$ függvény.
a) Ellenőrizd, hogy az $A(-2; 0)$ és $B(1; 1)$ pont a h függvény grafikonjának eleme!
b) Ábrázold koordináta-rendszerben az f függvény grafikonját!

4. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$ függvény!
a) Határozd meg a grafikus kép azon pontját, melynek ordinátája 1.
b) Határozd meg a grafikus kép azon pontját, melynek abszcisszája -2.
c) Határozd meg a grafikus kép azon pontját, melynek koordinátái egyenlők!
d) Határozd meg a grafikus kép azon pontját, melynek ordinátája az abszcissza háromszorosa!
e) Határozd meg a grafikus kép azon pontját, melynek ordinátája az abszcissza ellentettje!

5. Kollineárisak-e a következő pontok?
a) $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$ és $C(-4, 0)$;
b) $A(-3, 2)$, $B(4, -5)$ és $C(2, -1)$;
c) $A(-1, 2)$, $B(1, -2)$ és $C(-2, 3)$;
d) $A(2, -1)$, $B(-1, 5)$ és $C(1, 1)$.

6. Határozd meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ függvényt, tudva, hogy grafikus képe tartalmazza a következő pontokat:

a) $A(-1, 2)$ és $B(1, -2)$;
b) $A(-2, 1)$ és $B(2, 3)$;
c) $A(-3, 2)$ és $B(4, -5)$;
d) $A(-1, 5)$ és $B(2, -1)$.

7. Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ függvény.

a) Ellenőrizd, hogy az $M(-1, -3)$ pont az f függvény grafikus képének eleme, és ábrázold grafikusan a függvényt!
b) Határozd meg az f függvény grafikus képének a koordinátatengelyekkel való metszéspontját!

8. Adott a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -2x + 4$ függvény.

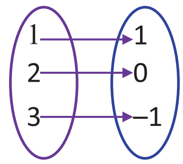
a) Ábrázold grafikusan a g függvényt!
b) Számítsd ki a g függvény grafikus képe és a koordinátatengelyek által bezárt háromszög területét!
c) Határozd meg a koordináta-rendszer kezdőpontjának távolságát a g függvény grafikus képét jelentő egyenestől!

9. Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -x + 2$ függvény.

a) Ábrázold grafikusan ugyanabban a koordináta-rendszerben az f és g függvényt!
b) Határozd meg az f és g függvény grafikonjai metszéspontjának koordinátáit!
c) Számítsd ki: $f(1) + f(2) + ... + f(10) + 2[g(1) + g(2) + ... + g(10)]$.

10. Két, f és g függvény egyenlő, ha az értelmezési tartományuk, értékkészletük és a megfeleltetési törvényük is megegyezik ($f(x) = g(x)$ az értelmezési tartomány bármely x eleme esetén).

a) A mellékelt diagramon adott az f függvény, valamint $g: A \to \{-1, 0, 1\}$, $g(x) = -x + 2$. Írd le az A halmaz elemeit tudva, hogy az f és g függvény egyenlő.



b) Adottak a következő függvények $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 6$ és $g(x) = (a - 3) \cdot x + b - 2$. Határozd meg az a és b számot tudva, hogy az f és g függvény egyenlő.

11. Adott az $f : \{-3, -1, 0, 1, 2, 5\} \to \mathbb{R}$, függvény

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x < 0 \\ 2, & 0 \le x < 2 \\ x^2 - x, & x \ge 2 \end{cases}$$

Számítsd ki: $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$.

12. Adott a következő függvény: $h : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 4\}, h(x) = x^2$.

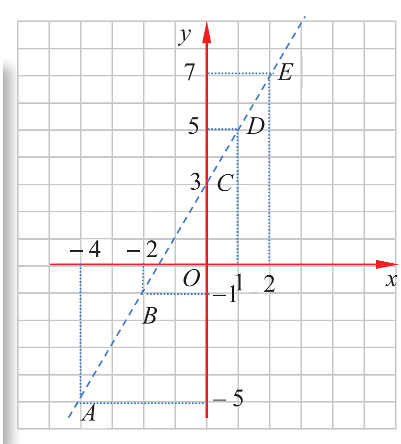
a) Add meg a függvényt értéktáblázat segítségével!
b) Add meg a függvényt diagram segítségével!
c) Ábrázold grafikusan a függvényt!

2.6. $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ alakú függvények grafikus ábrázolása, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és D egy intervallum. A grafikus kép tanulmányozása.

Oldjuk meg figyelmesen!

1 Adott az:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$,
$g : [-4, -2) \to \mathbb{R}, g(x) = 2x + 3$,
$h : (0, 1) \to \mathbb{R}, h(x) = 2x + 3$,
$u : (2, \infty) \to \mathbb{R}, u(x) = 2x + 3$, függvény, valamint a sík egy rögzített Descartes-féle koordináta-rendszerében az
$A(-4, -5), B(-2, -1), C(0, 3), D(1, 5)$ és $E(2, 7)$.

a) Ábrázold az A, B, C, D és E pontot!
b) Mutasd ki, hogy az A, B, C, D és E pontok kollineárisak!
c) Ábrázold ugyanabban a koordináta-rendszerben az f, g, h és u függvényt!



Megoldás.

a) Az A, B, C, D és E pontokat a mellékelt rajzon ábrázoltuk.

b) Az elkészített ábra alapján arra következtethetünk, hogy az A, B, C, D és E kollineáris pontok. Noha ez nem igazolt tény, de fontos a pontok kollinearitásának észrevétele, amit a későbbiekben bizonyítani is fogunk.
A pontok kollinearitásának kimutatására szolgáló hatékony módszer a következő: meghatározzuk azt az első fokú függvény, melynek grafikus képe az adott pontok közül kettő által meghatározott egyenes, majd a többi pontot ellenőrízzük, hogy eleme a kapott függvény grafikus képének. Például leírjuk azt a függvényt, melynek grafikus képe az AB egyenes és ellenőrizzük, hogy a C, D és E pont eleme a grafikus képnek.

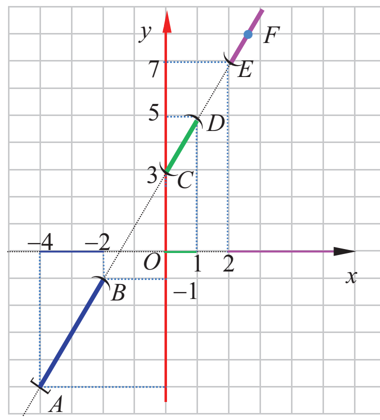
$AB = G_t$, ahol $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t(x) = ax + b$.

$A(-4, -5) \in AB \Leftrightarrow -4a + b = -5$;

$B(-2, -1) \in AB \Leftrightarrow -2a + b = -1$.

A $\begin{cases} -4a+b=-5 \\ -2a+b=-1 \end{cases}$ egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása $a = 2$ és $b = 3$.

Tehát $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t(x) = 2x + 3$, amely egyenlő az f függvénnyel.



A t függvény grafikus képe az AB egyenes.
Ha azt ellenőrizzük, hogy egy tetszőleges $M(x, y)$ pont az AB egyenes eleme, az $M(x, y) \in AB \Leftrightarrow t(x) = y$ ekvivalenciát használjuk.
Így $t(0) = 3$ alapján $C(0, 3) \in AB$. Hasonlóan $t(1) = 5$, $t(2) = 7$, vagyis $D(1, 5)$, $E(2, 7)$ az AB egyenes eleme. Következésképpen az A, B, C, D és E kollineáris pontok.

c) Az f, g, h és u függvények grafikus ábrázolásakor megfigyelhetjük, hogy mind a négy függvény megfeleltetési törvénye ugyanaz, vagyis $x \to y = 2x + 3$, ahol $x \in D$, és D a függvény értelmezési tartománya.
Ezért mindegyik függvény grafikus képe az f függvény grafikus képének az a része lesz, amely megfelel az értelmezési tartománynak: egy szakasz vagy egy félegyenes, attól függően, hogy a D korlátos intervallum, vagy sem. Megemlítjük, hogy a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza egy nyílt, nem korlátos intervallumnak tekinthető. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

- az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikus képe az AE egyenes;
- a g: $[-4, -2) \to \mathbb{R}$ függvény grafikus képe az $[AB)$ balról zárt és jobbról nyílt szakasz;
- a h: $(0, 1) \to \mathbb{R}$ függvény grafikus képe a (CD) nyílt szakasz;
- az $u : (2, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény grafikus képe az $(EF$ nyílt félegyenes.

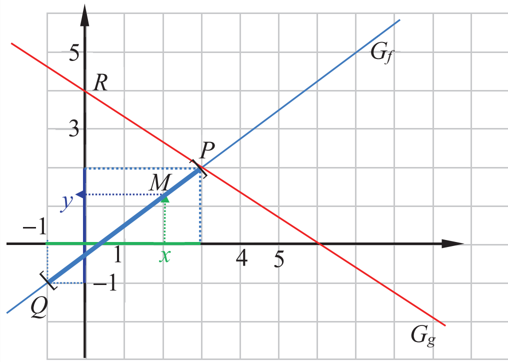
Megjegyzés.
A g, h, u függvények az f függvény leszűkítései az $[-4, -2)$, $(0, 1)$, illetve $(2, \infty)$ intervallumon.
Egy függvény grafikus képét olyan eszköznek tekinthetjük, amelynek segítségével a függvények tulajdonságait „olvashatjuk" le, fedezhetjük fel.
Az $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ függvény *grafikus képének* tanulmányozása során megkaphatjuk:

1) a függvény értelmezési tartományát;
2) a függvény értékeit a grafikus kép pontjainak ordinátája alapján;
3) az értelmezési tartomány olyan elemeit, amelyekben a függvény értéke az m szám (az $f(x) = m$ egyenlet megoldása)
4) a függvény értékeinek halmazát (Imf);
5) az értelmezési tartomány olyan elemeit, amelyekben a függvény értéke kisebb illetve nagyobb, mint egy adott m szám (az $f(x) < m$ illetve $f(x) > m$ egyenlőtlenség megoldásai);
6) ha ugyanabban a Descartes-féle koordináta-rendszerben két függvény grafikus képe van ábrázolva, akkor meg tudjuk határozni az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldásait (a két függvény grafikus képe metszéspontjainak abszcisszáit).

2 A mellékelt ábrán az f, g és h függvény grafikus képe látható. Az f grafikus képe a PQ egyenes, a g grafikus képe a PR egyenes, valamint a h grafikus képe a PQ zárt szakasz (a P és Q pont a h grafikus képének eleme).

a) Használva a függvények grafikus képét:
1) határozd meg a P, Q, R pontok koordinátáit;
2) határozd meg a 3-nak mindhárom függvény általi képét;
3) határozd meg a 0-nak g függvény általi képét;
4) mutasd ki, hogy -1 a h függvény egy értéke;
5) határozd meg a h függvény értékeinek halmazát!

b) Használva a P, Q, R pontok koordinátáit, határozd meg mindhárom függvény értelmezési tartományát, értékkészletét és a megfeleltetési törvényt.



Megoldás:

a) 1) $P(3, 2)$, $Q(-1, -1)$ és $R\,(0, 4)$. 2) $P \in G_f$, $P \in G_g$, $P \in G_h$ és $f(3) = g(3) = h(3) = 2$.
($x = 3$ az $f(x) = g(x)$, $f(x) = h(x)$, $g(x) = h(x)$ egyenletek megoldása)
3) Mivel $R\,(0, 4) \in G_g$, azt kapjuk, hogy $g(0) = 4$, tehát a 0 számnak g függvény általi képe 4.
4) Mivel $Q(-1, -1) \in G_h$, azt kapjuk, hogy $h\,(-1) = -1$, tehát a -1-nek a h függvény általi képe -1.

5) A h függvény grafikus képe a PQ zárt szakasz, ahol $P(3,2)$, $Q(-1,-1)$. Észrevehetjük, hogy $M(x, y) \in PQ$ miatt $y \in [-1,2]$. Tehát $Imh = [-1, 2]$.

b) Az f függvény grafikus képe a PQ egyenes, vagyis $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

$$\left.\begin{aligned} P(3,\,2)\in G_f \\ Q(-1,\,-1)\in G_f \end{aligned}\right\} \text{ amiből az következik, hogy } \left\{\begin{aligned} 3a+b&=2 \\ -a+b&=-1 \end{aligned}\right., \text{ és megoldása } a=\frac{3}{4},\ b=-\frac{1}{4}.$$

Tehát $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}$.

Hasonlóan $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\,(x) = mx + n$.

$$\left.\begin{aligned} P(3,\,2)\in G_g \\ R(0,\,4)\in G_g \end{aligned}\right\} \text{ amiből az következik, hogy } \left\{\begin{aligned} 3m+n&=2 \\ m\cdot 0+n&=4 \end{aligned}\right., \text{ és megoldása } a=-\frac{2}{3} \text{ és } n=4.$$

Tehát $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\,(x) = -\dfrac{2}{3}x + 4$.

Az $M(x, y)$ pont a PQ zárt szakasz eleme akkor és csakis akkor, ha $x \in [-1,3]$. Tehát $M(x, y) \in G_h \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in [-1,3]$. Következésképpen, $h: [-1,3] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}$ (a megfeleltetési törvény megegyezik az f függvény képletével).

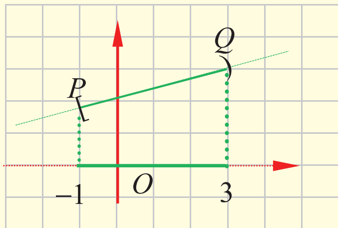
Megjegyzés.

1) A sík egy rögzített xOy Descartes-féle koordináta-rendszerében ábrázolt $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ alakú függvény G_f grafikus képe a PQ szakasz, ahol a és b adott valós szám, D egy (p, q), $[p, q]$, $(p, q]$ vagy $[p, q)$ alakú intervallum, $p, q \in \mathbb{R}$, valamint $P\,(p, ap + b)$ és $Q\,(q, aq + b)$. A P és Q pont eleme vagy sem az f függvény grafikus képének, annak függvényében, hogy a megfelelő végénél a D nyílt vagy zárt intervallum.

2) A sík egy rögzített xOy Descartes-féle koordináta-rendszerében ábrázolt $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ alakú függvény G_f grafikus képe a PM félegyenes, ahol a és b adott valós szám, D egy (p, ∞), $[p, \infty)$, $p, q \in \mathbb{R}$ alakú intervallum, valamint $P(p, ap + b)$ és $M(m, am + b)$, ahol $m > p$. A P pont eleme vagy sem az f függvény grafikus képének, annak függvényében, hogy a D balról nyílt vagy zárt intervallum.

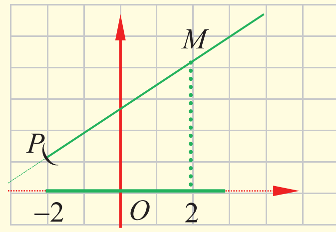
1. példa

Az $f : [-1,3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0{,}25x + 2{,}25$ függvény az $x \rightarrow y = 0{,}25x + 2{,}25$, megfeleltetési törvény által megadott első fokú függvénynek egy leszűkítése, tehát az f függvény grafikus képe a $[PQ)$ szakasz, ahol $P(-1, 2)$, $Q(3,3)$ és $P \in G_f$, valamint $Q \notin G_f$



2. példa

A $g : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 0{,}75x + 2{,}5$ függvény az $x \rightarrow y = 0{,}75x + 2{,}5$, megfeleltetési törvény által megadott első fokú függvénynek egy leszűkítése, tehát az a g függvény grafikus képe a $(PM$ félegyenes, ahol $P(-2, 1)$, $M(2, 4)$ és $P \notin G_g$.



MINITESZT Válaszd ki az egyetlen helyes válasz betűjelét az alábbi feladatokban!

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. függvény. A következő pontok közül a G_f grafikon eleme:			
A. $A(1, 2)$	**B.** $B(-1, 2)$	**C.** $C(1, -2)$	**D.** $D(2, 1)$
2. Adott az $f : [2 , 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$. függvény. A következő pontok közül nem a G_f grafikon eleme:			
A. $A(2, -1)$	**B.** $B(4, -5)$	**C.** $C(3, -3)$	**D.** $D(1, 2)$
3. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 4$. Ha az $A(-1, 1)$ pont a G_f eleme, akkor az a értéke:			
A. –1	**B.** 1	**C.** 3	**D.** 2

Gyakorlatok és feladatok

1. Adottak a következő függvények:

$f : [2 , 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$

$g : (1, 4) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 3$

$h : (-4, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2x + 5$

$u : [-2, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = -2x + 1$

a) Ábrázold grafikusan a függvényeket!

b) A grafikus képet tanulmányozva határozd meg a függvények képét!

2. Adottak a következő függvények:

$f : [2 , \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$

$g : (-\infty, 4) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x - 2$

$h : (-4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = -2x - 5$

$u : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = -3$

a) Ábrázold grafikusan a függvényeket!

b) A grafikus képet tanulmányozva határozd meg a függvények képét!

3. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m - 1) \cdot x + 2n + 3$ függvény.

a) Határozd meg az m és n értékét tudva hogy az $A(-1, 1)$ és $B(2, 4)$ pont a függvény grafikus képének eleme.

b) Ábrázold grafikusan a függvényt derékszögű koordináta-rendszerben!

4. **a)** Határozd meg azt az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, alakú függvényt, melynek grafikus képe áthalad az $A\,(5; 6)$ és $B\,(\frac{5}{3}; 4)$ ponton.

b) Ábrázold a kapott függvényt, és határozd meg a grafikus képének a koordinátatengelyekkel való metszéspontját!

c) Határozd meg a grafikus kép és a koordinátatengelyek által bezárt rész területét!

5. Adottak az alábbi függvények:

$f : [2\,,6] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{3x+2}{4}$

$g: [6, 8] \to \mathbb{R},\ g(x) = -\dfrac{3}{2}x + 14$

$h : [2, 8] \to \mathbb{R},\ h(x) = 2.$

Legyen A, B és C az adott függvények következő metszéspontjai:

$G_f \cap G_g = \{A\};\ G_g \cap G_h = \{B\};\ G_h \cap G_f = \{C\}.$

a) Ábrázold grafikusan a függvényeket!

b) A grafikus képet tanulmányozva határozd meg az A, B és C pont koordinátáit!

c) Számítsd ki az ABC háromszög területét!.

d) Számítsd ki az ABC háromszög oldalainak hosszát!

6. Adott az $f : A \to \{0, 1, 3, 4\}$ függvény, ahol $A \subset \mathbb{R}$ és $f(x) = 2x - 1$.

a) Bizonyítsd be, hogy $A \cap \left\{\dfrac{1}{2}; 1; 2; \dfrac{5}{2}\right\} \neq \varnothing$.

b) Írj négy $f : A \to B$ függvényt.

c) Hány $f : A \to \{0, 1, 3, 4\}$ függvény létezik? Indokold válaszod!

7. Adott az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} |x|, & x \le 2 \\ 7-2x, & x > 2 \end{cases}$ függvény.

a) Számítsd ki: $f(-1), f(2), f(a), f(a^2)$, ahol $a \in \mathbb{R}$.

b) Oldd meg az $f(x) = 1$ egyenletet!

8. Adott az f: $\{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 1$ függvény.

a) Határozd meg az a számot tudva, hogy $M(-1, 2)$ pont az f függvény grafikus képének eleme.

b) Ha $a = -1$, akkor készítsd el az értéktáblázatot és ábrázold grafikusan az f függvényt!

9. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + b$ függvények grafikus képei tartalmazzák az $A(-1, 2)$ pontot.

a) Határozd meg az a és b értékét, és írd le a két függvény megfeleltetési törvényét!

b) Ábrázold grafikusan mindkét függvényt ugyanabban az xOy derékszögű koordináta-rendszerben!

c) Legyen $G_f \cap Oy = \{B\}$, $G_f \cap G_g = \{C\}$, $G_g \cap Ox = \{D\}$.
Számítsd ki a $BCDO$ négyszög területét!

10. **a)** Határozd meg az m valós paraméter értékét tudva, hogy $A(1, m^2) \in G_f$, ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m^2 - 2)x + m$.

b) Az **a)** alpontban kapott m értékekkel ábrázold grafikusan az f függvényt!

11. **a)** Határozd meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ alakú függvényt tudva, hogy grafikus képe áthalad az $A(2, 1)$ és $B(6, -1)$ ponton.

b) Ábrázold a kapott függvényt, és határozd meg a grafikus képének a koordinátatengelyekkel való metszéspontját!

c) Határozd meg a grafikus kép és a koordinátatengelyek által bezárt rész területét!

12. Az A(a, 1) pont az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, f(x) = -x + 0{,}5a$. függvény grafikus képének eleme. Határozd meg az a értékét!

13. Ábrázold grafikusan a következő függvényeket:

a) f: $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$

b) f: $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} x-1, x < -1 \\ -x+2,\ x > -1 \end{cases}$

c) $f : A \to \mathbb{R}, f(x) = |x| - 1$, ahol

$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, -2 \le \dfrac{2x-1}{3} < 1 \right\}$

d) f: $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le \sqrt{3}\} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \sqrt{3} \cdot x - 1$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} |x+3|, & x \le -3 \\ x+1, & x > -3 \end{cases}$

14. Adott a következő függvény $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a \cdot x + b$.

a) Határozd meg az a és b értékét tudva, hogy az $A(2, 0)$ és $B(0, 6)$ pontok az f függvény grafikus képének elemei!

b) Az **a)** alpontban kapott értékekkel ábrázold grafikusan az f függvényt!

c) Számítsd ki az origó távolságát a grafikus képet jelentő egyenestől!

d) Ha M jelöli az A pontnak, N pedig a B-nek a derékszögű koordináta-rendszer origója szerinti szimmetrikusát, akkor határozd meg az $ABMN$ négyszög kerületét és területét!

3. A statisztika elemei

1.ℓ. Adatok rendezése és rendszerezése függvényi kapcsolattal leírható feltételek szerint, abszolút gyakoriság

Emlékeztető

Ha A és B két nem üres halmaz, azt mondjuk, hogy **függvényi kapcsolat** van közöttük, ha valamely szabály alapján az A halmaz minden eleméhez hozzárendeljük a B halmaz egy-egy *jól meghatározott* elemét.

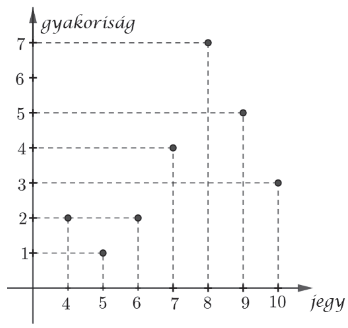
A függvényi kapcsolatokat *táblázatok, grafikonok, diagramok és matematikai képletek* segítségével ábrázolhatjuk.

Ha $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ egy felmérőn kapott jegyek halmaza és $B = \mathbb{N}$, akkor értelmezhetünk egy olyan $x \to y$, függvényi kapcsolatot, ahol mindegyik x jegyhez hozzárendelhető egy y szám, azaz azon diákok száma, akik az x jegyet kapták. (y számot az x abszolút gyakoriságának nevezzük).

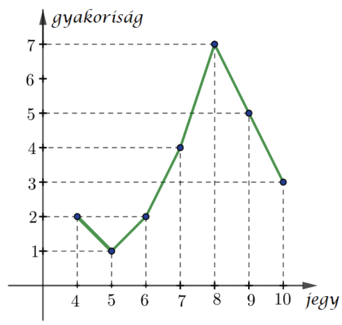
jegy	4	5	6	7	8	9	10
gyakoriság	2	1	2	4	7	5	3

Az A és B halmaz közötti függvényi kapcsolat grafikonja az olyan (x, y) számpárok halmaza, ahol (x, y), $x \in A$, $y \in B$, $x \to y$, vagyis az A halmaz x eleméhez hozzárendeltük a B halmaz y elemét.

Példa. A függvényi kapcsolat grafikonja a (4, 2), (5, 1), (6, 2), (7, 4), (8, 7), (9, 5), (10, 3) elempárok halmaza. Összekötjük a grafikon szomszédos pontjait, ezáltal egy törött vonalat kapunk. Ezt a vonalat *gyakorisági poligonnak* nevezzük.



A függvényi kapcsolat grafikonja



Gyakorisági poligon

A (4, 2), (5, 1), (6, 2), (7, 4), (8, 7), (9, 5), (10, 3) koordinátájú pontok halmaza az adott függvényi kapcsolat grafikonjának mértani ábrázolása.

Megjegyzés. A gyakorisági poligon segítségével összehasonlítható két érték *gyakorisága* (az érték előfordulási száma), és kiszámolhatjuk az értékek *átlagát*. A nagyobb gyakoriságú értékről azt mondjuk, hogy nagyobb a *súlya*.

Oldjuk meg figyelmesen!

A statisztikai adatok valóságos vagy elméleti entitásokat jellemeznek. Ezen adatokat szimbólumok, számok, betűk, betűcsoportok, képek, hangjegyek stb. segítségével írhatjuk le.

1. példa. A festészeti szakkörön résztvevő tanulók *szeme színe* egy adatkészletet jelent, amit az alábbi kétsoros adattáblázat foglal össze:

Tanuló	$T\,1$	$T\,2$	$T\,3$	$T\,4$	$T\,5$	$T\,6$	$T\,7$	$T\,8$
Szeme színe	barna	kék	barna	zöld	fekete	kék	fekete	barna

Az összes olyan *egységet* (bármilyen természetű), amelyen statisztikai vizsgálatot végeznek, *statisztikai sokaságnak* nevezzük.

Az egységek (tanulók) közös jellemzőjét, azt a tulajdonságot, hogy bizonyos színű szemük van, *jellemzőnek* vagy *változónak* nevezünk. Ehhez az értékek szükségesek: kék, zöld, barna, fekete.

2. példa. Az osztály tanulóinak a felmérőn *kapott jegye* meghatározza egy *J* változót és a változó *értékeinek* megfelelő *adatkészletet*.
J: 8, 6, 10, 7, 5, 9, 8, 10, 8, 9, 7, 10, 8, 7, 5, 9, 10, 8, 9, 9, 7, 9, 8, 7, 8

Az értelmezett *változó* az osztály tanulóinak a felmérőn kapott jegyet jelenti. Ennek a változónak számértékei vannak, vagyis 5 és 10 közötti egész számok.
A fenti két adatkészletet összehasonlítva az alábbi következtetésekhez jutunk:

Az **1. példában** egy olyan adatkészletet írtunk le, amely a tanulók szeme színét, milyenségét adja meg. Ezeket az adatokat minőségi adatoknak nevezzük, és egy *minőségi változót* értelmeznek.

A **2. példában** egy számokat tartalmazó adatkészletet írtunk le. Ezek *számadatok*, és egy *numerikus változót* vagy *mennyiségi változót* értelmeznek.

Néha nehezen követhető és dolgozható fel az adatok megadási módja. Előnyös *csoportosítani* az adatokat.

Megjegyzés. Rendszerezhetjük a numerikus változók *értékeit*, melynek előnye az adatok átfogó ábrázolásának lehetősége.

3. példa. Az osztály tanulóinak magasságát centiméterben mérve a mellékelt táblázatba foglalt numerikus adatok készletét kapjuk:

159	144	138	147	154	135	159
143	149	149	138	145	145	156
143	154	154	136	149	132	132
156	143	132	152	143	134	155

Fedezzük fel, értsük meg!

A fenti táblázatba foglalt adatok nehezen áttekinthetők, ezért szükséges az adatok egy jobb *rendszerezése*. A numerikus változó értékeit a testmagasság szerint növekvő sorrendbe rakjuk és a mellékelt táblázatba foglaljuk:

132	132	132
134		
135		
136		
138	138	

143	143	143	143
144			
145	145		
147			
149	149	149	

152		
154	154	154
155		
156	156	
159	159	

Függőlegesen a testmagasságok különböző értékeit, vízszintesen pedig az ismétlődő értékeket helyeztük el. Az így kapott táblázat alapján további kérdésekre is kaphatunk választ:

Kérdés	*Válasz*
1. Mennyi a legmagasabb és legalacsonyabb tanuló testmagasságának különbsége?	159 – 132 = 27 (cm)
2. Mennyi a legtöbb ugyanakkora testmagasságú tanulók száma? Mennyi e tanulók magassága?	A legtöbb ugyanakkora testmagasságú tanulók száma 4. Ők 143 cm magasak.

A tanulók magasságának megfelelő változó értékei 132 és 159 közötti egész számok. Az előző táblázatból kitűnik, hogy kevés azonos magasságú tanuló van. Mivel az 5 centiméternél kisebb különbség nem mérvadó, ezért a magasságokat csoportosíthatjuk *értékosztályokat* képezve. A [132, 159] intervallumot felosztjuk 159 – 132 = 27 (a legnagyobb és legkisebb különbsége) hosszúságú intervallumokra: [132, 135), [135, 140), [140, 145), [145, 150), [150, 155), [155, 159], majd mindenik intervallum esetén, az alábbi táblázatban feltüntetjük az adott intervallumban levő magasságokat.

A magasságok intervallumai	A VIII. osztály tanulóinak magassága	Azon tanulók száma, akiknek magassága az intervallumban van
[132, 135)	132, 132, 132, 134	4
[135, 140)	135, 136, 138, 138	4
[140, 145)	143, 143, 143, 143, 144	5
[145, 150)	145, 145, 147, 149, 149, 149	6
[150, 155)	152, 154, 154, 154	4
[155, 159]	155, 156, 156, 159, 159	5

Megjegyzés. Ugyanazon jellemző (változók) értékeit különböző táblázatokban rögzítettük. Könnyen belátható, hogy közülük a legátfogóbb és leghatékonyabb az utolsó táblázat.

Értelmezés. Az adatsorában szereplő változó értékének előfordulási számát az érték abszolút *gyakoriságának* nevezzük.

Alkalmazás

Elkészíteni az *abszolút gyakoriság táblázatát* azt jelenti, hogy egy táblázatba foglaljuk a változó értékeinek halmaza és a természetes számok halmaza közötti olyan függvényi kapcsoltot, amely által a változó minden értékéhez hozzárendeljük annak abszolút gyakoriságát.
Figyelembe véve az előbbi táblázatokat elkészíthetjük mindegyik esetben az abszolút gyakoriság táblázatát.

1. példa. A változó értékei a szemek színe: {kék, zöld, barna, fekete}. Az abszolút gyakoriságok természetes számok, és a mellékelt táblázatba foglaltuk.

Szem színe	Abszolút gyakoriság
kék	2
zöld	1
barna	3
fekete	2

2. példa. A változó értékei a tanulók által kapott jegyek: {5, 6, 7, 8, 9, 10}.
Az abszolút gyakoriságok természetes számok, és a mellékelt táblázatba foglaltuk.

Jegy	Abszolút gyakoriság
5	2
6	1
7	5
8	7
9	6
10	4

3. példa. A tanulók magasságainak intervallumait tartalmazó táblázat alapján meghatározhatjuk a magasságok értékosztályainak abszolút gyakoriságát.

A magasság értékosztálya	Abszolút gyakoriság
[132, 135)	5
[136, 140)	3

A magasság értékosztálya	Abszolút gyakoriság
[140, 145)	5
[145, 150)	6

A magasság értékosztálya	Abszolút gyakoriság
[150, 155)	4
[155, 159]	5

Láttuk, hogy az abszolút gyakoriságok rögzítését két oszlopos vagy két soros táblázatokkal végzik. Az első oszlopban vagy sorban a változó (jellemző) értékeit, a másodikban pedig az egyes értékeknek megfelelő abszolút gyakoriságot rögzítjük.

Gyakorlatok és feladatok

1. Bizonyos statisztikai feldolgozás céljából a 28 tanulóval rendelkező osztály osztályfőnöke összegyűjti a naplóból az első félévben matematikából elért átlagokat. Add meg: a statisztikai sokaságot, a sokaság mennyiségét (számát) és a statisztikai jellemzőt (változót).

2. Egy vállalat az alábbiak szerint hozott létre egy adatbázist az alkalmazottak szolgálati idejéről és iskolai végzettségéről:

Alkalmazott	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
Szolgálati idő (év)	6	8	5	5	6	8	8	7	8	7
Iskolai végzettség	Líceumi végzettség	Felsőfokú végzettség	Felsőfokú végzettség	Líceumi végzettség	Felsőfokú végzettség	Felsőfokú végzettség	Felsőfokú végzettség	Felsőfokú végzettség	Felsőfokú végzettség	Felsőfokú végzettség

a) Határozd meg, hogy a líceumi végzettséggel rendelkező alkalmazottak száma a felsőfokú végzettséggel rendelkező alkalmazottak számának hány százaléka!

b) Határozd meg azt a szolgálati időt, amellyel a legtöbb alkalmazott rendelkezik (amely a legnagyobb gyakorisággal rendelkezik)!

3. 20 egymást követő napon táblázatba rögzítették a gazdaság termelési folyamatából származó hulladék kilogrammban kifejezett mennyiségét.

Nap	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	n_{16}	n_{17}	n_{18}	n_{19}	n_{20}
Mennyiség	78	80	76	81	79	80	77	78	81	81	75	83	80	79	78	83	80	80	82	79

a) Csoportosítsd az adatokat értékosztályokba. Készíts két ilyen csoportosítást!

b) Határozd meg a gazdaságban egy nap alatt keletkező hulladék maximális mennyiségét!

4. Egy autógyár az elmúlt három év mindegyikében 10% -kal növelte a termelést az előző évhez képest.

a) Tudva, hogy 2016-ban a gyárban 100 000 autót gyártottak, töltsd ki az alábbi táblázatot:

Év	2016	2017	2018	2019
A gyártott autók száma	100 000			

b) Határozd meg az utolsó három évben gyártott autók számát összesen!

5. Az országos felmérés próbavizsgáján matematikából egy iskola diákjai a következő pontszámokat kapták (a lehetséges 100-ból): 75, 64, 58, 81, 76, 93, 96, 58, 65, 73, 84, 82, 97, 51, 99, 100, 87,100, 64, 86, 99, 53, 77, 62,74, 55, 98, 60, 70, 88.

Csoportosítsd az adatokat 10 hosszúságú értékosztályokba kitöltve az alábbi táblázatot:

Pontszámok intervallumai	< 50	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89	90 – 100
Tanulók száma	0	5				

2.l. Statisztikai adatsorok mértani ábrázolása

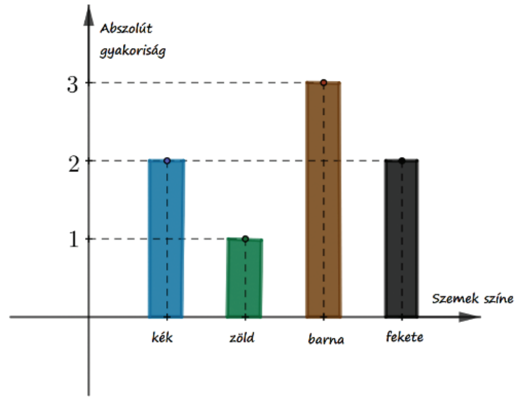
Fedezzük fel, értsük meg!

Hogy a lehető legegyszerűbben megfigyelhető, összehasonlítható és értékelhető legyen a függvényi kapcsolat, amelyen keresztül a változó egyes *értékeihez* hozzárendeljük azok *abszolút gyakoriságát*, geometrikusan grafikonokkal, diagramokkal, síkbeli derékszögű koordináta-rendszerekkel ábrázoljuk. A grafikonon szereplő pontok abszcisszái a változó értékei, és az ordinátái az abszolút gyakoriságai.

Célunk az előző lecke példáinak megfelelő oszlopdiagramok készítése. Mindegyik esetben megadjuk az abszolút gyakoriságok táblázatát is.

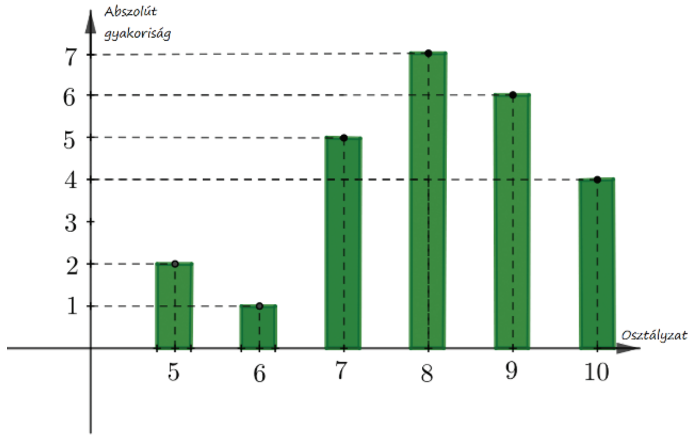
1. példa. A festészeti szakkörön résztvevő tanulók szeme színe:

Szem színe	Abszolút gyakoriság
kék	2
zöld	1
barna	3
fekete	2



2. példa. Az osztály tanulói által egy tudáspróbán kapott *osztályzatok*:

Osztályzat	Abszolút gyakoriság
5	2
6	1
7	5
8	7
9	6
10	4



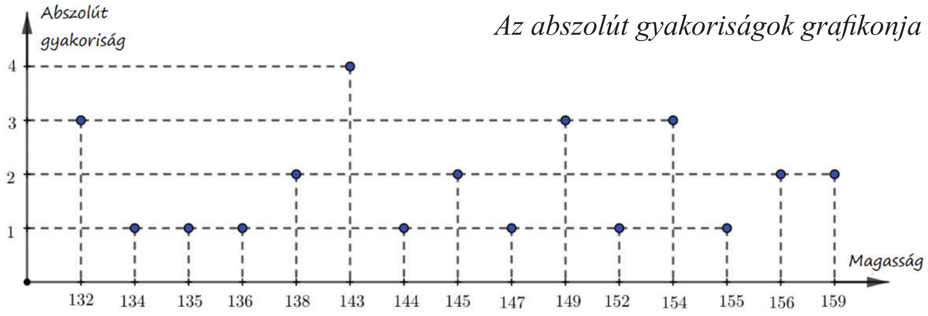
Alkalmazás

3. példa. Az osztály tanulóinak magassága, a gyakoriság grafikonja.

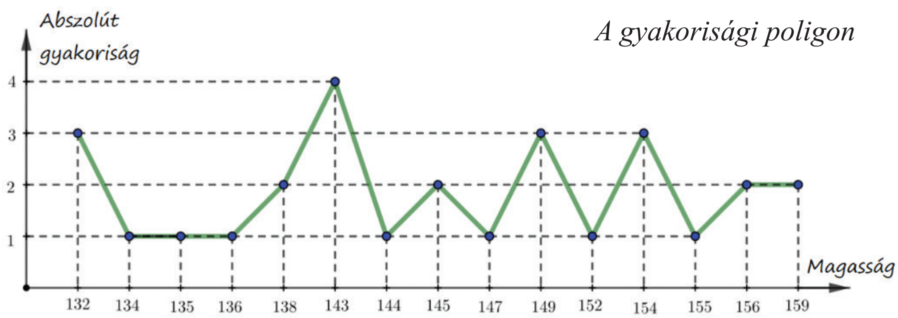
Magasság	Gyakoriság	Magasság	Gyakoriság	Magasság	Gyakoriság
132	3	143	4	152	1
134	1	144	1	154	3
135	1	145	2	155	1
136	1	147	1	156	2
138	2	149	3	159	2

A tanulók magassága abszolút gyakoriságának grafikonja a$\{(132, 3), (134, 1), (135, 1), (136, 1), (138, 2), (143, 4), (144, 1), (145, 2), (147, 1), (149, 3), (152, 1), (154, 3), (155, 1), (156, 2), (159, 2)\}$ halmaz. Ebből a halmazból nehézkes kiszűrni információkat

Geometrikusan fogjuk ábrázolni ezt a grafikont, hogy tisztább képet kapjunk a magasságértékek súlyáról.



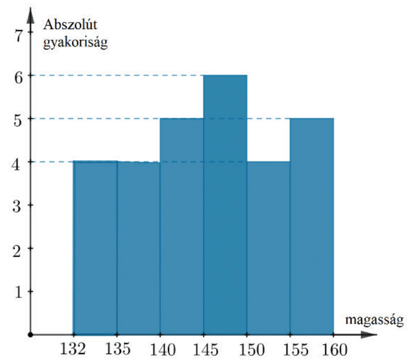
A gyakorisági poligon vagy a függvényi kapcsolat botokkal való ábrázolása tisztább képet nyújt a magasságértékek súlyáról.



Néhány általános szempont figyelembevétele érdekében az adatok értékosztályokba csoportosítása lehetőséget nyújt sokatmondó grafikus képek készítésére.

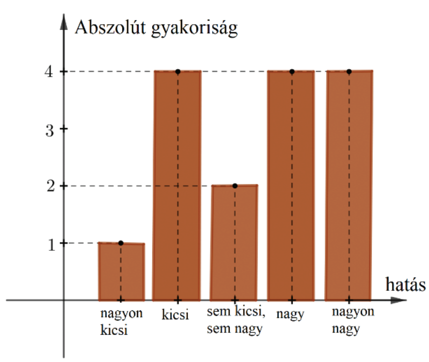
4. példa. A 28 tanuló centiméterben kifejezett magassága, értékosztályokba csoportosítva:

Magasságosztályok/intervallumok	Gyakoriság
[132, 135)	5
[136, 140)	3
[140, 145)	5
[145, 150)	6
[150, 155)	4
[155, 159]	5



5. példa. Egy tévéműsor nevelő hatása serdülőkorú fogyasztókra:

Hatás	Gyakoriság
Nagyon kicsi	1
Kicsi	4
Sem kicsi, sem nagy	2
Nagy	4
Nagyon nagy	4



Gyakorlatok és feladatok

1. Egy iskolában a VIII. osztályos tanulók körében felmérést végeztek arról, hogy a középiskolában milyen tagozatra és szakképesítésre jelentkeztek. Az adatok a következő táblázatban találhatók:

Osztály / Tagozat, szakképesítés	VIII. A	VIII. B	VIII. C	VIII. D	Választások száma
reál, matematika-informatika	6	8	10	8	32
reál, természettudomány	7	5	8	6	
humán, filológia	3	5	3	8	
sport, torna	4	5	-	2	
művészeti, képzőművészet	4	5	3	-	
az osztály tanulóinak száma	24	28	24	24	

a) Másold a füzetbe és egészítsd ki a táblázat utolsó oszlopát!
b) Határozd meg a legtöbb tanuló által választott szakképesítést!
c) Fejezd ki százalékban azon diákok számát, akik a reál tagozaton belül a matek-info szakképesítést választanák!
d) Készíts olyan oszlopdiagramot a „Tagozat, szakképesítés” változóra, amely tartalmazza az összes VIII. osztályos tanulót és líceumi választásukat!
e) Ábrázold a grafikont, amely mindegyik osztály választásainak megfelel!

2. Öt sportoló vesz részt lövészversenyen, és mindegyik háromszor lő célba.
A lehetséges pontszámok a 0 és 10 közötti természetes számok. A sportolók eredményei:

Sportoló	S_1			S_2			S_3			S_4			S_5		
Pontszám	8	9	10	9	9	10	10	9	10	8	8	10	9	8	9

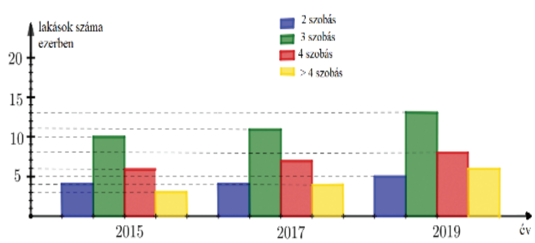
a) Készíts táblázatot olyan változó gyakoriságára, mely a lövésekre kapott pontszámokat mutatja!
b) Az **a)** alpontban készített táblázatot használva készíts a pontszámok gyakoriságára vonatkozó oszlopdiagramot!
c) Állapítsd meg a legnagyobb és legkisebb gyakoriságú lövés pontszámát!

3. Az alábbi táblázat az osztály tanulóit az általuk kedvelt olvasmány típusa szerint osztályozza.

Olvasmány-típus / Tanulók	Krimi	Tudományos fantasztikus	Kalandregény	Összesen
Lányok	1	4		
Fiúk	5		3	
Összesen		10	8	

a) Másold le a füzetbe és egészítsd ki a táblázatot!
b) Állapítsd meg a legtöbb lány, majd a legtöbb fiú által kedvelt olvasmánytípust!
c) Készítsd el ugyanazon az ábrán a „A lányok által kedvelt irodalom” változó gyakorisági poligonját, majd a „A fiúk által kedvelt irodalom” változó gyakorisági poligonját is!

4. Kétévente a városháza tanulmányt készített a 2 szobás, 3 szobás, 4 szobás és több mint 4 szobás lakások számáról, amelyekben a város polgárai élnek. A felmérés 2015-ös, 2017-es és 2019-es eredményeit együtt ábrázolták.



a) Határozd meg, milyen típusú lakásoknál volt a legnagyobb növekedés 2019-ben 2015-hez képest!
b) Számold ki, hány lakás épült és került használatba 2015 és 2019 között!

3.*l.* A centrális tendencia mutatói

Fedezzük fel, értsük meg!

A statisztika olyan jelenségeket vagy folyamatokat vizsgál, amelyek nagy számú statisztikai egységben fordulnak elő, és amelyek értéke statisztikai egységenként változik. A táblázatok és grafikonok nem adnak elegendő tájékoztatást egyes jelenségről, ezért gyakran specifikus statisztikai mutatókra van szükség.
A *statisztikai mutatók* valós számok, amelyek összefoglalják az adatsorokban található információk egy részét, lehetővé téve a statisztikai sorozat átfogó értékelését.
Az adatsor *centrális tendenciája* egyedi számértékekkel fejezhető ki, amelyek összegzően jellemzik a numerikus adatsor tipikus, alapvető és állandó jellegét.
A numerikus változók elemzésénél a *centrális tendencia* leggyakrabban használt mutatói: egyszerű számtani átlag, medián és módusz.

1) A statisztikai változó *számtani átlaga* az adatkészlet centrális értékének mértékét jelenti, amely körül a halmaz adatai változnak.

a) N statisztikai egységgel rendelkező populáció esetében az X numerikus változót és az $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$ valós számokat, az X változó értékeit vesszük figyelembe.

1. értelmezés. Az X numerikus változó átlagát M(X)-szel jelöljük, valós szám, és megegyezik az $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$ számok számtani közepével.

Így írjuk: $M(X) = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$

b) N statisztikai egységgel rendelkező populáció esetén vegyük figyelembe az X numerikus változót és az $x_1, x_2, x_3, ..., x_p$, értékeket az $n_1, n_2, n_3, ..., n_p$ gyakoriságokkal (súlyokkal) úgy, hogy $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_p = N$.

2. értelmezés. Az X numerikus változó átlaga az $x_1, x_2, x_3, ..., x_p$ értékek az $n_1, n_2, n_3, ..., n_p$ súlyokkal vett súlyozott számtani közepe.

$$M(X) = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + ... + x_p \cdot n_p}{N}$$

Megjegyzés. Az adatkészlet értékeinek sorrendje nem számít az átlag kiszámításakor.

3. értelmezés. A numerikus adatkészlet mediánja az az érték, amely az adatkészletet két egyenlő részre osztja: a numerikus adatok felének értékei alacsonyabbak, mint a mediáné, fele pedig ennél nagyobb.

2) Az adatkészlet *mediánja* a készlet centrális értékét képviseli, annak *rendezése* után.

Me(X)-szel jelöljük.
a) Az X numerikus változó rendezett $x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < \ldots < x_{2k+1}$ értékei esetén $Me(x) = x_{k+1}$

b) Az X numerikus változó rendezett $x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{2k}$ értékei esetén $Me(x) = \dfrac{(x_k + x_{k+1})}{2}$

Az adatsor mediánjának kiszámításához rendezzük az adatokat, majd meghatározzuk a változó középértékét. Ha az adatokat gyakorisági osztályokba csoportosítjuk, akkor a *mediánt* tartalmazó *osztályt* mediánosztálynak nevezzük.

1. alkalmazás. A kereskedelmi részleg alkalmazottainak fizetését januárban a következő számértékek adják

F: 2500, 2400, 2100, 2500, 9990, 1980, 1990, 2230, 2780, 2450, 2124.

a) Számítsd ki az alkalmazottak januári átlagfizetését!

b) Rendezd az alkalmazottak fizetését növekvő sorrendbe, és határozd meg a változó mediánját!

c) Alkosd meg a KBS 1 adatsort, amely megegyezik az egyes munkavállalók tényleges fizetése és az átlagos fizetés közötti különbséggel!

d) Határozd meg a KBS 1 adatkészlet *mediánját*!

e) Alkosd meg a KBS 2 adatsort, amely megegyezik az egyes munkavállalók tényleges fizetése és a medián közötti különbséggel, majd számold ki az új adatsor mediánját!

f) Határozd meg, hogy a számított centrális mutatók közül melyik nyújt valóságosabb jellemzést!

Megoldás. **a)** Használjuk a számtani közép képletét és M(F) = **3004** lej.

b) F: $\underbrace{1980, 1990, 2100, 2124, 2230}_{\text{öt érték}}$, **2400**, $\underbrace{2450, 2500, 2500, 2780, 9990}_{\text{öt érték}}$.

A változó 11 értéke közül öt kisebb, mint 2400 és öt nagyobb, mint 2400. Tehát a *medián* 2400.
Így írjuk: Me(F) = 2400.

c) Kiszámítjuk a valós fizetés és az átlagos M(F) = 3004 közötti különbséget minden alkalmazott esetében, és a következő értékhalmazt kapjuk:

KBS 1: –504, –604, –904, –504, +6986, –1024, –1014, –774, –224, –554, –880.

d) Rendezve az értékeket:

KBS 1: –1024, –1014, –904, –880, –774, –604, –554, –504 ,–504, –224, +6986.

e) Kiszámítjuk a valós fizetés és az átlagos Me(S) = 2400 közötti különbséget minden alkalmazott esetében, és a következő értékeket kapjuk:

KBS 2: –420, –410, –300, –276, –170, 0, 50, 100, 100, 380, 7590.

f) A KBS 1 készletből kiderül, hogy a részleg 11 alkalmazottja közül 10-nek az átlagosnál alacsonyabb fizetése van, értéke 224 lej és 1024 lej között van, és csak egynél magasabb a fizetés 6986-mal, mint az átlag.

Tehát az *átlag* nem pontos mutatója a fizetés nagyságának, amelyet a részlegen dolgozó alkalmazottak kapnak. Erősen befolyásolják a szélsőséges, a legalacsonyabb (1980 lej) és a legmagasabb (9990 lej) értékek.

Megjegyzés. Egyes statisztikai felméréseknél a szélső értékeket eltávolítják az átlag kiszámításából.

A KBS 2 készlet azt mutatja, hogy a 11 alkalmazott közül 5-nél alacsonyabbak az átlagfizetések, 170 és 420 lej közötti különbségekkel, 4-nél magasabbak a fizetések, 50 és 380 lej közötti különbségekkel, és egy fizetés pedig 7590-nel nagyobb, mint a medián.

Arra a következtetésre jutunk, hogy a medián a részleg alkalmazottainak az átlagnál valóságosabb fizetésértékét jellemezi.

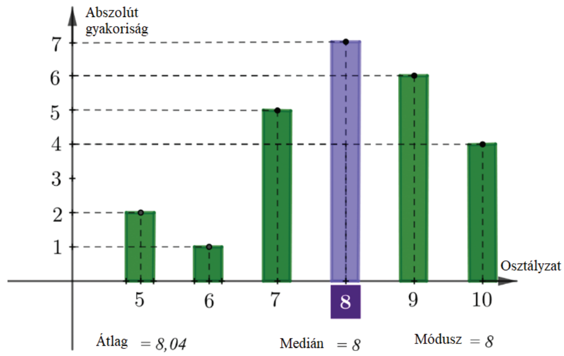
4. értelmezés. A változó *módusza* vagy modális értéke a legmagasabb gyakoriságnak megfelelő érték.

Megjegyzés. A módusz nem feltétlenül egyedi, vannak olyan adathalmazok, amelyeknek több értéke (vagy értékosztálya) van, amelyek megfelelnek a maximális gyakoriságnak. Az X változó esetében Mo(X)-szel jelöljük a móduszát.

Alkalmazás

2. alkalmazás. Egy tudáspróbán az osztály tanulói által elért osztályzatokat az alábbi táblázat tartalmazza. Határozd meg a *centrális mutatók értékeit* és értelmezd geometrikusan ezeket az értékeket!

Osztályzat	Abszolút gyakoriság	
5	2	
6	1	
7	5	
8	7	**Módusz**
9	6	
10	4	



Legyen „Osztályzat" a leírt változó. Azt kapjuk, hogy M(*Osztályzat*) $= \dfrac{5\cdot2+6\cdot1+7\cdot5+8\cdot7+9\cdot6+10\cdot4}{25} = 8{,}04$.

Me(*Osztályzat*) = 8, mert 12 tanuló (2 + 1 + 5 + 4) legfeljebb 8-as és további 12 tanuló (2 + 6 + 4) legalább 8-as osztályzatot kapott.

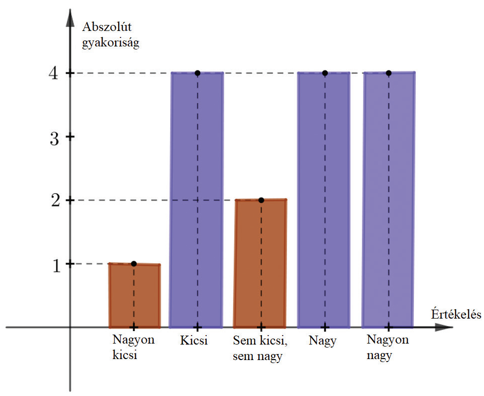
Mo(*Osztályzat*) = 8, mert a változó 8-as értéke rendelkezik a maximális gyakorisággal, ami azt jelenti, hogy ebben a tesztben a leggyakoribb (domináns) osztályzat a 8-as.

Megjegyzés. A három mutató értéke olyan közel van, hogy az eloszlás meglehetősen kiegyensúlyozott és a szélső értékek közötti különbség viszonylag kicsi.

Megjegyzés. A módusz minőségi változókhoz is használható.

3. alkalmazás. Értékelni kell egy bizonyos tévéműsor oktató hatását a serdülőkorú fogyasztókra. Határozd meg az adott változó móduszát!

Értékelés	Gyakoriság
Nagyon kicsi	1
Kicsi	4
Sem kicsi, sem nagy	2
Nagy	4
Nagyon nagy	4



A maximális gyakoriság (4) alacsony, magas és nagyon magas értékekre jellemző. Érdekes megjegyezni, hogy: 1) multimodális változóval találkoztunk (a maximális gyakoriság a változó több értékét jellemzi)
Értékosztályok szerinti csoportosítással a következő eredményeket kapjuk:

Értékosztály	*Kicsi vagy nagyon kicsi*	*Sem kicsi, sem nagy*	*Nagy vagy nagyon nagy*
Gyakoriság	5	2	8

Két lényeges tájékoztatást kapunk: 1. A legtöbb tizenévesre (több mint fele) a műsor nagy vagy nagyon nagy hatást gyakorolt. 2. A válaszadók közül csak kettő maradt közömbös a kérdés iránt, amelyről a kérdőív szólt.

Gyakorlatok és feladatok

1. Az iskola VIII. osztályos tanulóinak egész számban, cm-ben kifejezett magasságát 5 hosszúságú intervallumokba csoportosítottuk. A "magasság" statisztikai sorozat magasságtartományokban a következő:

Magasság	[155-160)	[160-165)	[165-170)	[170-175)	[175-180)	[180-185)
A tanulók száma	5	11	16	20	8	3
Centrális érték	157					
A válasz indoklása	Ez az intervallum páratlan számú (5) számot tartalmaz: 155, 156, 157, 158, 159, ahol a középső szám a centrális érték.					

a) Másold a füzetedbe, majd töltse ki a táblázatot az egyes intervallumokban levő magasság középértékével, a megadott minta alapján!

b) A kapott centrális értékek felhasználásával végezd el a szükséges számításokat, és igazold, hogy a tanulócsoport átlagos magassága M = 168,90 cm!

2. A vállalat termelékenységének elemzéséhez 30 alkalmazottból álló statisztikai mintát választottak. A 30 alkalmazott által az előző napon gyártott alkatrészek adatait a következő táblázat mutatja:

Termelés (alkatrészcsoportok)	[20-35)	[35-50)	[50-65)	[65-80)	[80-95)
Az alkalmazottak száma	2	8	9	7	4

a) Számítsd ki a gyártott alkatrészek egy főre eső átlagát!

b) Határozd meg a gyártott alkatrészek azon intervallumát, amelyeknél az alkalmazottak számának gyakorisága a legnagyobb!

3. Számítsd ki a következő táblázatban az "Osztályzat" statisztikai sorozat statisztikai változójának átlagát!

Osztályzat	4	5	6	7	8	9	10
Gyakoriság	1	4	5	7	13	14	6

4. A laboratóriumi mérésekhez a következő súlykészletet választják: 4 g, 3 g, 2 g, 5 g, 1 g, 10 g, 15 g. Rendezd a súlyok értékeit növekvő sorrendbe, és határozd meg a statisztikai sorok mediánértékét!
Hasonlítsd össze *súlyok* mediánértékét a súlyok *átlagértékével*!

5. Egy polcon négy különböző palack ásványvíz található. Térfogatuk 300 mℓ, 500 mℓ, 1 ℓ és 1,5 ℓ.

a) Határozd meg a statisztikai sorok esetén a térfogatoknak megfelelő mediánértéket (Me)!

b) Számítsd ki a Me és a polcon lévő palackok átlagos térfogata (M) közötti különbséget!

6. Öt különféle csokoládé árulnak egy cukrászdában. Minden csokoládéfajta után azonos összegű pénz gyűlt össze, a teljes összeg pedig S lej.

a) Határozd meg egy tábla csokoládé átlagos eladási árát, ismerve az egyes csokoládétípusok árát!

Termék Csokoládétípus	A	B	C	D	E
Ára, lej/tábla	1	8	5	2	4

b) Tudva, hogy az összegyűjtött összeg $S = 1000$ lej, határozd meg az egyes típusokból eladott tábla csokoládé számát, és készíts táblázatot a csokoládéfajták értékesítési gyakoriságáról!

7. A következő táblázat mutatja a fizetést, amelyet a cég alkalmazottai egy hónap alatt gyártott termékekért kaptak:

A kapott havi fizetés intervallumonként, lejben kifejezve	Az alkalmazottak száma	A fizetésintervallum centrális értéke	Indoklás
[2350, 2450)	5	2399,5	Ez az osztály a következő értékeket tartalmazza: 2350, 2351, ..., 2449, vagyis páros számú (100) érték. A középső értékek 2399 és 2400, átlaguk pedig 2399,5.
[2450, 2550)	15		
[2550, 2650)	35		
[2650, 2750)	30		
[2750, 2850)	10		
[2850, 2950)	5		
Összesen	100		

a) Másold a táblázatot a füzetbe, és töltsd ki az egyes értékosztályok (fizetésintervallumok) centrális értékének oszlopát az adott modell alapján.

b) Egy intervallum minden fizetését a centrális értékre közelítve határozd meg a vállalat alkalmazottainak átlagos fizetését!

c) Számítsd ki a „kapott havi fizetés centrális értéke" statisztikai sorozat mediánját és móduszát!

Megjegyzés. A csoportosított változó mediánjának kiszámítása olyan képletek szerint történik, amelyek meghaladják e tankönyv szintjét!

8. A 25 lakásos tömbház bérlőinek 2019 áprilisában a villamosenergia-fogyasztását természetes számokban, kw-ban fejezték ki. A csoportosított adatok a következők:

Villamosenergia-fogyasztás (kw/h)	A lakások száma	Centrális érték	Becsült energiafogyasztás, osztályokként
70 – 79 kW	2		
80 – 89 kW	3		
90 – 99 kW	10	94,5	945
100 – 109 kW	5		
110 – 119 kW	3		
120 – 129 kW	2		
Összesen	25		

a) Másold a táblázatot a füzetbe, és töltsd ki az egyes fogyasztási osztályok centrális értékét!

b) Számold ki az átlagos villamosenergia-fogyasztást, amely becslésünk szerint minden lakásra vonatkozik!

c) A kapott eredmények felhasználásával becsüld meg a következőket:

1. Az átlagosnál alacsonyabb fogyasztású lakások száma.
2. Az átlagosnál magasabb fogyasztású lakások száma.
3. Ábrázold mértanilag a statisztikai sorokat oszlopdiagram segítségével, fogyasztási osztályok szerint, és jelöld ki a modális osztályt!

ISMERETFELMÉRŐ

Hivatalból 10 pont.

I. tétel *Válaszd ki az egyetlen helyes válasz betűjelét az alábbi feladatokban! .*

5p **1.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = -2x + 1$ függvény. Az f függvény értéke $x = -1$ esetén:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5p **2.** Adott a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = ax - 1$ függvény. Ha az $A(-1, 1)$ a g függvény grafikus képének egy pontja, akkor az a értéke:

A. 3 B. -2 C. -3 D. 2

5p **3.** A $h: \{-2; -1; 0; 1; 2\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = |x| - 1$ függvény értékeinek halmaza:

A. $\{-2; -1; 0\}$ B. $\{-1; 0; 1; 2\}$ C. $\{-1; 0; 1\}$ D. $\{0; 1; 2\}$

5p **4.** Ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = -x + 3$ és $f(a) + f(b) + f(c) = 10$, akkor az $a + b + c$ összeg egyenlő:

A. -1 B. 0 C. 1 D. 3

5p **5.** A $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 3 - x$ függvény és az Ox koordinátatengely metszéspontja:

A. $A(-3, 0)$ B. $B(0, -3)$ C. $C(0, 3)$ D. $D(3, 0)$

5p **6.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = -x + 2$ függvény. Ha $f(a + b) = a - b$, akkor az a értéke:

A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

5p **7.** Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = -x + 2$ függvények grafikus képei metszéspontjának koordinátái:

A. $(1, -1)$ B. $(1, 1)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, -1)$

5p **8.** Ábrázoljuk az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$ függvényt olyan xOy derékszögű koordináta-rendszerben, melyben a használt mértékegység a centiméter. A függvény grafikus képe és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög területe

A. 2 cm² B. 4 cm² C. 1 cm² D. 3 cm²

II. tétel *Az alábbi feladatok részletes megoldásait kell leírni.*

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{1}{2}x$, és legyen d illetve d' ezen függvények grafikus képe.

5p **a)** Határozd meg az $u \in \mathbb{R}$ számot tudva, hogy $A(2, u) \in d$.

5p **b)** Határozd meg a $v \in \mathbb{R}$ számot tudva, hogy $B(2, v) \in d'$.

10p **c)** Határozd meg a d és d' egyenesek metszéspontjának koordinátáit!

10p **d)** Bizonyítsd be, hogy $d \perp d'$.

2. Egy autógyár 2017-ben, 2018-ban, 2019-ben 5% -kal növelte termelését az előző évhez képest.

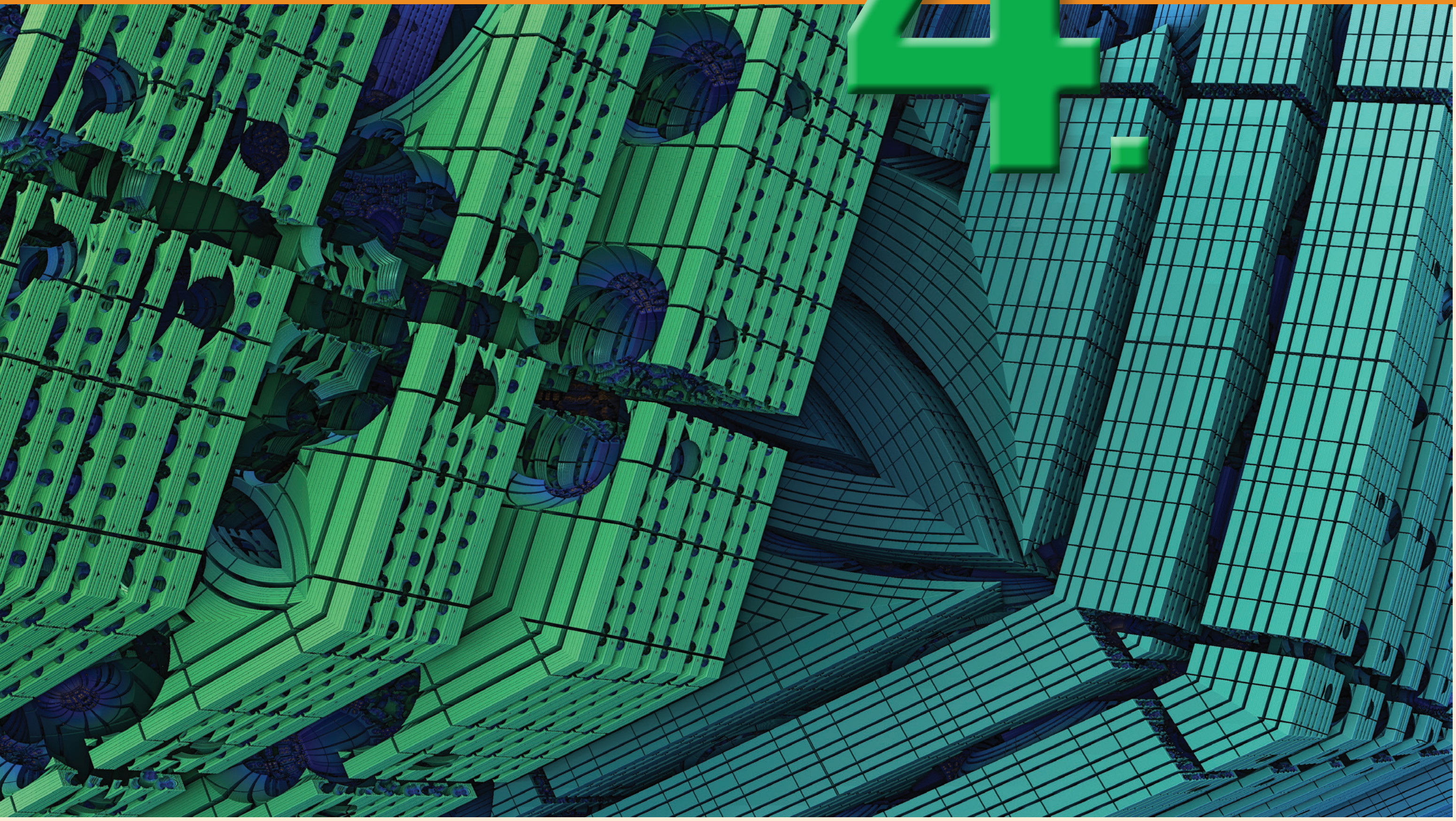
10p **a)** Tudva, hogy 2017-ben a gyárban 2 520 000 személygépkocsit gyártottak, egészítsd ki a következő táblázatot:

Év	2016	2017	2018	2019
A gyártott személygépkocsik száma		2 520 000		

5p **b)** Határozd meg az utolsó négy évben gyártott személygépkocsik teljes számát!

5p **c)** Megfelelő mértékegységet választva, ábrázold egy diagram segítségével a kapott táblázat adatait!

4. FEJEZET



A térmértan elemei

1. Pont, egyenes, sík
2. Mértani testek
3. Párhuzamosság a térben
4. Merőlegesség
5. Merőleges vetületek a térben
6. A három merőleges tétele

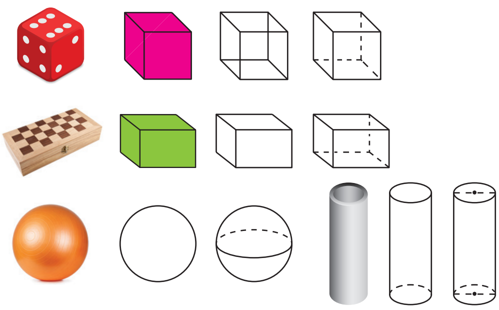
Sajátos kompetenciák

1.4. 2.4. 3.4. 4.4. 5.4. 6.4.

1. Pont, egyenes, sík

1.l. Pont, egyenes, sík: jelölések, ábrázolás, az egyenes meghatározása

A *mértan* a matematika egyik ága, amely a síkbeli és térbeli *alakzatok* és *testek* tulajdonságaival foglalkozik. A háromdimenziós tárgyakat a füzetlapon két dimenzióban ábrázoljuk. Figyeljétek meg az alábbi képeket!



Vegyétek észre, hogy a fotókon látható testeket egységes módszer alapján rajzoltuk le! A képzelőerő segít abban, hogy az ábrákat térben több irányból lássuk, megértsük azokat az elemeket is, amelyek hátul „elrejtőztek”, közvetlenül nem látszanak. Az ábrázolás során alkalmazott egyezményes módszereket mértani testenként külön-külön meg fogjuk ismerni.

A mellékelt képek között felismerjük az ötödik osztályban tanult kockát és téglatestet. Megfigyelhetünk továbbá a hétköznapi életből ismert *görbe felületű*, kerek körvonalú testeket is.

Megfogalmazunk néhány általános következtetést:

Egy térbeli tárgyat a síkban (két dimenzióban) a következő lépések alapján ábrázolunk:

1) Megfigyeljük a tárgyat és meghatározzuk azt a mértani testet (vagy testeket), amellyel jellemezhető.
2) Meghatározzuk a külső kontúrt, amely a számunkra kedvező pozícióból látható.
3) Helyesen ábrázoljuk a geometriai konfigurációt, alkalmazva az intuíción alapuló egyezményeket.

Megjegyzések: a térbeli testeket ábrázoló rajzok elkészítése

1) A téglalapot egy paralelogramma segítségével ábrázoljuk. A derékszög, aszerint, hogy honnan nézzük, kisebb vagy nagyobb valódi szögként látszik
2) A kör ábrázolható valódi kör vagy „összelapult” kör (ellipszis) segítségével.

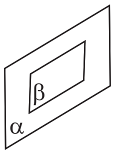
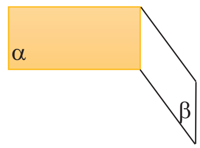
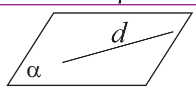
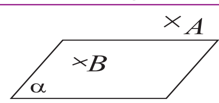
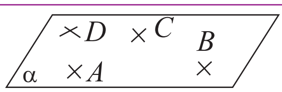
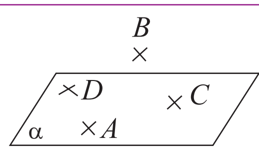
Fedezzük fel, értsük meg!

A *pont*, az *egyenes* és a *sík* a térmértan három alapfogalma. A füzetlapon egyezményes jelölés szerint ábrázoljuk őket.
A tér bármely síkjában érvényes a síkmértan minden axiómája és a belőlük származó összes következmény.

A *térmértanban* bizonyítás nélkül további *axiómákat* is elfogadunk és igaznak tekintünk:

1.A. A tér két különböző pontján át egyetlen egyenes megy át. Minden egyenesen található legalább két különböző pont.
2.A. Három, nem egy egyenesen fekvő (*nemkollineáris*) pont egyetlen síkra *illeszkedik* (a három ponton át egyetlen sík fektethető); minden sík tartalmaz legalább három nemkollineáris pontot.
3.A. A térben van legalább négy nem egy síkban található pont (vagyis a négy pont nem illeszkedik egyetlen síkra sem).
4.A. Ha két különböző síknak van egy közös pontja, akkor a két sík metszete egy egyenes.
5.A. A térben bármely egyeneshez adott külső ponton keresztül egyetlen párhuzamos egyenes húzható.
Megjegyzés. A térbeli geometriai alakzatokat a kétdimenziós síkban egyezményes jelölés alapján ábrázoljuk.

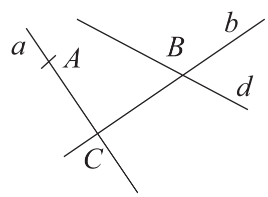
1. alkalmazás Az alábbi ábrákon azonosítsátok a pontokat, egyeneseket és síkokat! Figyeljétek meg az egyezményes jelölést, ábrázolást és olvasást!

Egyezményes ábrázolás és jelölés	Egyezményes olvasás	Egyezményes ábrázolás és jelölés	Egyezményes olvasás
A B × × $A \neq B$	*A* és *B különböző* pontok	D C × $C = D$	*C* és *D egybeeső* pontok
A C B × $B \notin AC$	*A, B* és *C nemkollineáris* pontok	A B C $AB = BC$ vagy $A \in BC$	*A, B* és *C kollineáris* pontok
 $\alpha = \beta$	α és β *egybeeső* síkok	 $\alpha \neq \beta$	α és β *különböző* síkok
 $d \subset \alpha$	A *d* egyenes az α *síkban található.*	 $A \notin \alpha$ $B \in \alpha$	Az *A* pont az α síkon *kívül* helyezkedik el. A *B* pont az α *síkban* helyezkedik el.
 $A, B, C, D \in \alpha$	Az *A, B, C* és *D* pontok egy síkban helyezkednek el (*komplanárisak*).	 $A, C, D \in \alpha$ és $B \notin \alpha$	Az *A, B, C* és *D* pontok nem egy síkban helyezkednek el (*nemkomplanárisak*).

Azt mondjuk, hogy vagy több adott feltétel *meghatároz* egy mértani alakzatot, ha egyetlen olyan alakzat létezik, amely teljesíti az összes adott feltételt.

A „Két különböző ponton át egyetlen egyenes megy át” kijelentés így fogalmazható át: *„Bármely két különböző pont meghatároz egy egyenest”.*

Példa: A mellékelt ábrán:

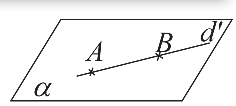


a) $A \notin d$, $A \notin b$;
b) *a B pont nem határozza meg a d* egyenest (több egyenes átmegy a *B* ponton);
c) a *B* és *C* pont meghatározza a *b* egyenest;
d) az *A* és *C* pont együtt *meghatározza* az *a* egyenest;
e) az *A*, *B*, *C* pontok nem kollineárisak.

Alkalmazás

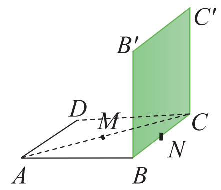
1. tétel. Ha egy egyenes két különböző pontja egy síkban található, akkor az egyenes teljesen abban a síkban található.

Bizonyítás: *d* az egyenes és α a sík, amely tartalmazza a *d* egyenes *A* és *B* pontját: $A, B \in \alpha$. A síkgeometria egyik axiómájából következik, hogy létezik olyan d' egyenes, amelyre teljesülnek a $d' \subset \alpha$ és $A, B \in d'$ feltételek. Másrészt, két különböző ponton át egyetlen egyenes megy át, ezért a d és d' egyenesek egybeesnek. Mivel $d' \subset \alpha$, következik, hogy $d \subset \alpha$.



2. alkalmazás A mellékelt ábrán $ABCD$ és $BCC'B'$ két négyzet, amelyek különböző síkokban helyezkednek el. Az M és az N pont az AC, illetve BC szakasz felezőpontja. Igazoljátok, hogy:

a) a $B'M$ egyenes nincs benne az $ABCD$ négyzet síkjában;
b) a $B'N$ egyenes benne van a $BCC'B'$ négyzet síkjában;
c) az MN egyenes benne van az ABC háromszög síkjában;
d) az AN egyenes nincs benne a $BCC'B'$ négyzet síkjában.



Megoldás. **a)** Jelöljük α-val és α'-tel az $ABCD$, illetve $BCC'B'$ négyzet síkját. $B' \notin \alpha$, tehát $B'M \not\subset \alpha$.
b) $BC \subset \alpha'$, $N \in BC$, tehát $N \in \alpha'$. Mivel $B' \in \alpha'$ és $N \neq B'$ következik, hogy a $B'N$ egyenes két különböző pontja az α' síkban található, tehát a $B'N$ egyenes a $BCC'B'$, négyzet síkjában található.
c) Az ABC háromszög síkja α. Mivel $M \in AC$ és $AC \subset \alpha$, következik, hogy $M \in \alpha$. Hasonlóan: $N \in BC$ és $BC \subset \alpha$, tehát $N \in \alpha$. Következésképpen: $MN \subset \alpha$. **d)** $A \notin \alpha'$, tehát $A'N \not\subset \alpha'$.

Gyakorlatok és feladatok

1. α egy sík és A, B, C három különböző pont. Tudjuk, hogy $A, B \in \alpha$ és $C \notin \alpha$.
a) Készítsetek ábrát, amely megfelel a feltételeknek!
b) Határozzátok meg az alábbi kijelentések logikai értékét!
p_1: „$AB \subset \alpha$” p_2: „$AC \subset \alpha$“ p_3: „$BC \not\subset \alpha$”.

2. Készítsetek ábrát, amelyen szerepeljen egy sík (α), három pont (A, B, C) és egy egyenes (AD), amelyek teljesítik a következő feltételeket: $A, B \in \alpha$, $C \notin \alpha$ és $AD \subset \alpha$.

3. Ábrázoljátok:
a) az α síkot, az $A, B \in \alpha$ pontokat és az AB egyenest;
b) a β síkot, a $C \in \beta$ és a $D \notin \beta$ pontot és a CD egyenest;
c) a γ síkot, az $E, F \in \gamma$ és $G \notin \gamma$ pontokat és az EFG háromszöget;
d) a δ síkot, az M és N pontot a δ síkon kívül, a sík ugyanazon oldalán és az MN egyenest!

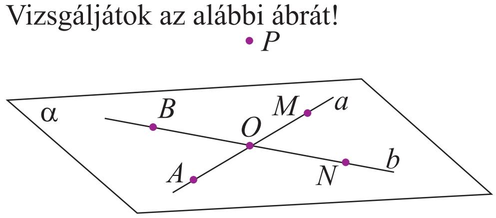
4. Azonosítsatok a környezetetekben egy síkfelületet! Keressetek két pontot és két egyenest ebben a síkban! Készítsetek ábrát! Jelöljétek megfelelően az így kapott mértani alakzatot!

5. Készítsetek ábrát, ha A, B, C három különböző pont, d egy egyenes, β egy sík, és teljesülnek a következő feltételek: $A, B \in \beta$, $C \notin \beta$, $d \subset \beta$, $A \in d$, $B \notin d$.

6. Állapítsátok meg az alábbi kijelentések logikai értékét!
a) Bármely két különböző pont egy egyenesen található (egy egyenesre illeszkedik).
b) Bármely d egyenes esetén egyetlen α sík létezik, amely az egyenest tartalmazza.
c) Bármely β sík tartalmaz legalább egy egyenest.
d) Ha három pont egy síkban található, akkor kollineárisak.

7. Az A, B, C és D pontok páronként különbözőek. Számítsd ki az általuk meghatározott egyenesek számát az alábbi esetekben:
a) A, B és C kollineárisak;
b) a négy pont között nincs három kollineáris pont;
c) az A, B, C és D pontok nincsenek egy síkban (nem komplanárisak).

8. Vizsgáljátok az alábbi ábrát!



Ha $AO = OM$ és $BO = ON$, döntsétek el a kijelentések logikai értékét!

a) $A \in a$	**e)** $\{A, B, O\} \subset \alpha$
b) $N \notin b$	**f)** $b \subset \alpha$
c) $AM = a$	**g)** $a \cap b = \{O\}$
d) $PO \subset \alpha$	**h)** $MN \cap AB = \varnothing$

9. Adott az α sík és négy térbeli pont: M, N, P, Q. Tudjuk, hogy $MN \subset \alpha$, $P \in \alpha$ és $PQ \not\subset \alpha$.
a) Készítsetek a feltételeknek megfelelő ábrát!
b) Állapítsátok meg az alábbi kijelentések logikai értékét!
p_1: $Q \in \alpha$ p_2: $M \in \alpha$ és $N \in \alpha$;
p_3: $M \in \alpha$ és $Q \notin \alpha$.

2.l. A sík meghatározása. Pontok, egyenesek és síkok közti kapcsolatok

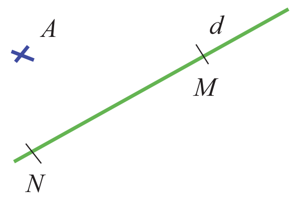
Az A2-es axióma: három *nemkollineáris* ponton át egyetlen sík fektethető. Ez a *sík meghatározásának axiómája*, mert így is fogalmazható:

Bármely három nemkollineáris pont meghatároz egy síkot.

Az A, B, C nemkollineáris pontok által meghatározott sík jelölése: (ABC).

Az axiómák alapján, felhasználva a síkmértan következtetéseit is, további térmértani következtetésekre jutunk. Keressük a sík *meghatározásának* további lehetőségeit!

1. tétel. Egy d egyenes és egy rajta kívül fekvő A pont meghatároz egy síkot.



A d egyenes és az A pont által meghatározott sík jelölése: (d, A).

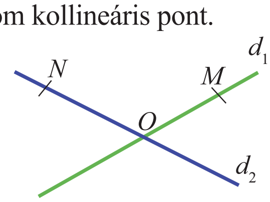
Bizonyítás. Azt fogjuk igazolni, hogy *létezik egyetlen* olyan α sík, amely tartalmazza a d egyenest és az A pontot.
Ha M és N a d egyenes két különböző pontja (M és $N \in d$), és $A \notin d$ akkor M, N és A nemkollineáris pontok, tehát a sík meghatározásának axiómája szerint ők egyértelműen meghatároznak egy α síkot.
Az $MN = d$ egyenes benne van az α síkban, tehát tehát $d \subset \alpha$ és $A \in \alpha$. Azt kell még bizonyítani, hogy α az egyetlen olyan sík, amely teljesíti ezt a feltételt. Az ellentmondásra való visszavezetés (reductio ad absurdum) módszerét használjuk.
Feltételezzük az állítás ellenkezőjét: létezik még egy $\beta \neq \alpha$ sík, amely tartalmazza az A pontot és a d egyenest, vagyis $d \subset \beta$ és $A \in \beta$. Ebből következik, hogy $M, N \in \beta$ és $A \in \beta$. Mivel M, N és A három nemkollineáris pont, egyértelműen meghatározzák a β síkot. Korábban egyértelműen meghatározták az α síkot is, tehát $\beta = \alpha$, ami ellentmond a kiinduló feltételnek, amely szerint $\beta \neq \alpha$. Ebből következik a feltételezés hamis volt, ezért α az egyetlen olyan sík, amely tartalmazza a d egyenest és az A pontot.

1. alkalmazás. A, B, C és D nem egy síkban található pontok. Döntsétek el, hogy van-e köztük három, egy egyenesen található (kollineáris) pont. Érveljetek!

Megoldás. Tételezzük fel, hogy három pont, pl. A, B és C kollineáris. Ebben az esetben az (AB, D), (AC, D) és (BC, D) síkok egybeesnek, tehát a A, B, C és D pontok egy síkban találhatóak. Ez ellentmond a feltételnek, tehát A, B és C nem lehetnek kollineáris pontok. Hasonló gondolatmenet alapján zárható ki bármely ponthármas kollinearitása.

Következtetés. Ha a térben négy pont nem egy síkban található, akkor nincs közöttük három kollineáris pont.

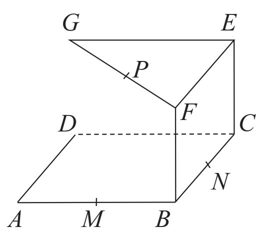
2. tétel. Két metsző egyenes, d_1 és d_2 meghatároz egy síkot.



A d_1 és d_2 egyenesek által meghatározott sík jelölése: (d_1, d_2).
A bizonyítás megtalálható a tankönyv digitális változatában.

2. alkalmazás. Az $ABCD$ téglalap, a $BCEF$ négyzet és az EFG háromszög páronként különböző síkokban található. Az M, N és P pont az AB, BC, illetve GF szakasz felezőpontja.

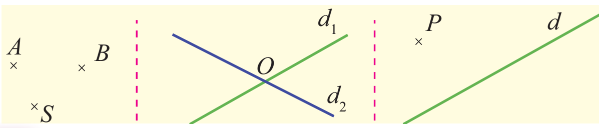
a) Találjatok az ábra alapján három (d, T) egyenes-pont párt, amely a feltételben szereplő síkoktól különböző síkot határoz meg.
b) Találjatok négy (d_1, d_2) egyenes-egyenes párt, amely a feltételben szereplő síkoktól különböző síkot határoz meg.
c) Csoportosítsátok az alábbi kijelentéseket a logikai értékük szerint (igaz – hamis).
p_1: Az AB egyenes meghatároz egy síkot.
p_2: Az MN egyenes és a P pont meghatároz egy síkot.
p_3: Az (ABC) és az (ADC) síkok egybeesnek.
p_4: Az AB és BF egyenes meghatározza az (AMF) síkot.



Megoldás. **a)** (*AB, P*), (*AB, E*), (*AB, G*). Az ábra alapján további síkokat is lehet találni. **b)** Az *AB* és *BF* egyenesek metszik egymást, tehát meghatározzák az (*ABF*) síkot. Hasonlóan határozzuk meg a (*BFG*), (*DCE*) és (*CEG*) síkokat. **c)** A p_1 kijelentés hamis, mert az *AB* egyenest több sík is tartalmazza, pl.: (*ABC*) és (*ABF*). A p_2 kijelentés igaz, mert a *P* pont nem illeszkedik az *MN* egyenesre, tehát az *MN* egyenes és a *P* pont meghatároz egy síkot. A p_3 kijelentés igaz, mert a az *A, B, C* és *D* pontok egy téglalap csúcsai, tehát egy síkban találhatóak. A p_4 kijelentés igaz, mert az *AB* és *BF* egyenesek metszik egymást, tehát meghatároznak egy síkot, amelyben az *M* pont is található.

Gyakorlatok és feladatok

1. Az ábrákon az adott elemek síkokat határoznak meg. Hogyan jelöljük ezeket a síkokat?



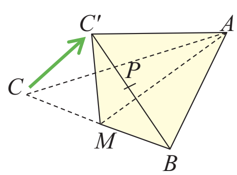
2. Ha *A, B, C* és *D* négy különböző pont, amelyek közül három kollineáris, hány síkot lehet meghatározni a segítségükkel?

3. Tudjuk, hogy *A, B, C* és *D* négy pont, amelyek nem illeszkednek egy síkra.
a) Igazoljátok, hogy a pontok nem lehetnek kollineárisak!
b) Hány sík határozható meg a pontok segítségével? Jelöljétek a pontok segítségével a síkokat!

4. Mértani eszközök segítségével rajzoljatok egy kartonpapírra egyenlő oldalú háromszöget és húzzátok meg a háromszög egyik középvonalát! Vágjátok ki a háromszöget és hajtsátok be a középvonal mentén! Ábrázoljátok a füzetben a kapott mértani alakzatot!

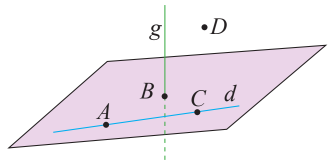
5. Tekintsük az *a* és *b* metsző egyeneseket és a rajtuk elhelyezkedő *A* és *B* különböző pontokat: $A \in a$ és $B \in b$.
a) Készítsetek a feltételeknek megfelelő ábrát!
b) Igazoljátok, hogy az *AB* szakasz felezőpontja az (*a, b*) síkban található!
c) Bizonyítsátok be, hogy az *AB* egyenes bármely pontja az (*a, b*) síkban található!

6. Az *ABC* egyenlő oldalú háromszög egyik oldalának hossza 6 cm. Behajtjuk a háromszöget az *AM* oldalfelezője mentén az ábrának megfelelően.



a) Milyen fajtájú az *ABC'* háromszög? Indokoljátok meg a választ!
b) Ha $BC' = 4\sqrt{2}$ cm és *P* a *BC'* szakasz felezőpontja, határozzátok meg az *AP* szakasz hosszát!

7. Az ábrán látható az *A, B, C, D* pont, *d, g* egyenes és α sík.



Másoljátok le a füzetbe az alábbi táblázatot és matematikai jelöléseket használva egészítsétek a megadott modell alapján.

A(z) ... pont a(z) ... egyenesen található	A(z) ... pont nem található a(z) ... egyenesen	A(z) ... pont a(z) ... egyenesen található
$A \in d$	$A \notin g$	$A \in (g, A)$
A(z) ... pont nem található a(z) ... egyenesen	A(z) ... pont a(z) ... egyenesen található	A(z) ... pont nem található a(z) ... egyenesen
$A \notin (BCD)$	$AB \subset \alpha$	$AB \not\subset (BCD)$

8. **a)** Bizonyítsátok be, hogy ha az *a, b, c* különböző egyenesek páronként különböző pontban metszik egymást, akkor a három egyenes ugyanabban a síkban található!
b) Az *a, b, c* egyenesek nem illeszkednek ugyanarra a síkra, és $a \cap b \neq \varnothing$, $a \cap c \neq \varnothing$ és $b \cap c \neq \varnothing$. Bizonyítsátok be, hogy az *a, b* és *c* egyeneseknek van egy közös pontja!

9. Az *A, B, C* és *D* pontokról tudjuk, hogy *A*, *B*, $C \in \alpha$, $D \notin \alpha$ és $B \notin (DAC)$.
a) Készítsetek a feltételeknek megfelelő ábrát!
b) Igazoljátok, hogy az *A* pont nem található a (*BCD*) síkban.
c) Hány sík határozható meg az *A, B, C* és *D* pont segítségével?
d) Bizonyítsátok be, hogy a (*DAB*) és (*DBC*) síkok különböznek egymástól.

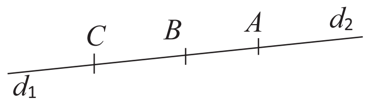
3.6. Két egyenes kölcsönös helyzete a térben

Emlékeztető

Két egyenes a síkban lehet *egybeeső*, *metsző* vagy *párhuzamos*.

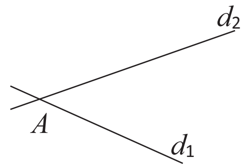
1) Az $AB = d_1$ és $AC = d_2$ *egyenesek egybeesnek.*

$$d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$$



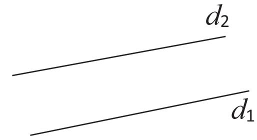
2) A d_1 és d_2 egyenesek *metszik egymást.*

$$d_1 \cap d_2 = \{A\}$$



3) A d_1 és d_2 egyenesek *párhuzamosak.*

$$d_1 \cap d_2 = \varnothing$$

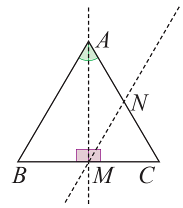


Példák.

1) Az ABC egyenlő oldalú háromszögben az A szög szögfelezőjének tartóegyenese és a BC oldal felezőmerőlegese egybeeső egyenesek.

2) Az AB és AC egyenesek az A pontban metszik egymást.

3) Ha N az AC oldal felezőpontja, akkor az MN és AB egyenesek párhuzamosak.



Fedezzük fel, értsük meg!

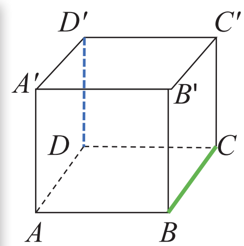
1. alkalmazás. A mellékelt ábrán egy kocka látható.

a) Azonosítsatok négy olyan egyenespárt, amelyek mindkét tagja egy síkban található!

b) Az egyenespárok tagjai metszik egymást vagy párhuzamosak egymással?

c) Döntsétek el, hogy a DD' és BC egyenesek egy síkban találhatóak-e! Indokoljátok is a választ!

d) Keressetek a környezetetekben egy síkban található és nem egy síkban található egyenespárokat!



Megoldás. **a)** (AB, BC), (AB, BB') egy-egy négyzet egymás melletti oldalai $(BC, B'C')$, (BB', CC') pedig egy-egy négyzet egymással szembeni oldalai. Mind a négy egyenespár *egy síkban található egyenesekből* áll.

b) Az (AB, BC) és (AB, BB') egyenespárok komponensei *metszik egymást*, a $(BC, B'C')$, (BB', CC') egyenespárok komponensei *párhuzamosak egymással.*

c) $D' \notin (BCD)$. Ha DD' és BC egy síkban lenne, akkor a D' pont a (BCD) síkban helyezkedne el, ami ellentmondás.

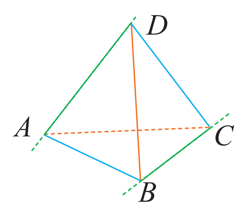
Következmény: a térben léteznek nem egy síkban található egyenesek. Ezeket kitérő egyeneseknek is nevezzük.

2. alkalmazás. Négy, nem egy síkban található pont meghatároz három kitérő egyenespárt.

Bizonyítás. A, B, C, D a négy, nem egy síkban található pont. Mivel A, B és C három nemkollineáris pont, meghatározzák az $\alpha = (ABC)$ síkot.

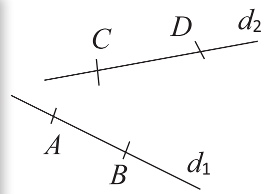
Reductio ad absurdum: feltételezzük, hogy az AD és BC egyenes ugyanabban a síkban helyezkedik el. Mivel $BC \subset \alpha$ és $A \in \alpha$, következik, hogy $D \in \alpha$, vagyis A, B, C, D ugyanabban a síkban található, ami ellentmond a feltételnek.

Következtetés: az A, B, C és D, nem egy síkban található pont meghatározza az (AD, BC), (AB, CD) és (AC, BD) kitérő egyenespárokat.



3. alkalmazás. Igazoljátok, hogy ha d_1 és d_2 két, nem egy síkban elhelyezkedő egyenes, akkor $d_1 \cap d_2 = \varnothing$.

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy $d_1 \cap d_2 \neq \varnothing$, tehát létezik egy M pont, amely teljesíti $M \in d_1$ és $M \in d_2$ feltételt. Ez csak úgy lehetséges, ha a két egyenes (d_1 és d_2) metsző vagy egybeeső. Mindkét esetben, a két egyenes egy síkban helyezkedik el, ami ellentmond a feltételnek. Tehát a két egyenes metszete üres halmaz.

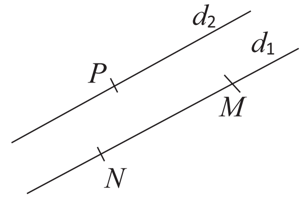


Értelmezés. A térben a d_1 és d_2 egyenest párhuzamosnak nevezzük, ha egy síkban helyezkednek el, és nincs közös pontjuk.

A.5. *A párhuzamosok axiómája.* Egy d egyeneshez egy A külső ponton keresztül egyetlen d' egyenes húzható, amely párhuzamos d-vel.

Alkalmazások

Tétel. Két párhuzamos egyenes (d_1 és d_2) meghatároz egy síkot.
A d_1 és d_2 egyenesek által meghatározott síkot (d_1, d_2)-vel jelöljük.



Bizonyítás. A d_1 és d_2 egyenesek párhuzamosak, tehát egy α síkban helyezkednek el $d_1 \subset \alpha$ és $d_2 \subset \alpha$. Bebizonyítjuk, hogy α az egyetlen sík, amely mindkét egyenest tartalmazza.

Feltételezzük, hogy létezik még egy $\beta \neq \alpha$ sík, amely a két egyenest tartalmazza: $d_1 \subset \beta$ és $d_2 \subset \beta$. Legyen M, N a d_1 egyenes két különböző pontja, P a d_1 egyenes egy pontja. Mivel $d_1 \parallel d_2$, következik, hogy M, N és P nemkollineáris pontok, tehát meghatároznak egy síkot. Ebből következik, hogy $\beta = \alpha$, ami ellentmondás. Ezért a kiinduló feltétel hibás, tehát az α sík az egyetlen, amely tartalmazza a d_1 és d_2 párhuzamos egyeneseket.

Gyakorlatok és feladatok

1. A, B, C három kollineáris pont, ebben a sorrendben, és $D \notin AB$.
a) Nevezzetek meg két azonos egyenest!
b) Nevezzetek meg két különböző egyenest!

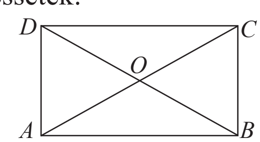
2. Adott az $ABCDA'B'C'D'$ egyenlőközű hatlap.
a) Nevezzetek meg két, nem egy síkban található egyenest!
b) Nevezzetek meg két, egy síkban található egyenest!

3. Másoljátok le és határozzátok meg a következő kijelentések logikai értékét!
a) Két egyenes, amelynek nincs közös pontja, párhuzamos egymással.
b) Bármely két egyenes meghatároz egy síkot.
c) Két egyenes lehet: egybeeső, párhuzamos, metsző vagy kitérő.
d) Ha két egyenes nem párhuzamos, akkor metszik egymást.

4. Legyen a és b két kitérő egyenes és C egy pont, amely nem található egyiken sem: $C \notin a$, $C \notin b$. Mutassátok ki, hogy létezik egy olyan d egyenes, amely tartalmazza a C pontot és komplanáris (egy síkban található) úgy az a, mint a b egyenessel!

5. Az $ABCD$ trapézban tudjuk, hogy$AB \parallel CD$, és E egy pont a térben a trapéz síkján kívül. Egészítsétek ki az alábbi mondatokat a *komplanárisak* vagy *nemkomplanárisak* kifejezések egyikével úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjatok!
a) Az EA és BC egyenesek ... .
b) Az EB és CD egyenesek ... .
c) Az AD és BC egyenesek ... .

6. Az alábbi ábrán látható $ABCD$ téglalap síkjában keressetek:

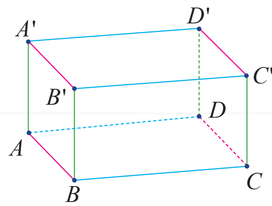


a) metsző egyenespárokat;
b) párhuzamos egyenespárokat.

7. Az $ABCD$ és $ABMN$ paralelogrammák különböző síkokban helyezkednek el. Milyen helyzetűek a következő egyenespárok?
a) MN és AB; **b)** MN és CD; **c)** AM és BN;
d) MN és BD; **e)** CM és DN;
f) MO és CP, ahol O és P a BN, illetve BD szakasz felezőpontja.

4.6. Egyenes és sík kölcsönös helyzete

Oldjuk meg figyelmesen!



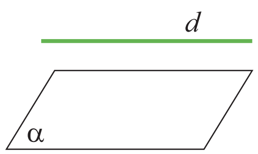
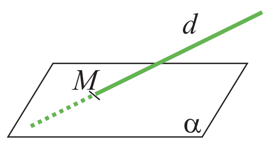
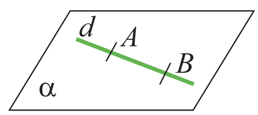
PT Készítsétek el kartonpapírból az $ABCDA'B'C'D'$ téglatestet vagy műanyagpálcákból a téglatest vázát! Figyeljétek meg, beszéljétek meg a társatokkal, és állapítsátok meg, hogy az AA', $A'B'$, $A'C'$, AD', AB, $A'C$, BB', $A'D$, $B'C'$, BD egyeneseknek *hány közös pontja van* az (ABC) síkkal? Csoportosítsátok az egyeneseket a kapott eredmények szerint!

Megoldás. $AA' \cap (ABC) = \{A\}$, $A'B' \cap (ABC) = \varnothing$, $A'C' \cap (ABC) = \varnothing$, $AD' \cap (ABC) = \{A\}$, $AB \cap (ABC) = AB$, $A'C \cap (ABC) = \{C\}$, $BB' \cap (ABC) = \{B\}$, $A'D \cap (ABC) = \{D\}$, $B'C'' \cap (ABC) = \varnothing$, $BD \cap (ABC) = BD$.

0 pont: $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$;
1 pont: AA', AD', $A'C$, BB', $A'D$
végtelenül sok pont: AB, BD

Fedezzük fel, értsük meg!

Következtetés. Ha α egy sík és d egy egyenes, akkor a következő esetek lehetségesek:

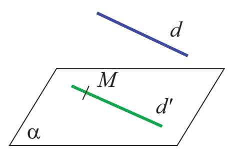
közös pontok száma	1. Az egyenesnek és a síknak nincs közös pontja	2. Az egyenesnek és a síknak egy közös pontja van	3. Az egyenesnek és a síknak végtelenül sok közös pontja van.
az egyenes és a sík kölcsönös helyzete	A d egyenes párhuzamos az α síkkal.	A d egyenes metszi az α síkot.	A d egyenes az α síkban található.
jelölés	$d \parallel \alpha$	$d \cap \alpha = \{M\}$	$d \subset \alpha$
kétdimenziós ábrázolás			

Ha a d egyenes két pontja az α síkban található, akkor $d \subset \alpha$. Ebből következik:

1. Azt, hogy a d egyenes az α síkban található, úgy bizonyíthatjuk, hogy azonosítunk két különböző pontot az egyenesen, amely a síkhoz tartozik.

2. Úgy bizonyíthatjuk, hogy a d egyenes metszi az α síkot, hogy találunk két különböző A és B pontot a d egyenesen, amelyekre igaz, hogy $A \in \alpha$ és $B \notin \alpha$.

Ha α egy sík, d egy vele párhuzamos egyenes és d' az α síkban található egyenes $d' \subset \alpha$, akkor d és d' *párhuzamos egyenesek* vagy *kitérő egyenesek*.

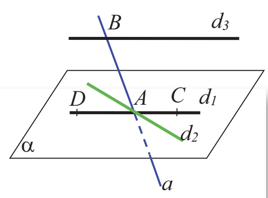


Következtetés. Ha egy egyenes párhuzamos egy síkkal, akkor abban a síkban található bármely egyenessel párhuzamos vagy kitérő egyenespárt alkot.

Hogyan bizonyíthatjuk, hogy egy egyenes párhuzamos egy síkkal?

Tétel. A d egyenes akkor és csakis akkor párhuzamos az α síkkal, ha d nem található az α síkban és d párhuzamos a síkban található valamely d' egyenessel.

Alkalmazások



1. alkalmazás. A mellékelt ábrán $d_1 \parallel d_3$, $d_1 \subset \alpha$, $d_2 \subset \alpha$, $d_3 \not\subset \alpha$, $\{B\} = d_3 \cap a$, $\{A\} = d_1 \cap d_2 \cap a$, $C \in d_1$. Határozzátok meg a kijelentések logikai értékét!

a) Az a egyenes metszi az α síkot.
b) A d_2 egyenes metszi a (d_1, d_3) síkot.
c) A (d_1, d_3) és (a, d_3) síkok nem esnek egybe.
d) A d_3 egyenes párhuzamos az α síkkal.
e) A d_2 egyenes a (d_1, d_3) síkban található.
f) Az A, B, C és D pontok nem illeszkednek ugyanarra a síkra.

Megoldás. **a)** Az A és B pont az a egyenesen található, $A \in \alpha$ és $B \notin \alpha$, tehát az „a egyenes metszi az α síkot” kijelentés igaz.

b) $d_1 \parallel d_3$ és $d_1 \subset \alpha$, következik, hogy $d_3 \parallel \alpha$. Mivel $d_2 \subset \alpha$, következik, hogy a d_2 és d_3 egyenesnek nincs közös pontja. Az A pont nem található a d_3 egyenesen, a d_3 egyenessel egyedül a d_1 egyenes párhuzamos, tehát d_2 és d_3 kitérő egyenesek. Mivel $A \in (d_1, d_3)$, $A \in d_2$ és d_2 nem található a (d_1, d_3) síkban, következik, hogy a „d_2 egyenes metszi a (d_1, d_3) síkot” kijelentés igaz.

c) Az a egyenes tartalmazza a (d_1, d_3) sík A és B pontjait, tehát $a \subset (d_1, d_3)$. A „(d_1, d_3) és (a, d_3) síkok nem esnek egybe” kijelentés hamis.

d) $d_1 \parallel d_3$ és $d_1 \subset \alpha$, tehát $d_3 \parallel \alpha$. A „d_3 egyenes párhuzamos az α síkkal” kijelentés igaz.

e) A „d_2 egyenes a (d_1, d_3) síkban található” kijelentés hamis.

f) $A, D, C \in d_1$, $B \in d_3$. Mivel a d_1 és d_3 egyenesek párhuzamosak, egy síkban vannak, meghatározzák a (d_1, d_3) síkot, tehát $A, B, C, D \in (d_1, d_3)$. Az „$A, B, C$ és D pontok nem illeszkednek ugyanarra a síkra” kijelentés hamis.

Gyakorlatok és feladatok

1. Szemléltessétek a padtársatokkal műanyag pálcák és egy síkfelület segítségével az egyenes és sík kölcsönös helyzeteit!

2. Keressetek a környezetetekben:
a) egy síkban található metsző egyeneseket;
b) egy síkban található párhuzamos egyeneseket;
c) egy egyenest és egy vele párhuzamos síkot;
d) egy egyenest, amely metsz egy síkot!

3. A, B, C és D négy, nem egy síkra illeszkedő pont.
a) Ábrázoljátok rajzzal a négy pontot, majd kössétek össze őket párosával!
b) Nevezzétek meg az AB, AC és AD egyenes helyzetét a (BCD) síkhoz viszonyítva!
c) Nevezzétek meg az AB, BC és BD egyenes helyzetét az (ACD) síkhoz viszonyítva!

4. **a)** Rajzoljatok egy α síkot, egy $d \subset \alpha$ egyenest, egy $A \notin \alpha$ pontot és egy $d' \parallel d$ egyenest úgy, hogy $A \in d'$, majd határozzátok meg d' helyzetét az α síkhoz képest!
b) Rajzoljatok egy α síkot, egy $d \subset \alpha$ egyenest, amelyre teljesül, hogy $d \cap \alpha \neq \emptyset$, majd határozzátok meg d helyzetét az α síkhoz képest!

5. Adott az $ABCDA'B'C'D'$ kocka. Keressetek:
a) az (ABB') síkkal párhuzamos egyeneseket;
b) az (ABC') síkkal párhuzamos egyeneseket;
c) az (ADD') síkban található egyeneseket;
d) az (ADD') síkot metsző egyeneseket;
e) az (ACC') síkot metsző egyeneseket!

6. Adott az α sík és az A, B, C pont: $A, B \in \alpha$, $C \notin \alpha$. Ha M az AC szakasz felezőpontja és N a BC szakasz felezőpontja, határozzátok meg az MN egyenes helyzetét az α síkhoz képest!

7. Az $ABCD$ paralelogramma és az ABE háromszög különböző síkokban helyezkedik el. Tudjuk, hogy $M \in [AE]$, $N \in [BE]$ és $\dfrac{ME}{MA} = \dfrac{NE}{NB}$.
a) a CD egyenes helyzetét az (ABE) síkhoz viszonyítva;
b) az MN egyenes helyzetét az (ABC) síkhoz viszonyítva!

8. Az ABC háromszög AB oldala az α síkban található és$C \notin \alpha$. Az $M \in [AC]$, és $N \in [BC]$ pontok úgy helyezkednek el, hogy $MC = 2MA$ és $NB = 2NC$. Határozzátok meg az MN egyenes és az α sík kölcsönös helyzetét!

9. Az $ABCD$ trapéz alapjai $[AB]$ és $[CD]$. A trapéz és a $BCEF$ paralelogramma különböző síkokban helyezkedik el. Állapítsátok meg:
a) az AD egyenes és a (BEF) sík kölcsönös helyzetét;
b) a BF egyenes és a (DCE) sík kölcsönös helyzetét;
c) az EF egyenes és az (ABC) sík kölcsönös helyzetét;
d) az O_1O_2 egyenes és az (ABF) sík kölcsönös helyzetét, ahol $\{O_1\} = AC \cap BD$ és $\{O_2\} = BE \cap CF$.

10. Az A, B, C, D pontok nem egy síkban helyezkednek el és $BD = CD$; a DE és DF félegyenesek az ADB illetve ADC szög szögfelezői, $E \in AB$ és $F \in AC$. Határozzátok meg:
a) az EF egyenes helyzetét a (BCD) síkhoz képest;
b) a BC egyenes helyzetét a (DEF) síkhoz képest!

11. Jelöljük G-vel az ABC háromszög súlypontját, M-mel és N-nel az AB oldal harmadoló pontjait: $AM = MN = NB$. Tudjuk, hogy D egy pont, amely nem illeszkedik az (ABC) síkra. Igazoljátok, hogy:
a) $GM \parallel (ACD)$; **b)** $BC \parallel (DGN)$.

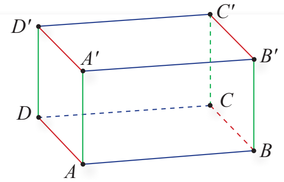
5.6. Két sík kölcsönös helyzete. Párhuzamos síkok

Emlékeztető

1) *A sík meghatározásának axiómája (2.A.)* Három nemkollineáris ponton át egyetlen sík fektethető.
2) *A síkok metszésének axiómája (4.A.)* Ha két különböző síknak van egy közös pontja, akkor a két sík metszete egy egyenes.

Következmények: 1) Ha két síknak van három közös, nemkollineáris pontja, akkor a két sík egybeesik.
2) Léteznek közös egyenessel rendelkező síkok.

Oldjuk meg figyelmesen!



Készítsétek el műanyag pálcikákból az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest vázát!
PT Figyeljétek meg a csapattársatokkal együtt, és határozzátok meg a (DAA'), $(AA'B')$, (ADC), (ABD), $(A'B'C')$, $(A'B'D')$ síkok mindegyikének, az (ABC) síkkal közös ponthalmazát!
A téglatest minden egyes éle és átlója esetén határozzátok meg az (ABC) sík és az adott él vagy átló közös pontjainak halmazát! (A téglatest átlói: AC', BD', CA', DB'.)

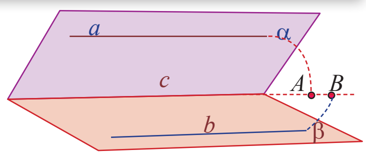
Megoldás. Az AD egyenes egyaránt illeszkedik a (DAA') és (ABC) síkra. A két sík nem azonos, mert a B pont benne van az (ABC) síkban, de nincs benne a (DAA') síkban. A 2. axióma szerint a két sík metszete *egy egyenes*, tehát $(DAA') \cap (ABC) = AD$. Hasonlóan, $(AA'B') \cap (ABC) = AB$.
Az (ADC) tartalmazza a B pontot, tehát az (ADC) és (ABC) síknak van három közös nemkollineáris pontja.
Az 1. következmény alapján a két sík *azonos*. Hasonlóan, az (ABD) és (ABC) sík is azonos. Ösztönösen érezzük, hogy az $(A'B'C')$ és (ABC) síkoknak *nincs közös pontja*. Az $(A'B'D')$ sík azonos az $(A'B'C')$ síkkal, tehát az $(A'B'D')$ és (ABC) síkoknak sincs közös pontjuk. Néhány él illetve átló metszéspontjainak halmaza az (ABC) síkkal:
$A'B' \cap (ABC) = \varnothing$, $A'C' \cap (ABC) = \varnothing$, $AD' \cap (ABC) = \{A\}$, $AB \cap (ABC) = AB$, $A'C \cap (ABC) = \{C\}$, $BB' \cap (ABC) = \{B\}$, $A'D \cap (ABC) = \{D\}$, $B'C' \cap (ABC) = \varnothing$, $BD \cap (ABC) = BD$.

Fedezzük fel, értsük meg!

A fenti gyakorlat azt sugallja, hogy léteznek olyan síkok, amelyeknek *nincs közös pontjuk*. Mielőtt ezt bebizonyítjuk, vizsgáljuk meg a következő alkalmazást!

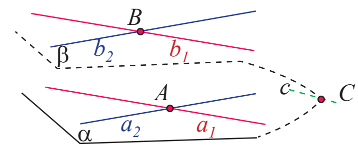
1. tétel (a háztető tétele). Ha α és β két metsző sík, amely tartalmazza az a illetve b párhuzamos egyenest, akkor a két sík metszésvonala is párhuzamos ezekkel az egyenesekkel.

Feltétel: $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ és $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$, $\alpha \neq \beta$.
Következtetés: $\alpha \cap \beta = c$ és $a \parallel b \parallel c$.



Bizonyítás. Ha $a = c$ vagy $b = c$, a kijelentés nyilvánvalóan igaz. Vizsgáljuk az $a \neq c$, $b \neq c$ esetet! Ebben az esetben $\alpha = (a, c)$ és $\beta = (b, c)$. Mivel a és c két különböző egyenes az α síkban, két eset lehetséges: $a \parallel c$ vagy $a \cap c = \{A\}$.
Ugyanígy, b és c két különböző egyenes a β síkban, tehát $b \parallel c$ vagy $b \cap c = \{B\}$.
Ha $a \parallel c$ és $b \cap c = \{B\}$, akkor a B ponthoz illeszkedő mindkét egyenes, b és c párhuzamos a-val. Ez ellentmond a párhuzamosok axiómájának (5. axióma).
Ha $a \cap c = \{A\}$ és $b \parallel c$, akkor az A ponthoz illeszkedő mindkét egyenes, a és c párhuzamos az b-vel, ami szintén ellentmond a párhuzamosok axiómájának. Ha $a \cap c = \{A\}$ és $b \cap c = \{B\}$ akkor lehetséges $A = B$ vagy $A \neq B$. Előbbi esetben $a \cap b = \{A\}$, ami ellentmond a feltételnek, utóbbi esetben pedig $c = AB$ tehát $c \subset (a, b)$ vagy $\alpha = (a, c) = (a, b) = (b, c) = \beta$, ami szintén ellentmond a feltételnek.
Végeredményben: $a \parallel c$ és $b \parallel c$.

2. tétel A térben *léteznek párhuzamos síkok.*



Bizonyítás. Vegyünk egy α síkot, és ebben a síkban $A \in \alpha$ ponton keresztül fektetünk két egyenest: $a_1 \subset \alpha$ és $a_2 \subset \alpha$, $a_1 \cap a_2 = \{A\}$. Felveszünk egy B pontot az α síkon kívül, és a párhuzamosok axiómája szerint a B ponton átmenő a_1 és a_2 egyenesekkel párhuzamos b_1, illetve b_2 egyeneseket: b_1 $b_1 \cap b_2 = \{B\}$ és $a_1 \parallel b_1$, $a_2 \parallel b_2$. Ezek egy síkot határoznak meg: $\beta = (b_1, b_2)$. Bebizonyítjuk, hogy az α és β síknak nincs közös pontja. Újra az ellentmondásra való visszavezetés (*reductio ad absurdum*) módszeréhez folyamodunk. Feltételezzük, hogy az α és β síknak van egy közös pontja, vagyis létezik egy $C \in \alpha \cap \beta$ pont, amiből következik, hogy a két sík egy c egyenesben metszi egymást. Az α és α sík tartalmazza az a_1, illetve b_1 párhuzamos egyenest: $a_1 \parallel b_1$. Az 1. tétel alapján $\alpha \cap \beta = c$ és $c \parallel a_1$. Ugyanígy, ha $a_2 \parallel b_2$, következik, hogy $\alpha \cap \beta = c$ és $c \parallel a_2$. Végeredményben $a_1 \parallel c \parallel a_2$ vagy $a_1 \parallel a_2$, ami ellentmond az $a_1 \cap a_2 = \{A\}$ feltételnek. Tehát a feltételezés hamis, vagyis a két síknak nincs közös pontja. Lehetséges, hogy két síknak minden pontja közös, hogy egy egyenese közös, vagy hogy egyetlen pontja sem közös.

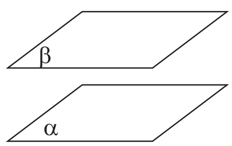
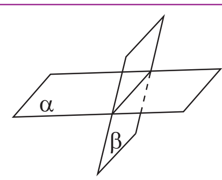
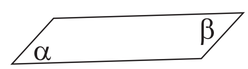
1. értelmezés Két sík *egybeeső* (azonos), ha minden pont, amely illeszkedik egyik síkra, illeszkedik a másikra is.

2. értelmezés Két síkot *metsző síkoknak* nevezünk, ha a közös részük egy egyenes.

3. értelmezés Két síkot *párhuzamos síkoknak* nevezünk, ha nincs egyetlen közös pontjuk sem.

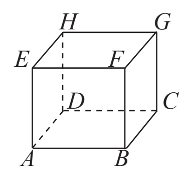
Alkalmazások

Következtetés. Ha α és β két sík, az alábbi esetek lehetségesek

A síkok metszete	1. Az α és β síknak nincs közös pontja. $\alpha \cap \beta = \varnothing$	2. Az α és β síknak van egy közös egyenese. $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$ és $\alpha \neq \beta$	3. Az α és β sík egybeesik. Minden pontjuk közös $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$
A síkok kölcsönös helyzete	*Párhuzamos síkok.*	*Metsző* síkok.	*Egybeeső* síkok.
Jelölés	$\alpha \parallel \beta$	$\alpha \cap \beta = d$	$\alpha = \beta$
Kétdimenziós ábrázolás			

A párhuzamossággal kapcsolatos további kérdéseket, felfedezéseket egy következő fejezetben tárgyaljuk.

Feladat a portfólióba



ABCDEFGH egy kocka. Határozzátok meg a következő síkpárok kölcsönös helyzetét:
a) (*ABC*) és (*BCD*) **b)** (*ABC*) és (*BCF*) **c)** (*ABC*) és (*EFG*)

Gyakorlatok és feladatok

1. *ABCDMNPQ* egy téglatest. Határozzátok meg a következő síkpárok kölcsönös helyzetét:
a) (*ABC*) és (*MBQ*) **b)** (*ACP*) és (*BDQ*)
c) (*AMC*) és (*NPQ*) **d)** (*ADQ*) és (*BCN*).

2. Az *ABCDEFGH* kocka *GC* élének felezőpontja *P*. Állapítsátok meg a síkpárok kölcsönös helyzetét:
a) (*BPH*) és (*ADE*) **b)** (*BHP*) és (*ABC*)

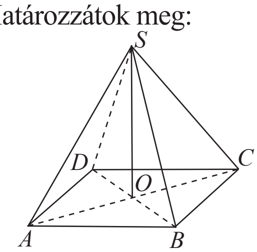
3. *ABCD* paralelogramma és *S* egy pont, amely nem illeszkedik az (*ABC*) síkra. Határozzátok meg:
a) $(SAB) \cap (SAB)$

b) $(SAB) \cap (SBC)$

c) $(SAB) \cap (SCD)$

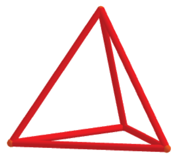
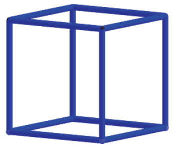
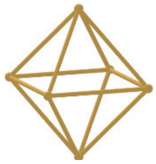
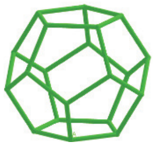
d) $(SBD) \cap (ABC)$

e) $(SBD) \cap (SAC)$

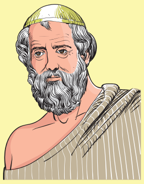


2. Mértani testek

A mértani testeket ősidők óta ismerték és tanulmányozták. Öt szabályos testnek, az ún. platóni testeknek varázserőt tulajdonítottak. Az angliai Oxfordban, az Ashmolean múzeumban, a rájuk emlékeztető, kőből faragott régészeti leleteket őriznek, melyek több, mit 1000 évvel azelőtt készültek, hogy Platón, az ókori görög filozófus felhívta rájuk a matematikusok figyelmét.

Szabályos tetraéder	*Kocka (Hexaéder)*	*Oktaéder*	*Dodekaéder*	*Ikozaéder*
				

Egy kis történelem. Platón görög filozófus (Kr. e. 427-347) két és fél évezreddel ezelőtt kidolgozott elmélete szerint a szabályos testek az őselemek szimbólumai.
A **tetraéder** *a tűz szimbóluma*, lapjai egyenlő oldalú háromszögek; a **kocka** 6 lapja négyzet, *a földet szimbolizálja*; az **oktaédert** 8 egyenlő oldalú háromszöglap határolja és *a levegő szimbóluma*; **az ikozaéder** 20 lapja egyenlő oldalú háromszög, *a víz szimbóluma*; végül **a dodekaéder**, melynek mind a12 lapja ötszög, a *kozmoszt szimbolizálja.*

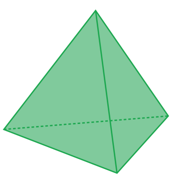


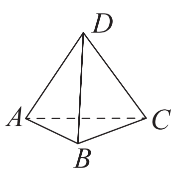
A matematikusok a mértani testeket objektív szempontok szerint tanulmányozták.
Egyes mértani testeket *síkfelületek* határolnak, ezeket POLIÉDEREKNEK vagy *szögletes testeknek* nevezzük.

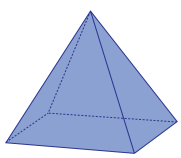
1.*a.* A gúla. Ábrázolás, jellegzetes elemek

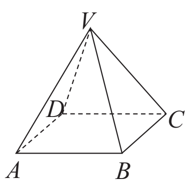
Oldjuk meg figyelmesen!

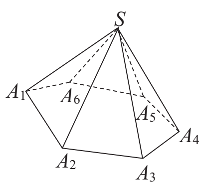
Figyeljétek az alábbi ábrákat! Vegyétek elő a mértankészletből a nekik megfelelő *mértani testeket*!











a) Figyeljétek meg a mértani testeket, és azonosítsátok a nekik megfelelő ábrával, majd a síkmértanból ismert elemeket: mértani alakzatokat, sokszöglapokat, pontokat, szakaszokat.
b) Nevezzétek meg és jellemezzétek a testeket határoló sokszöglapokat!
c) Mutassátok meg és nevezzétek meg azokat a síkmértani alakzatokat, amelyek oldalainak (éleinek) összeragasztásával megkaphatjuk a testeket!

Megoldás. **a)** Mindegyik testet a síklapok határolják. A megfelelő sokszöglapok oldalainak mérete alkalmas arra, hogy egymáshoz illesztve tökéletesen egybeessenek.
b) A két első test felületét négy-négy háromszöglap képezi. A következő két test felületét öt lap képezi: négy háromszöglap és egy négyszöglap. Az utolsó test felülete egy hatszöglapból és hat háromszöglapból áll.

c) Mindegyik ábrán található több, közös csúccsal rendelkező háromszög és még egy sokszög, amely nem feltétlenül három oldalú, ennek az oldalai egybeesnek a közös csúccsal rendelkező háromszögek oldalaival.

Következtetés. Az ábrán látható mértani testek közös tulajdonságai:

1) A felületük konvex sokszöglapokból áll, tehát poliéderek (szögletes testek).

2) A testet borító sokszöglapok közül legfeljebb egyik lehet háromnál több oldalú.

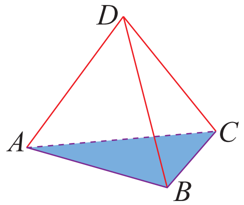
Fedezzük fel, értsük meg!

1. értelmezés. A *gúla* egy olyan mértani test, amelynek felületét egy n-oldalú konvex sokszöglap ($n \geq 3$) és n darab közös csúcsponttal rendelkező háromszöglap képezi.
Egy gúlát meghatározó elemek: az *alapnak* nevezett konvex sokszöglap és az alap síkján kívül található pont, a gúla *csúcsa*.

Megjegyzés. **1)**) GÚLÁNAK nevezzük a mértani testet, (a „teli" gúlát), és a mértani test felszínét (az „üres" gúlát) is. Az, hogy mikor melyik esetről van szó, a szövegkörnyezetből derül ki.

2) Megegyezés szerint a gúla megnevezését a csúcsnak megfelelő betűvel kezdjük, majd az alappal folytatjuk.
Az alapsokszög oldalainak száma szerint, egy gúla lehet háromoldalú, négyoldalú, ötoldalú, hatoldalú stb.
A legegyszerűbb gúla a háromoldalú, amely egyben a legegyszerűbb poliéder (sokszöglap) is.
Négy háromszöglap határolja, ezért TETRAÉDERNEK is nevezzük
Az ábrán látható tetraédert így írhatjuk le:

- Az ABC háromszöglap a tetraéder *alapja*.
- A D pont az alap síkján kívül helyezkedik el, ez a tetraéder csúcsa.
- A, B, C az alap *csúcsai*.
- AB, BC, AC az *alapélek*.
- DA, DB, DC a gúla *oldalélei*.
- A DAB, DAC, DBC háromszöglapok a gúla *oldallapjai*.



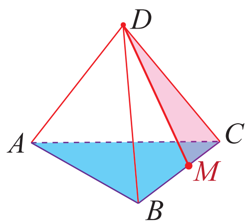
Alkalmazások

1. alkalmazás. Tekintsük az ABC háromszöglapot és a D pontot az (ABC) síkon kívül.

a) Nevezzétek meg a DM szakasz által súrolt felszínt, amikor az M pont befutja a BC szakaszt!

b) Nevezzétek meg a DM szakasz által súrolt felszínt, amikor az M pont befutja a az ABC háromszög kerületét!

c) Melyik halmazt írja le a DM szakasz, miközben az M pont végigpásztázza az ABC háromszöglapot?



Megoldás. **a)** A DM szakasz által súrolt felszín a DBC oldallap.

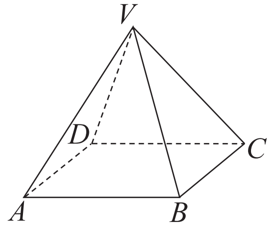
b) A DM szakasz a DBC, DAB, DAC háromszöglapokat, tehát a gúla oldalfelszínét súrolja.

c) A DM szakasz kitölti a tetraéder belső tartományát, miközben az M pont végigpásztázza az ABC alaplapot.

2. értelmezés. Szabályos gúlának nevezünk minden olyan a gúlát, amelynek az alapja szabályos sokszög, oldalélei pedig egymással kongruens szakaszok.

Megjegyzés. A mellékelt értelmezést később ugyanebben a tankönyvben, nagyobb matematikai szigorral újrafogalmazzuk.

2. alkalmazás A mellékelt ábrán a *VABCD* szabályos négyoldalú gúla látható.
a) Állapítsátok meg az értelmezés alapján az oldallapok természetet!
b) Soroljátok fel a különböző síkokban található egybevágó háromszögeket!



Megoldás. **a)** Az értelmezés szerint az oldalélek kongruensek, tehát a *VAB*, *VBC*, *VCD* és *VDA* háromszögek egyenlő szárúak. A háromszögek alapjai a gúla egy-egy alapélével esnek egybe. Tehát a négy háromszög egybevágó.
b) A fenti háromszögek alapjai kongruensek egymással, mivel a gúla alapját képező négyzet oldalaival esnek egybe. Az O.O.O. eset szerint a négy háromszög egybevágó: $VAB\Delta \equiv VBC\Delta \equiv VCD\Delta \equiv VDA\Delta$.
Következtetés. Bármely szabályos gúla oldallapjai *egymással egybevágó, egyenlő szárú háromszögek.*

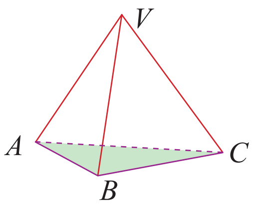
3. értelmezés. Szabályos tetraédernek nevezünk egy olyan tetraédert, amelynek mind a négy lapja egyenlő oldalú háromszög.

3. alkalmazás Tudjuk, hogy *SABC* tetraéderben *ABC* egyenlő oldalú háromszög és $SA = SB = SC$. Igaz-e az, hogy *SABC* szabályos tetraéder?

Megoldás. Az *ABC* háromszög egyenlő oldalú és $SA = SB = SC$, tehát *SABC szabályos háromoldalú gúla*. Ahhoz, hogy szabályos tetraéder legyen, arra van szükség, hogy az oldallapjai is egyenlő oldalú háromszögek legyenek. Az *SAB* háromszög akkor és csakis akkor egyenlő oldalú, ha $SA = SB = AB$, tehát ha az oldalélek kongruensek az alapélekkel.
Következtetés. Egy tetraéder akkor és csakis akkor szabályos, ha minden éle kongruens egymással.

Alkalmazások

Háromoldalú gúla (az alaplap háromszög)

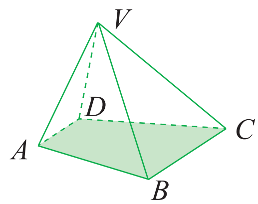


Elemek
A gúla csúcsa: *V*
Alaplap: az *ABC* háromszöglap
Az alap csúcsai: *A, B, C*
Alapélek: *AB, BC, AC*
Oldalélek: *VA, VB, VC*
Oldallapok: a *VAB, VBC, VCA* háromszöglapok

Az elemek száma

Lapok száma	$l = 1 + 3 = 4$
Élek száma összesen	$é = 3 + 3 = 6$
Csúcsok száma összesen	$cs = 3 + 1 = 4$
Megjegyzés: $l + cs = é + 2$	

Négyoldalú gúla (az alaplap négyszög)



Elemek
A gúla csúcsa: *V*
Alaplap: az *ABCD* négyszöglap
Az alap csúcsai: *A, B, C, D*
Alapélek: *AB, BC, CD, DA*
Oldalélek: *VA, VB, VC, VD*
Oldallapok: a *VAB, VBC, VCD, VDA* háromszöglapok

Az elemek száma

Lapok száma	$l = 1 + 4 = 5$
Élek száma összesen	$é = 4 + 4 = 8$
Csúcsok száma összesen	$cs = 4 +1 = 5$
Megjegyzés: $l + cs = é + 2$	

A **hatoldalú gúla** megtekinthető a digitális tankönyvben.
A négyoldalú gúla alkotó elemeit a digitális tankönyvben figyelhetitek meg.

Gyakorlatok és feladatok

1. **a)** Rajzoljatok vonalzó segítségével egy hatoldalú gúlát, és jelöljétek S-sel a gúla csúcsát!
b) Jelöljétek a gúla alapjait az általatok választott betűkkel!
c) Nevezzétek meg a gúla elemeit!

2. Másoljátok le az alábbi mondatokat, majd egészítsétek ki úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjatok!
a) Ha egy gúla 7 oldallapja van, akkor az alaplapjának … csúcsa van.
b) Ha egy gúlának 5 lapja van, akkor … gúla.
c) Ha egy gúlának 7 csúcsa van, akkor … gúla.

3. Rajzoljátok le, nevezzétek meg és írjátok le azt a gúlát, amelynek alaplapját és oldallapjait is egyforma mértani alakzatok képezik.

4. Állapítsátok meg a következő kijelentés logikai értékét: minden gúlának páros számú éle van. Indokoljátok a választ!

5. Az $EABCD$ gúla alapja az $ABCD$ téglalap, oldalélei kongruens szakaszok. Tudva azt, hogy $AE \perp EC$, bizonyítsátok be, hogy $BE \perp ED$.

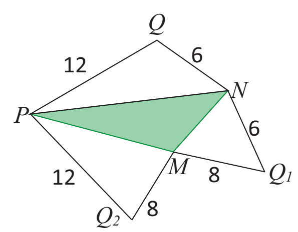
6. Rajzoljatok egy $VABCD$ négyoldalú gúlát, majd vegyétek fel a VA, VB, VC és VD él M, N, P, illetve Q felezőpontját!
a) Írjátok fel az $L = \{A, B, C, D, M, N, P, Q, V\}$ halmaz három olyan négyelemű részhalmazát, amelyek egy síkban található pontokat tartalmaznak!.
b) Írjátok fel az $L = \{A, B, C, D, M, N, P, Q, V\}$ halmaz három olyan négyelemű részhalmazát, amelyek nem egy síkban található pontokat tartalmaznak!
c) Van-e az L halmaznak két olyan ötelemű részhalmaza, amelyek elemei egy-egy gúla csúcsait képezik? Indokoljátok is a választ!

7. Adott az $ABCDA'B'C'D'$ kocka.
a) Nevezzétek meg azokat a tetraédereket, amelyek csúcsai a kockának is csúcsai, és amelyek alapja az ACD háromszög!
b) Nevezzétek meg azokat a négyszögeket, amelyek csúcsai a kockának is csúcsai!

8. Határozzátok meg egy olyan gúla oldalainak és éleinek a számát, amelynek 10 csúcsa van!

2.6. A gúla testhálója (lefejtése)

Oldjuk meg figyelmesen!



a) Rajzoljátok egy kartonlapra a mellékelt ábrát, tartsátok be pontosan a megadott méreteket! Hajtogassátok össze az MN, MP és NP szakaszok mentén úgy, hogy a kongruens szakaszok egymásra tevődjenek!
b) Figyeljétek meg a Q, Q_1 és Q_2, pont helyzetét az összehajtogatás után!
c) Az előző pontokban kapott $QMNP$ testet bontsátok szét az MQ, NQ és fektessétek le az MNP síkra!

Megoldás. **a)** Megrajzoljuk az MNP háromszöget, majd az oldalaira, a háromszögen kívül megszerkesztjük az MNQ_1, MPQ_2 és NPQ háromszögeket, betartva az ábrán látható méreteket. (Az MNP háromszög oldalait válasszátok akkorára, hogy az ábra legyen elkészíthető: sem túl nagyra, sem túl kicsire!)
b) Mivel $MQ_1 = MQ_2$, a Q_1 és Q_2 pont egymásra tevődik. Hasonlóan $NQ_1 = NQ$, tehát Q_1 és Q is egymásra tevődik. Végül $PQ = PQ_2$, így Q és Q_2 is egymásra tevődik. Végeredményben az hajtogatás után a Q, Q_1, Q_2 pontok egybeesnek.
c) A hajtogatás eredményeképpen egy háromoldalú gúlát (tetraédert) kaptunk. Most végezzük el visszafelé! Vegyük a $QMNP$ tetraédert és válasszuk alapnak az MNP háromszöglapot! Elválasztjuk az oldallapokat az MQ, NQ, illetve PQ élek mentén és kihajtjuk a három lapot az alapélek mentén, amíg mind az alap síkjába kerülnek. Így visszakapjuk az ábrán látható síkalakzatot, amit a $QMNP$ háromoldalú gúla *testhálójának (lefejtésének)* nevezünk.

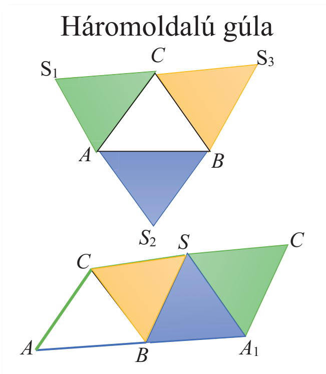
Fedezzük fel, értsük meg!

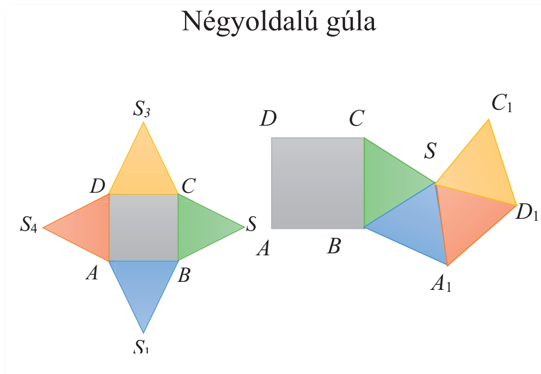
A gúla testhálója lehetőséget ad arra, hogy a síkmértani ismereteinket alkalmazzuk, például távolság meghatározására, területszámításra, szögek mértékének kiszámítására vagy bizonyos mértani elemek pontos helyének meghatározására.

Megjegyzés. A gúla testhálóját nem csak egyféleképpen lehet elkészíteni. Lényeges szempont, hogy a lefejtés eredményképen az oldallapok és az alaplap mind egy síkba kerüljön.

Egy szabályos gúla testhálója egy *n-oldalú szabályos sokszögből* és n darab *egyenlő szárú háromszögből* tevődik össze. Az egyenlő szárú háromszögek alapja kongruens az n-oldalú sokszög oldalával.

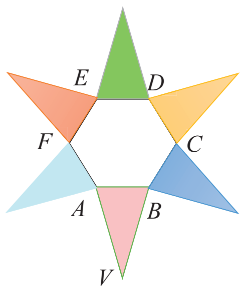
Megjegyzés.
A mellékelt ábrán a szabályos tetraéder és a szabályos négyoldalú gúla két-két testhálója látható.
Feladat. Készítsétek el kartonlapon egy-egy harmadik változatot is!
Megkönnyíti a munkát, ha kongruens, egyenlő oldalú háromszögeket használtok.

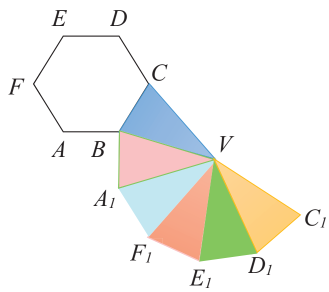




Gyakorlat. Vágjátok ki a kapott testhálókat, és megfelelően hajtogatva készítsétek el a hozzájuk tartozó gúlákat!

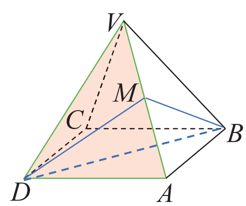
1. alkalmazás. Készítsétek el kétféleképpen a *VABCDEF* szabályos hatoldalú gúla testhálóját!





Megoldás. A gúla alapja egy szabályos hatszög, oldallapjai pedig egybevágó, egyenlő szárú háromszögek. Mindegyik oldallap alapéle kongruens az alaplap oldalaival.

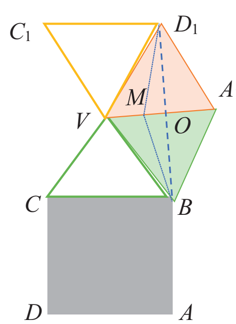
2. alkalmazás. A *VABCD* gúla oldallapjai egyenlő oldalú háromszögek, ezek oldalainak mértéke a. Határozzátok meg az $M \in VA$ pont helyzetét úgy, hogy az MBD háromszög kerülete minimális legyen!



Megoldás. Ha $M \in VA$, akkor az MBD háromszög kerülete: $K_{MBD} = BD + MB + MD$.

Mivel BD az alap átlója, ennek hossza állandó: $BD = a\sqrt{2}$. Következik, hogy az $MB + MD$ összegnek kell minimálisnak lennie.

Ezt az összeget úgy vizsgáljuk, hogy kiterítjük egy síkba (lefejtjük) a gúla testhálóját: a VA él maradjon a VAB és VAD oldallapokból származó háromszögek közös oldala. A mellékelt hálózat megfelel a célnak: VBA_1D_1 rombusz, és O-val jelöltük a VA_1 szakasz felezőpontját. Bármely $M \in VA_1$ pont esetén $MB + MD = MB + MD_1 \geq OB + OD_1 = BD_1 = a\sqrt{3}$. Ebből következik, hogy az MBD háromszög területe akkor és csakis akkor minimális, ha M egybeesik a VA oldalél O felezőpontjával.



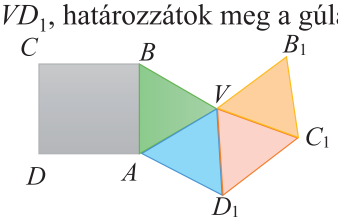
Gyakorlatok és feladatok

1. **a)** Rajzoljatok kartonlapra egy tetszőleges ABC háromszöget! Mértani felszerelés segítségével jelöljétek a BC, AC és AB oldal felezőpontját M, N, illetve P-vel, majd húzzátok meg a háromszög középvonalait!

b) Vágjátok ki a háromszöget, és bizonyítsátok be, hogy hajtogatással egy tetraéder képezhető belőle!

c) Ha ABC egyenlő oldalú háromszög, melynek kerülete 36 cm, igazoljátok, hogy a középvonalak mentén elvégzett hajtogatással szabályos tetraéder képezhető, majd határozzátok meg a tetraéder élhosszát!

2. Az alábbi ábrán a $VABCD$ szabályos gúla testhálója látható. Ha $AC = 4\sqrt{2}$ cm és $AB \parallel VD_1$, határozzátok meg a gúla oldalélét!



Megjegyzés. D_1 jelöli a D csúcs helyzetét, miután a VAD lapot kiterítjük az $ABCD$ alap síkjába.

3. Rajzoljatok egy egyenlő oldalú háromszöget és három egyenlő szárú, derékszögű háromszöget, amelyek átfogói egybeesnek az első háromszög oldalaival, a derékszögű csúcsai pedig a az egyenlő oldalú háromszögön kívül helyezkednek el.

a) Mutassátok ki, hogy a kapott ábra egy szabályos háromoldalú gúla testhálója!

b) Számítsátok ki a gúla alapélét és oldalélét, ha tudjátok, hogy a teljes testháló területe $8 \cdot (3 + \sqrt{3})$ cm².

4. Az $ABCD$ tetraéder lapjain az A, B, C és D csúcsnál keletkező szögek mértéke A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3 és D_1, D_2, D_3. Tudjuk, hogy $A_1 + A_2 + A_3 = B_1 + B_2 + B_3 = C_1 + C_2 + C_3 = D_1 + D_2 + D_3 = 180°$. Bizonyítsátok be, hogy a tetraéder bármely két szemben fekvő éle kongruens egymással!

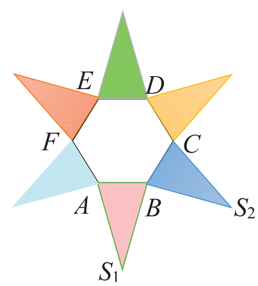
5. Az $SABCD$ négyoldalú szabályos gúla oldallapjai egyenlő oldalú háromszögek.

a) Az oldallapok alapél szerinti forgatásával, szerkesszétek (rajzoljátok) meg a gúla alapsíkra fejtett testhálóját.

b) Számítsátok ki az SA és SC egyenesek által bezárt szöget az (SAC) síkban a kiterítés előtt!

c) Számítsátok ki az S_1A és S_2C egyenesek által bezárt szöget az (ABC) síkban a kiterítés után! (S_1 és S_2 jelöli az S pont két helyzetét a kiterítés után.)

6. Az alábbi ábra az $SABCDEF$ szabályos hatoldalú gúla testhálója. Tudjuk, hogy $S_1B \perp S_2B$. Határozzátok meg:



a) a gúla valamely oldallapján a szögek mértékét;

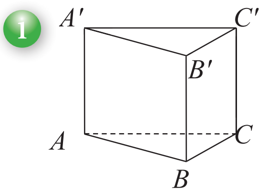
b) az S_1A és S_2C egyenesek által bezárt szög mértékét!

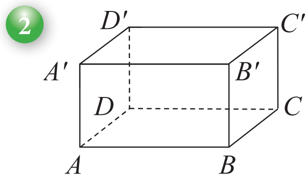
3.6. Az egyenes hasáb. Ábrázolás, jellegzetes elemek, lefejtés (testháló)

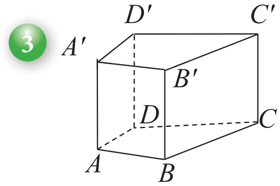
Mikor láttál először kockát? Melyik mértani testtel azonosítható a Lego-darab, amit kezedben tartasz? Egyszerű kérdések, de nem biztos, hogy könnyű rájuk válaszolni. A kocka egyike az első tárgyaknak, amivel egy kisgyerek kapcsolatba kerül. Látszólag egyszerű, alakja szabályos, könnyen kezelhető, építőelemként számtalan kreatív elrendezésre kínál lehetőséget.

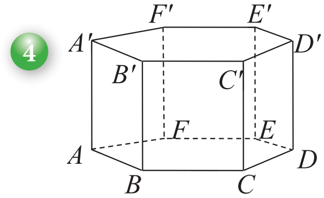
Oldjuk meg figyelmesen!

PT Figyeljétek meg a következő ábrákat!









Válasszátok ki a mértankészletből a megfelelő mértani testeket!

Figyeljétek meg, azonosítsátok és nevezzétek meg a testeket határoló lapoknak megfelelő mértani idomokat!

Megoldás. Minden test tartalmaz két kongruens sokszöglapot, ezeket *alapnak* nevezzük. Az alapokat körülzáró szakaszokat *alapélnek* nevezzük.

Az alapokon kívül minden testet *oldallapok* is határolnak. Az oldallapok paralelogrammák, melyek sajátos esetben lehetnek téglalapok vagy négyzetek. Az oldallapok azon oldalait, amelyek a két alapot kötik össze, *oldalélnek* nevezzük. Az oldalélek száma megegyezik az alaplapok csúcsainak számával.

Következtetés. Az ábrán látható mértani testek közös tulajdonságai:

1) Van két alapjuk, amelyek n-oldalú sokszöglapok, $n \geq 3$. A két alap *egybevágó* (*kongruens*) egymással.

2) Van n oldallapjuk, ezek paralelogrammák.

Fedezzük fel, értsük meg!

Eddigi ismereteink alapján kijelenthetjük:

A hasáb egy olyan poliéder, amelyet két egybevágó n-oldalú ($n \geq 3$) sokszöglap, az *alapok* és n paralelogramma, az *oldallapok* határolnak.

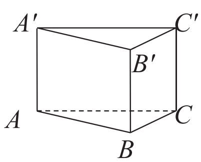
Egy hasáb alkotó elemei: az *alapok*, az *alapélek*, az *oldallapok*, az *oldalélek*, a *csúcsok*, továbbá a hasáb átló*i*, ha az oldalélek száma nagyobb, mint 3.

A hasáb átló*ja* (*testátlója*) egyik alap valamely csúcsát köti össze a másik alap egy olyan csúcsával, amellyel nem található ugyanazon az oldallapon.

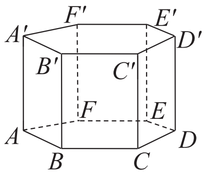
Akárcsak a gúla, az alapsokszög oldalainak száma szerint a hasáb is lehet háromoldalú, négyoldalú, ötoldalú, hatoldalú stb.

A fentebb vizsgált testek elemei:

Háromoldalú hasáb

Alapok	Alapélek	Oldallapok	Oldalélek	Élek és csúcsok száma
 Az ABC *és* $A'B'C'$ háromszöglapok $ABC\Delta \equiv A'B'C'\Delta$	AB, BC, AC, illetve $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$. Az alapélek száma: $3 \cdot 2 = 6$	Az $ABB'A'$, $BCC'B'$ *és* $ACC'A'$ paralel-ogrammák. Az oldallapok száma: 3.	AA', BB', CC' Párhuzamos és kongruens szakaszok. Az oldalélek száma: 3.	Az élek száma: $3 \cdot 2 + 3 = 9$. A csúcsok száma: $3 \cdot 2 = 6$.

Hatoldalú hasáb

Alapok	Alapélek	Oldallapok	Oldalélek	Élek és csúcsok száma
 Az *ABCDEF* és *A′B′C′D′E′F′* hatszöglapok.	*AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FA*, illetve *A′B′*, *B′C′*, *C′D′*, *D′E′*, *E′F′*, *F′A′*. Az alapélek száma: $6 \cdot 2 = 12$	Az *ABB′A′*, *BCC′B′*, *CDD′C′*, *DEE′D′*, *EFF′E′*, *FAA′F′* paralelogrammák. Az oldallapok száma: 6.	*AA′*, *BB′*, *CC′*, *DD′*, *EE′*, *FF′*. Párhuzamos és kongruens szakaszok. Az oldalélek száma: 6.	Az élek száma: $6 \cdot 2 + 6 = 18$. A csúcsok száma: $6 \cdot 2 = 12$

Megjegyzés. A hatoldalú gúl*ának* 18 testátlója van: *AC′*, *A′C*, *AD′*, *A′D*, *AE′*, *A′E*, *BD′*, *B′D*, *BE′*, *B′E*, *BF′*, *B′F*, *CE′*, *C′E*, *CF′*, *C′F*, *DF′*, *D′F*.

Megjegyzés. Egyszerűség kedvéért, amikor a hasáb alapjára vagy valamely oldallapjára hivatkozunk, csak a megfelelő sokszöget fogjuk mondani vagy írni
Egy olyan hasábot, amelyeknek *mindegyik oldallapja téglalap*, **egyenes hasábnak** nevezünk.
Következésképpen beszélünk háromoldalú egyenes hasábról, négyoldalú egyenes hasábról, ötoldalú egyenes hasábról, hatoldalú egyenes hasábról stb.

Értelmezés. Egy egyenes hasábot, melynek az alapja egy szabályos sokszöglap, *szabályos hasábnak* nevezünk.

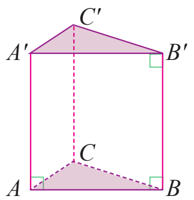
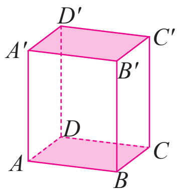
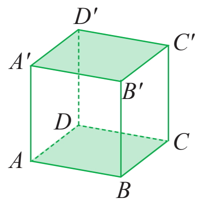
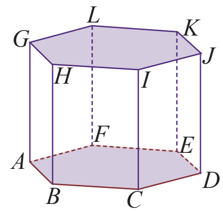
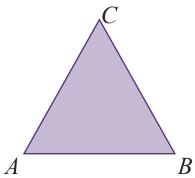
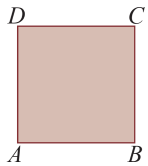
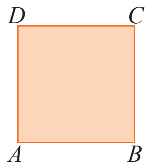
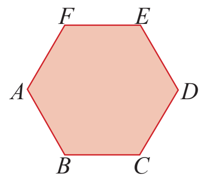
Megjegyzés. Mivel egy térbeli szabályos sokszöglap a kétdimenziós síkban csak torzítva ábrázolható, egy egyenes hasáb és egy szabályos hasáb kétdimenziós képe pusztán az ábra alapján nem mindig különböztethető meg. Ezért a feladatokat fokozott figyelemmel kell elolvasni, hogy ne tévesszük össze a két hasábtípust.

Alkalmazások

Az egyenes hasábok közül a gyakorlatban az egyenes paralelepipedon, a téglatest és a kocka a legelterjedtebb. Vizsgáljuk őket közelebbről!
A mértani ábrázolásuk hasonló, ezért nem mindig olvasható ki belőlük elegendő információ egy-egy konkrét feladat megoldásához. Az adatok egy részét a feladatok figyelmes elolvasása során ismerhetjük meg.

Egyenes paralelepipedon	**Téglatest** (derékszögű paralelepipedon)	**Kocka**
1. Alapja paralelogramma 2. Oldallapjai téglalapok	1. Alapja téglalap 2. Oldallapjai téglalapok	Minden lapja négyzet.
Négyoldalú egyenes hasáb, melynek alapja paralelogramma.	a) Négyoldalú egyenes hasáb, melynek alapja téglalap. b) Egyenes paralelepipedon, melynek alapja téglalap. c) Olyan hasáb, melynek minden oldala téglalap.	a) Szabályos négyoldalú hasáb, melynek oldallapjai négyzetek. b) Téglatest, melynek minden éle egyforma. c) Olyan hasáb, melynek minden lapja négyzet. d) Szabályos négyoldalú hasáb, melynek minden éle egyforma.

A fenti táblázat tartalmazza az egyenes paralelepipedon, a téglatest és a kocka különböző, egymással egyenértékű értelmezéseit.
Az egyenes hasábok között különleges osztályt képeznek a szabályos hasábok.

A hasáb típusa	Szabályos háromoldalú hasáb	Szabályos négyoldalú hasáb	A kocka – a négyoldalú szabályos hasáb, melynek oldallapjai négyzetek	Szabályos hatoldalú hasáb
Ábrázolás				
A hasáb alapja				

Megjegyzés. Ha az *oldalélek* az ábrán *függőleges helyzetűek*, és nincs egyéb feltétel megadva, úgy tekintjük, hogy *egyenes hasábról* van szó.

Alkalmazás. Tekintsük az $A_1A_2\ldots A_n$, n-oldalú konvex sokszöglapot és legyen M egy pont a sokszöglapon (a sokszöglap egyik oldalán vagy belsejében). Tekintsük továbbá az A_1P_1 rögzített szakaszt, P_1 a sokszöglap síkján kívül helyezkedik el. Mindazon MN szakaszok egyesítése, amelyek párhuzamosak és kongruensek az A_1P_1 szakasszal, miközben M bejárja a teljes sokszöglapot, egy *hasábot* alkot. A hasáb alapja az az $A_1A_2\ldots A_n$ sokszög, egyik oldaléle A_1P_1. Készítsétek el egy társatokkal együtt az így generált háromoldalú és négyoldalú gúla ábráját! *(Megtekinthető a digitális tankönyvben!)*

Feladatok a portfólióba

Az előző alkalmazás alapján adjátok meg:

1. az MN szakasz pontjai által meghatározott halmazt, miközben M befutja az ABC háromszög BC oldalát;
2. az MN szakasz pontjai által meghatározott halmazt, miközben M körbefutja az ABC háromszög oldalait;
3. az M pont által megtett *útvonalat*, miközben az MN szakasz *végigsúrolja* az $ABCD\,A'B'C'D'$ négyoldalú hasáb oldalfelszínét!

Gyakorlatok és feladatok

1. **a)** Ismerjetek fel a környezetetekben három és négyoldalú egyenes hasáb alakú testeket!
b) Készítsetek ábrát a megfelelő hasábokról!
c) Jelöljétek a hasábokat és soroljátok fel az elemeit!

2. Egy hasáb alapja egy 64 cm kerületű négyszög, és egyik oldalélének hossza 9 cm. Határozzátok meg a hasáb éleinek összhosszát!

3. Az $ABCA'B'C'$ háromoldalú hasábban M és M' a BC, ill. $B'C'$ szakasz felezőpontja..
a) Készítsetek a feltételeknek megfelelő ábrát!
b) Állapítsátok meg az alábbi kijelentések logikai értékét!
p_1: B', A, B és C egy síkra illeszkedő pontok.
p_2: Az $ABB'A'$ paralelogramma és a C pont meghatároz egy négyoldalú gúlát.
p_3: Az $ABMA'B'M'$ és $ACMA'C'M'$ hasábok egyesített halmaza az $ABCA'B'C'$ hasáb.

4. Az $ABCDA'B'C'D'$ négyoldalú hasábban M és M' az $ABCD$, illetve $A'B'C'D'$ hasáb átlóinak metszéspontja.

a) Készítsetek a feltételeknek megfelelő ábrát!

b) Nevezzetek meg egy-egy háromoldalú gúlát, melynek alapja ABD, ACD, ABC, illetve BCD!

c) Nevezzétek meg az MAB alapú és MM' oldalélű hasáb elemeit!

d) Ismerjetek fel 4 tetraédert, amelyek minden csúcsa egybeesik az adott hasáb valamely csúcsával!

5. Egy hatoldalú hasáb oldallapjai kongruensek egymással, és mindegyikük kerülete 30 cm. Az alaplap kerülete egyenlő egy oldallap kerületével. Határozzátok meg:

a) egy oldalél hosszát;

b) a hasáb éleinek összhosszát!

6. Adott az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest. Egészítsétek ki az alábbi mondatokat úgy, hogy igaz kijelentések legyenek!

a) A téglatest D csúcsát tartalmazó élei: … .

b) A téglatest D csúcsát tartalmazó lapjai: … .

c) A téglatest AD élét tartalmazó lapjai: … .

7. Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatestben $AB = 7$ cm, $B'C' = 8$ cm, $DD' = 9$ cm.

a) Készítsetek a feltételeknek megfelelő ábrát!

b) Számítsátok ki a téglatest éleinek összhosszát!

8. Két egyforma kockát úgy illesszünk össze, hogy eredményül egy téglatestet kapjunk! A kockák élhossza 5 cm.

a) Készítsetek a feltételeknek megfelelő ábrát!

b) Határozzátok meg a kapott téglatest legnagyobb lapjának területét!

c) Számítsátok ki a téglatest éleinek összhosszát!

4.6. Az egyenes hasáb testhálója (lefejtése)

Emlékeztető

Ha egy hasáb minden oldallapja téglalap, akkor azt egyenes hasábnak nevezzük.
Ha egy egyenes hasáb alapja szabályos sokszög, akkor azt szabályos hasábnak nevezzük.

Fedezzük fel, értsük meg!

Célunk az, hogy a hasábot lefejtsük (kiterítsük) a síkba, ezáltal megkapjuk a testhálóját.
Egy hasáb testhálója egy olyan síkmértani alakzat (konfiguráció), amely tartalmazza egymáshoz illesztve a hasáb összes oldallapját (ezek téglalapok) és a két alapját (ezek sokszöglapok).
Egy hasábot úgy fejthetünk le, hogy elvágjuk néhány éle mentén, oly módon, hogy az oldallapok és az alaplapok „kiteríthetők” legyenek egy síkba.
A hasábban minden él két laphoz tartozik. A lefejtés során egy éllel két dolog történhet:

1. *Másolatban* is megjelenik, amennyiben a hasábot az adott él mentén vágjuk el, és ezáltal a lapok, amelyekhez az él tartozik különválnak;

2. Egyben marad, ha a két lapot, amelyekhez az adott él tartozik, hajtogatással terítjük ki egy síkba.

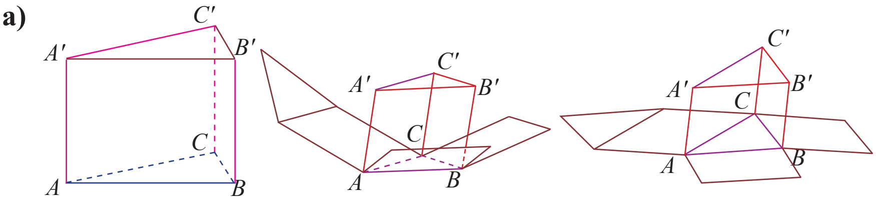
Figyeljük meg, hogy a hasáb többféleképpen is lefejthető (kiteríthető) a síkba, tehát többféle testhálója is elkészíthető ugyanannak a hasábnak. Egy adott problémához a legalkalmasabb változatot kell megkeresni, ez nem mindig könnyű feladat!

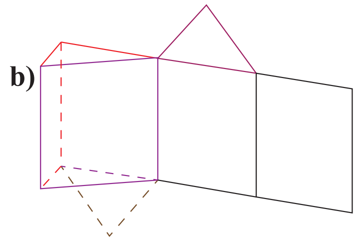
1. alkalmazás. Tekintsük az $ABCA'B'C'$ háromoldalú egyenes hasábot.

a) Le akarjuk fejteni a hasábot az ABC alap síkjába. Elvágjuk az $A'B'C'$ alap $A'B'$ és $B'C'$ éleinek mentén, majd az oldalélek mentén. Ezután kiterítjük a lapokat az épen maradt élek mentén az (ABC) alap síkjába a következő sorrendben: előbb az $ABB'A'$ lapot kihajtjuk AB él mentén, azután a $BCC'B'$ lapot a BC él mentén, az $A'B'C'$ alaplapot az $A'C'$ mentén, végül az $ACC'A'$ lapot az AC mentén.

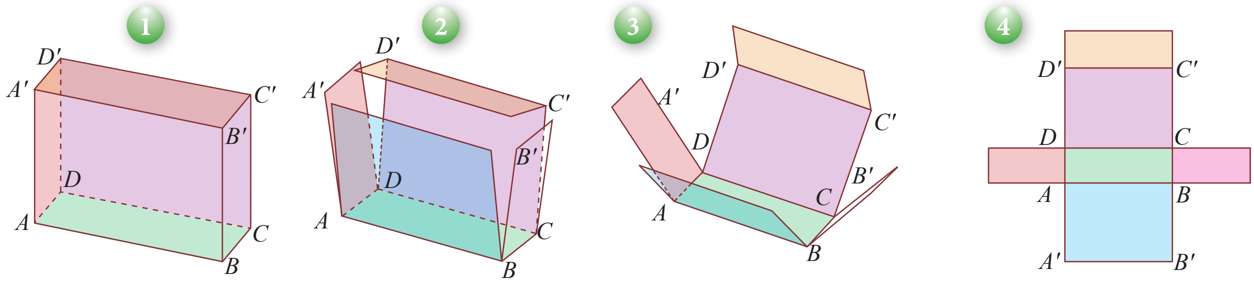
b) Készítsétek el a testhálót úgy, hogy a hasábot valamelyik oldallap síkjába terítsétek ki!

Megoldás.





2. alkalmazás. Terítsétek ki az *ABCDA’B’C’D’* téglatestet az *ABCD* téglalap síkjába!



Következtetések

1. A téglatest testhálója 6 téglalpból tevődik össze. A téglalapok páronként kongruensek. Tehát összesen 3 ilyen pár van, a téglatest szemközti lapjai kerülnek egy-egy párba.

2. A kiterítési módszer szerint, a testhálón a 6 téglalap különböző konfigurációkban jelnhet meg, de a téglalapok mérete nem változik.

3. A kocka testhálója ugyanúgy készíthető el, mint bármely téglatesté, a különbség csupán annyi, hogy a lapoknak megfelelő téglalapok mind egymással kongruens négyzetek lesznek.

Feladatok a portfólióba

a) Készítsétek el egy szabályos négyoldalú hasáb testhálóját!
b) Készítsétek el háromféleképpen egy kocka testhálóját!

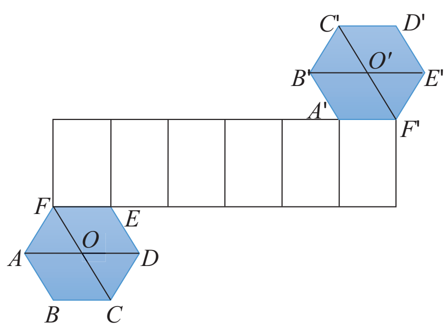
Alkalmazások

3. alkalmazás. A mellékelt konfiguráció 2 szabályos hatszöget és 6 téglalapot tartalmaz. A hatszögek oldalmérete *a*, a téglalapok méretei *a* és *b*.

a) Indokoljátok meg miért igaz, hogy az ábra egy hasáb testhálója!

b) Nevezzétek meg a hasábot, amelynek a testhálóját ábrázoltuk, és határozzátok meg a típusát!

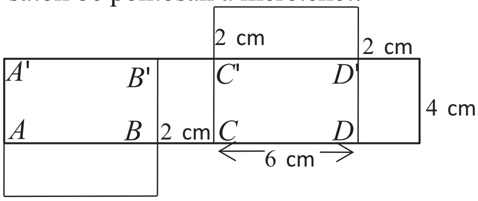
c) Készítsétek el ugyanennek a hasábnak még egy ettől különböző testhálóját!



Útmutatás. **a)** Az *ABCDEF* és *A’B’C’D’E’F’* szabályos hatszögek kongruensek, tehát lehetnek egy szabályos hatoldalú hasáb alapjai. A hat téglalap egy-egy mérete azonos a hatszögek oldalának hosszával, a másik mérete pedig ugyanaz mindegyik téglalapban. Tehát a téglalapok lehetnek egy hasáb oldallapjai.
Megfigyelhető, hogy a 8 felületdarab (6 téglalap + 2 hatszög) helyzete olyan, hogy ha felgöngyölítjük a téglalapok mentén, létrejön a szabályos hatoldalú hasáb, melynek alapéle *a* és oldaléle *b*.

Gyakorlatok és feladatok

1. Rajzoljátok le kartonlapra a mellékelt ábrát, tartsátok be pontosan a méreteket!



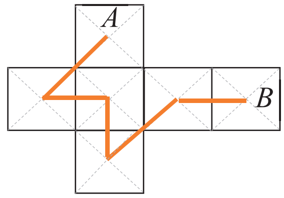
a) Vágjátok ki, majd hajtogassátok össze úgy, hogy eredményül egy $ABCD$ alapú hasábot kapjatok!
b) Nevezzétek meg a kapott hasábot!
c) Azonosítsátok és írjátok le a hasáb elemeit!
d) Ismételjétek meg az a), b) és c) alpontot úgy, hogy a hasáb alapja $ABB'A'$, majd $ADD'A'$ legyen!

2. Rajzoljátok le kartonlapra egy olyan kocka testhálóját melynek élhossza 0,8 dm. Vágjátok ki és hajtogassátok össze úgy, hogy eredményül a kockát kapjátok! Jelöljetek a kocka csúcsait és azonosítsátok az éleket, lapokat és átlókat!

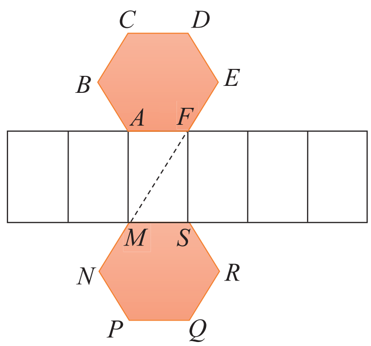
3. Egy kocka oldalfelszínét kiterítettük a síkba és az $MNPQ$, $MN > NP$ téglalap lett az eredmény. Jelöljük R-rel az NP oldal felezőpontját!

Ha $MR = 12\sqrt{7}$ cm, mekkora a kocka éle!

4. A mellékelt ábrán egy kocka testhálója látható. A kocka éle 6 cm. Számítsátok ki az AB útvonal hosszát!

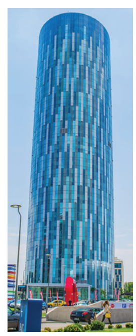


5. A mellékelt ábrán az $ABCDEFMNPQRS$ hatoldalú hasáb testhálója látható. Tudjuk, hogy az E, F és M pontok kollineárisak és $EM = 27$ cm.
a) Bizonyítsátok be, hogy az N pont az EM egyenesen fekszik!
b) Számítsátok ki a hasáb alapélének és oldalélének a hosszát!



5.ℓ. Az egyenes körhenger: ábrázolás, jellegzetes elemek, testháló (lefejtés)

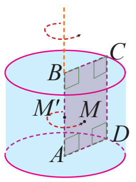


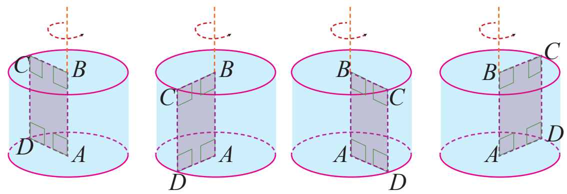

Az ember ősidők óta a természettel harmóniában élt. Megfigyelte a jelenségeket, megértette őket, és olyan eszközöket készített, amelyek megkönnyítették a munkát, megszépítették az életet, lehetővé tették a világ jobb megismerését.
A tér kihasználása, a sebesség növelése, jobb egyensúly, hőellenálló-képesség növelése és más gyakorlati célból gyakran gömbölyű a minket körülvevő, a természet vagy az ember által létrehozott tárgyak és dolgok felszíne. A fenti képek is gömbölyű tárgyakat, dolgokat, épületeket ábrázolnak.
Minden esetben azonosítható a kép valamely síkjában legalább egy kör, vagyis egy olyan síkhalmaz, amelynek minden pontja egy rögzített ponttól, a középponttól egyenlő távolságra található.

Fedezzük fel, értsük meg!

Néhány olyan test matematikai modelljét írjuk le, amelyeket kerek felületek határolnak, és amelyeket összekapcsolva további testek alkothatók.
Vegyünk egy téglalapot, és forgassuk meg egyik oldala körül, amíg visszaér az eredeti helyzetébe!
Azonosítsuk a mértani készletben azt a testet, amelyet ily módon generálhatunk!



Legyen $ABCD$ a téglalap, amelyet az AB oldal körül forgatunk meg. (Az AB oldalt *forgástengelynek* nevezzük.) A D pont leír egy A középpontú, AD sugaú kört, a C pont pedig egy B középpontú, BC sugarú kört. Hasonlóan, az $ABCD$ téglalapon vagy annak belsejében található minden M pont leír egy kört, melynek középpontja az AB szakasz egy M' pontja, sugara pedig MM'.
Az így kapott testet *egyenes körhengernek* nevezzük. Az A középpontú, AD sugarú körlapot, illetve a B középpontú, BC sugarú körlapot a henger *alapjainak* nevezzük.
A CD szakaszt henger *alkotójának* nevezzük. Szintén *alkotó* minden olyan PQ szakasz, amelyre teljesül, hogy $P \in \mathcal{C}(A, AD)$ és $Q \in \mathcal{C}(B, BC)$ és $PQ \parallel AB$.

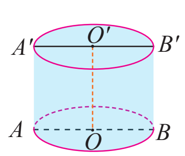


Azt mondjuk, hogy az egyenes körhenger egy *forgástest*. Éppen ezért *forgáshengernek* is nevezzük. Az egyenes körhenger *forgástengelye* az alapok középpontjai által meghatározott egyenes.

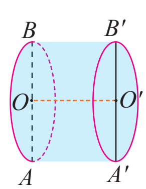
Értelmezés. Egy téglalap valamely oldala körül történő teljes megforgatása által kapott mértani testet *egyenes körhengernek* vagy *forgáshengernek* nevezzük.

Magyarázat. A henger nevében a *körhenger* onnan származik, hogy a henger alapjai körlapok, az *egyenes* pedig minden alkotója derékszöget zár be az alapkörök hozzá tartozó sugaraival.
Az egyenes körhenger jellegzetes elemei: két *alap*, (párhuzamos síkokban található egybevágó körlapok), az *alapkörök középpontja* és *sugara* és az *alkotók*.
Megjegyzések.
1. Ha hengerről beszélünk, gyakran csak a henger felszínére gondolunk: az alaplapokra és az oldalfelszínre. Ilyenkor eltekintünk a henger belső pontjaitól.
2. A henger ábrázolásakor az alapok középpontjait rendszerint O-val és O'-tel jelöljük, továbbá két alkotóját AA'-tel és BB'-tel. Ilyenkor az A és B pont az alapkör két átmérősen ellentett pontja.
A henger forgástengelye nem kötelezően függőleges helyzetű. Lehet vízszintes vagy ferde is, a henger tulajdonságait ez nem befolyásolja.

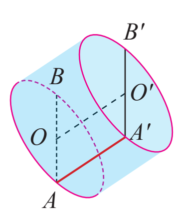
Függőleges forgástengely



Vízszintes forgástengely



Ferde forgástengely

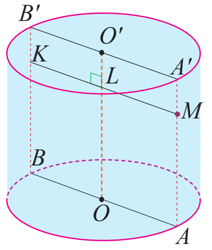


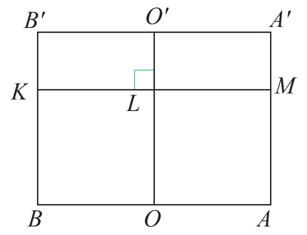
A mellékelt ábrákon:
– az O középpontú, AO sugarú körlap, illetve az O' középpontú, $A'O'$ sugarú körlap a két alap;
– az OA és OB szakasz az egyik alap, az $A'O'$és $O'B'$ pedig a másik alap két-két sugara;
– az AA' és BB' szakasz a henger két alkotója, ezeket rendszerint G-vel jelöljük.

Alkalmazások

1. alkalmazás. Bizonyítsuk be, hogy ha M tetszőleges pont a henger oldalfelszínén, akkor a szimmetrikusa az OO'-re nézve szintén a henger oldalfelszínén található!
(A henger forgástengelye egyben az oldalfelszín *szimmetriatengelye* is.)

Bizonyítás. Az OO' egyenes az R sugarú henger forgástengelye. Legyen M az oldalfelszín egy pontja és AA' az alkotó, amelyen M található. Meghúzzuk a két alap AB és $A'B'$ átmérőjét és az $ABB'A'$ téglalapot kapjuk, amely az $OBB'O'$ és $OAA'O'$ kongruens téglalapra bontható.





Az (ABM) síkban szerkesztéseket végzünk: $ML \perp OO'$, $L \in OO'$, továbbá K az ML és BB' egyenesek metszéspontja. Az $OBKL$ és $OAML$ téglalapok kongruensek és $KL = OB = OA = ML$, tehát K egyidejűleg az M pont szimmetrikusa az OO'egyenesre nézve, és a BB' alkotó egy pontja. Következésképpen a K pont a henger oldalfelszínén található.

Megjegyzés. A fenti bizonyítás során megfelelően választott síkban a síkmértanra jellemző gondolatmenetet követtük: segédszerkesztést, síkalakzatok tulajdonságait. Eltekintettünk a henger azon elemeitől, amelyek nem találhatók az általunk kiválasztott síkban. A síkmértani ábrán a rajzolás és a gondolatmenet követése is könnyebben ment.
Ezzel a módszerrel a térmértani feladat átalakítható egy vagy több, egyszerűbb és könnyebben kezelhető, tehát kellemesebb síkmértani feladatra.

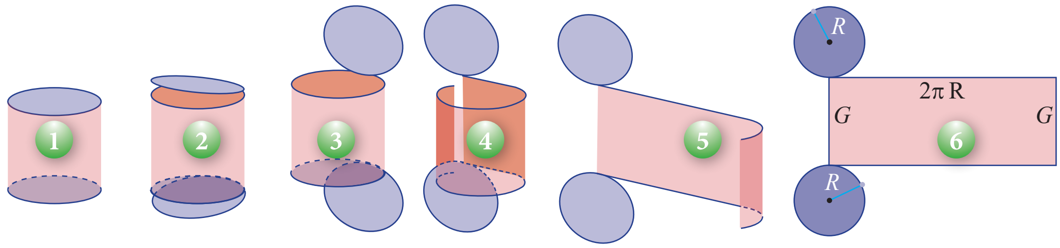
Feladat a portfólióba

Igazoljátok, hogy az **1. alkalmazás** kijelentése érvényes akkor is, ha az M pont valamelyik alaplapon vagy a henger belső tartományában található, tehát: *az egyenes körhenger forgástengelye egyben a henger szimmetriatengelye is.*

2. alkalmazás: gondolatkísérlet. Egy egyenes körhenger sugara R, alkotója G. Mártsátok a hengert festékbe, majd fektessétek egy vízszintesen elhelyezett kartonlapra oly módon, hogy egyik alkotója a kartonlap síkjában legyen. Görgessétek végig a lapon, amíg ugyanaz az alkotója kerül újból a kartonlap síkjába. Ezután állítsátok fel a hengert az egyik alapjára, majd fektessétek vissza és állítsátok a másik alapjára. Írjátok le, hogy milyen alakzatot festettetek ezzel az eljárással a kartonlapra?

Megoldás. A gördülő henger téglalap alakú felületet fest a kartonlapra. A téglalap méretei: egyik oldala egyenlő a henger alkotójával, a másik pedig a henger alapkörének kerületével. A két alaplap két körlapot fest, ezek érintik a télalap egy-egy oldalát.
Az így kapott alakzat nem más, mint a henger egy lefejtése a síkba (testhálója). Egy téglalapból és a téglalapot érintő két egyenlő sugarú körlapból áll. A téglalap egyik mérete a henger alkotójával, a másik pedig az alapkör kerületével egyenlő.

A mellékelt ábrasor a henger lefejtésének lépéseit illusztrálja.



MINITESZT *Válasszátok ki az egyetlen helyes felelet betűjelét!*

1. Egy henger oldalfelszínének a lefejtése egy téglalap, melynek méretei G, illetve 12,6 cm. Az alapkör sugarának legpontosabb közelítő értéke az alábbiak közül:			
A. 1,5 cm	B. 2 cm	C. 2,5 cm	D. 3 cm
2. Egy henger sugara 3 dm. Ha az alkotó és az alapkör átmérőjének aránya 5/2, akkor az alkotó hossza:			
A. 7,5 dm	B. 75 cm	C. 15 dm	D. 15 cm
3. Az $ABCD$ négyzet csúcsai egy henger alapkörén helyezkednek el, és a négyzet területe 8 dm^2. Az alapkör sugara:			
A. 4 dm	B. 2 cm	C. 2 dm	D. 4 cm

Gyakorlatok és feladatok

1. Az $ABCD$ téglalapot teljesen megforgatjuk az AB oldal körül. Rajzoljátok le a füzetbe a téglalap által leírt forgástestet!

2. Egy síkba lefejtett egyenes körhenger oldalfelszíne egy négyzet. Számítsátok ki a henger sugarának és alkotójának arányát!

3. Egy téglalapot megforgatunk a hosszabb, majd a rövidebb oldala körül.

a) Rajzoljátok le az így kapott hengereket!

b) Ábrázoljátok a síkban a két henger testhálóját!

c) Jelöljük a-val és b-vel a téglalap méreteit, A_1-gyel és A_2-vel a hozzájuk tartozó testhálók területét.

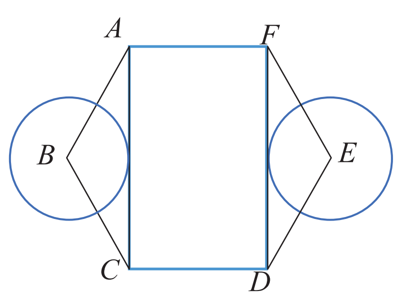
Határozzátok meg az $\frac{A_1}{A_2}$ arányt, ha $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

4. Az $ABCD$ téglalap egy 24 cm-es alkotójú egyenes körhenger oldalfelszínének a lefejtése a síkba. Tudva azt, hogy az AB szakasz felezőpontja P és $CP = 40$ cm, határozzátok meg a henger sugarát!

5. **a)** O, illetve O' az $ABCD$ téglalap AB, illetve CD oldalának a felezőpontja. Megforgatjuk a téglalapot az OO' egyenes körül. Készítsetek ábrát az így kapott testről, majd nevezzétek meg a test elemeit!

b) M és N az $ABCD$ négyzet AB, illetve CD oldalának a felezőpontja. Megforgatjuk a négyzetet az MN egyenes körül. Készítsetek ábrát az így kapott testről, majd nevezzétek meg a test elemeit!

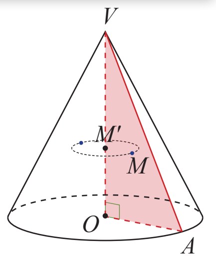
6. Az ábrán egy egyenes körhenger testhálója látható. $ABCDEF$ egy szabályos hatszög, kerülete $36\sqrt{3}$ cm. Számítsátok ki a henger sugarát és alkotóját!



6.*l*. Az egyenes körkúp. Ábrázolás, jellegzetes elemek, testháló (lefejtés)

Oldjuk meg figyelmesen!

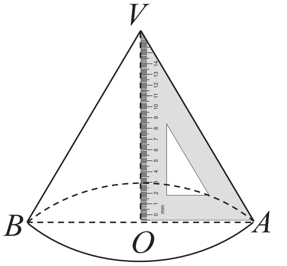
1. A VOA derékszögű háromszöget ($VOA\sphericalangle = 90°$) megforgatjuk a VO befogó tartóegyenese körül. Az ily módon generált testtel azonosítsátok a mértani készletben a neki megfelelőt!



Legyen VOA a háromszöglap, amit elforgatunk a VO forgástengely körül.
Az A pont az O középpontú, OA sugarú kört írja le. A VOA háromszöglap minden M pontja kört ír le, a kör M' *középpontja a* VO szakaszon található és sugara $MM' \perp VO$.
A VO szakasz minden pontja egy helyben marad.
Az így kapott mértani testet *egyenes körkúpnak* nevezzük.
Az O középpontú, OA sugarú körlap a kúp *alapja,* a V pont pedig a kúp *csúcsa*.
A VA szakaszt a kúp *alkotójának* nevezzük. Szintén alkotó minden olyan VP szakasz, amelynek P végpontja az alapkörön található: $P \in \mathcal{C}(O, OA)$.
Az egyenes körkúp egy *forgástest*, a *forgástengely* a kúp csúcsát az alapkör középpontjával összekötő egyenes.

Értelmezés. Egy derékszögű háromszöglap egyik befogója körüli forgatásával kapott mértani testet *egyenes körkúpnak* nevezzük.
Újrafogalmazva: ha a VOA háromszög derékszögű *($VOA\sphericalangle = 90°$),* akkor az összes olyan VM szakasz egyesített halmaza, amelynek az M végpontja az O középpontú, OA sugarú körlapon található, *egyenes körkúpot* alkot. A körkúp alapja az O középpontú, OA sugarú körlap, csúcsa a V pont.
Mivel ebben a tankönyvben csak egyenes körkúpokról lesz szó, tovább egyszerűen a kúp kifejezést használjuk.

Fedezzük fel, értsük meg!



1. alkalmazás. Rögzítsétek a derékszögű vonalzót egy vízszintes síkra! Forgassátok el a függőleges befogója körül és képzeljétek el azt a mértani testet, amelynek a felszínét a vonalzó átfogója súrolja.

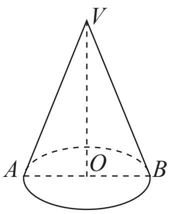
Megoldás. Jelölje AOV a vonalzó csúcsai által meghatározott háromszöget, $\sphericalangle VOA = 90°$. Elforgatjuk a vonalzót a VO egyenes körül úgy, hogy közben az OA befogó végig a vízszintes síkban maradjon, és közben súrolja az O középpontú, OA sugarú körlapot. Eközben az átfogó pontjai egy-egy kört írnak le, melynek a középpontja az OV befogón található, tehát az AV átfogó a forgás közben a kúp palástfelszínét (oldalfelszínét) súrolja, ezért a kúp *alkotójának* nevezzük.

1. *megjegyzés.* Gyakran, amikor kúpról beszélünk, tulajdonképpen a kúp teljes felszínére gondolunk (az alapra és a palástfelszínre), eltekintve a kúp belső pontjaitól.

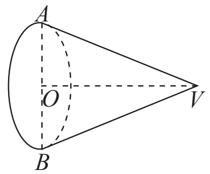
2. Rendszerint, amikor egy kúpot ábrázolunk, az alapkör középpontját O-val jelöljük és meghúzzuk az AV *és* BV alkotókat úgy, hogy A és B a $\mathcal{C}$ (O, $R = OA$) kör átmérősen ellentett pontjai legyenek.

A kúp forgástengelye nem kötelezően függőleges helyzetű. Lehet vízszintes vagy ferde is, a kúp tulajdonságait ez nem befolyásolja.

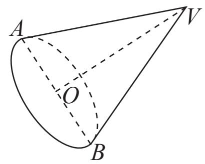
Függőleges tengelyű kúp



Vízszintes tengelyű kúp



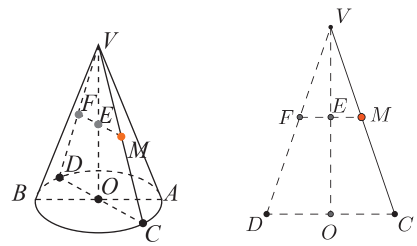
Ferde tengelyű kúp



A mellékelt ábrákon V-vel jelöltük a kúp csúcsát.
Az O középpontú, OA sugarú körlap a kúp alapja.
Az OA és OB szakasz s kúp két sugara, a sugár hosszát rendszerint R-rel jelöljük.
A VA és VB szakazok a kúp alkotói, ezek hosszát rendszerint G-vel jelöljük.

Alkalmazások

2. alkalmazás. A hengernél alkalmazott módszerrel mutassátok ki, hogy a kúp *forgástengelye* egyben *szimmetriatengely is.*

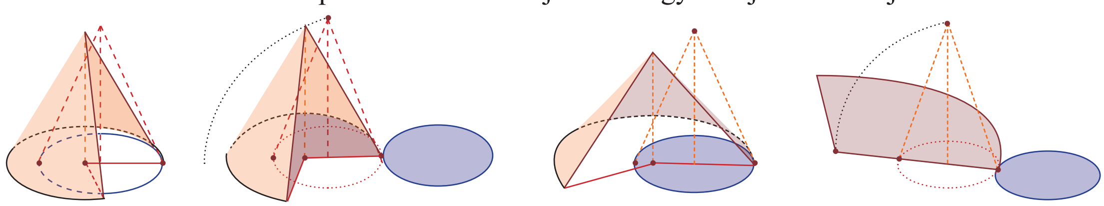


Útmutatás. A mellékelt ábrákon bebizonyítjuk, hogy a VO egyenes a kúp palástfelszínének a szimmetriatengelye.
Kijelölünk egy M pontot a palástfelszínen, CV az alkotó, amelyen az M pont található, és D a C pont *átmérősen* ellentett pontja az alapkörön.
Megszerkesztjük az $ME \perp VO$, $E \in VO$ egyenest és F-fel jelöljük az ME és VD egyenesek metszéspontját.
Bebizonyítjuk, hogy $EM \equiv EF$, tehát F az M szimmetrikusa a VO-ra *nézve és a kúp* palástfelszínén helyezkedik el.

Feladat a portfólióba

Igazoljátok, hogy a fenti tulajdonság igaz akkor is, ha M az alapkörön helyezkedik el vagy annak egy belső pontja!

3. alkalmazás. Az alábbi ábrák a kúp síkba történő lefejtésének egy módját illusztrálják.



a) Vizsgáljátok az ábrákat és írjátok le a lefejtés lépéseit!
b) Jellemezzétek a kapott síkalakzatot (a kúp testhálóját)!

Megoldás. **a)** Kivágjuk a kúp alapját és kiterítjük arra a síkra, amelyre a testhálót készítjük. Elvágjuk a kúp palástfelszínét egyik alkotója mentén, majd kiterítjük ugyanabba a síkba, mint az alapot.
Megjegyzés. Ha a kiterítési sík egybeesik az alapkör síkjával, akkor az alapkört nem mozdítjuk el, az oldallapot pedig miután elvágtuk, melléje terítjük.
b) Egy egyenes körkúp minden alkotója egyforma, és az palástfelszín az alkotók halmazának összességéből tevődik össze. Következésképpen a palástfelszín lefejtése egy körcikk, amelynek a sugara éppen a kúp alkotójával azonos.
Következtetés. Egy kúp testhálója a kúp alapjának megfelelő körlapból és egy körcikkből áll. A körcikk sugara egyenlő a kúp alkotójával, a körcikket meghatározó körív hossza pedig egyenlő a kúp alapkörének kerületével.

Gyakorlatok és feladatok

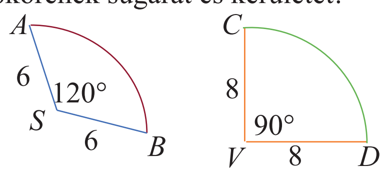
1. Az ABC derékszögű háromszöget elforgatjuk az AB, majd az AC befogó körül, így két egyenes körkúpot kapunk.

a) Készítsétek el a két forgatáshoz tartozó ábrát!

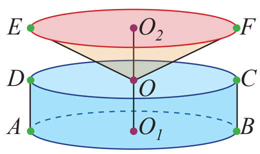
b) Ha $AB = a$ cm, $AC = b$ cm, $a > b$, másoljátok le a és egészítsétek ki az alábbi táblázatot, amelyben R és G a kúp sugara, illetve alkotója.

	1. kúp	2. kúp
R	b	a
G		

2. Tudjuk, hogy egy kúp palástfelszíne megkapható egy körcikkből, ha azt alkalmasan feltekerjük. Az alábbi rajzon két körcikket ábrázoltunk, ezekből megkapható egy-egy kúp palástfelszíne. Határozzátok meg a két kúp alapkörének sugarát és kerületét!



3. Az alábbi ábra egy díszedény vázlata.



a) Azonosítsátok és nevezzétek meg azokat a mértani testeket, amelyek az edényt alkotják.

b) Nevezzétek meg az edényt összetevő mértani testek elemeit!

4. Az $ABCD$ négyzetben $AC \cap BD = \{O\}$ és $AC = 6\sqrt{2}$ cm.

a) Milyen testeket kaptok, ha elforgatjátok a négyzetet a BD átló körül?

b) Nevezzétek meg a két test elemeit! Mekkora a két test sugara és alkotója?

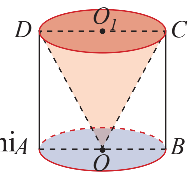
5. Az ABC egyenlő szárú háromszög oldalai $AB = 2a$, $AC = 2a$, $BC = 3a$, $a > 0$.

a) Rajzoljatok egy háromszöget, amely megfelel a feladat adatainak, majd húzzátok meg a háromszög szimmetriatengelyét!

b) Bizonyítsátok be, hogy ha a háromszöglapot megforgatjuk a szimmetriatengelye körül, akkor egyenes körkúp keletkezik.

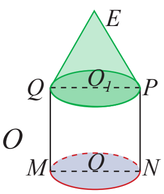
c) Mekkora az így keletkezett test alkotója és alapkörének sugara?

6. Nézzétek figyelmesen a mellékelt ábrákat!



a) Nevezzétek meg a mértani testeket és azok jellegzetes elemeit!

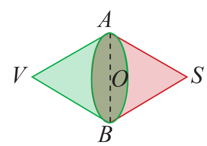
b) Határozzátok meg a kúp és a henger alkotóját a következő esetekben:



b1. $ABCD$ négyzet, $AB = 6$ cm, O az AB szakasz felezőpontja.

b2. $MNPQ$ négyzet, PQE egyenlő oldalú háromszög, $K_{MNPEQ} = 20$ cm.

7. 7. Az ábrán látható alkatrész két kúp összeillesztéséből keletkezett. A kúpok alapja egyforma, középpontjuk O, sugaruk OA.



a) Nevezzétek meg a kúpok elemeit!

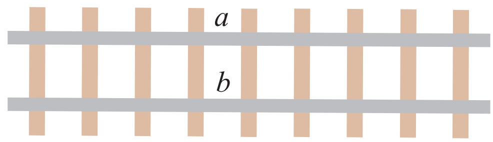
b) Igazoljátok, hogy V, O, S kollineáris pontok.

c) Ha $VASB$ rombusz, $S = 40\sqrt{3}$ cm és $AVB\sphericalangle = 60^\circ$, számítsátok ki a kúpok alapkörének sugarát és alkotóját!

3. Párhuzamosság a térben

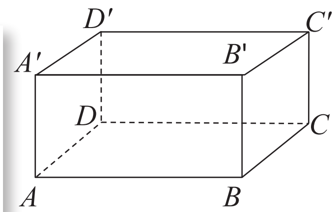
1.*l*. Párhuzamos egyenesek, két térbeli egyenes hajlásszöge

A mértan a minket körülvevő fizikai valóság leképezésére jött létre, és az idők során egyre pontosabb modelleket eredményezett. A számszerű modellezés hasznos, de nem elégséges.
Például egy *egyenes vonalú* **pályán haladó mozdony a szerelvényt** *egy bizonyos erővel vonja* (az erő nagyságát egy számmal fejezzük ki), ugyanakkor pontosítanunk kell az erő hatásának *irányát* is.
A mozdony kerekei egy *sínpáron* haladnak, amelynek egyszerűsített modellje lehet két (egy síkban levő) *párhuzamos egyenes*.
A valóságot gyakran egyszerűsítve, szakaszokkal és egyenesekkel modellezzük.



Oldjuk meg figyelmesen!

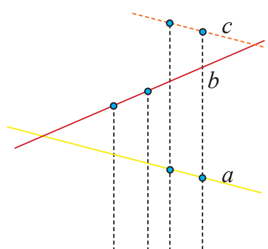
1. alkalmazás. a) Az $ABCDA'B'C'D'$ paralelepipedonban alkalmazzátok a párhuzamosok axiómáját az AB, AD, illetve AA' élre és azokra a csúcsokra, amelyek nem illeszkednek ezekhez az élekhez!
b) Keressetek négy élpárt, amelyek tartóegyenesei kitérő egyenesek, tehát nem illeszkednek ugyanahhoz a síkhoz!

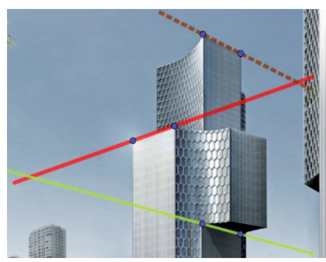


Megoldás. **a)** Az AB egyeneshez egy rajta kívül található ponton keresztül egyetlen egyenes fektethető: az A' ponton az $A'B'$, a C ponton keresztül a CD, a C' ponton keresztül a $C'D'$. Hasonlóan járunk el az AD és AA' élek esetén is.
b) Az AB egyenessel nem párhuzamos és nem is metsző a DD', CC', $A'D'$ és $B'C'$ egyenes. Kitérő egyenespárok: (AB, DD'), (AB, CC'), (AB, $A'D'$) és (AB, $B'C'$).

A síkban két különböző egyenes vagy párhuzamos (nincs közös pontjuk), vagy metszi egymást (pontosan egy közös pontjuk van).
Láttuk, hogy a térben vannak egyenesek, amelyek nem metszik egymást, de nem is párhuzamosak: ezek a *kitérő egyenesek.*

Feladat. Figyeljétek meg az ábrákat! Döntsétek el, hogy az a, b és c egyenesek közül van-e kettő, amely tartalmaz közös pontot vagy pontokat?





Pusztán az első rajz alapján nem dönthető el egyértelműen, hogy az egyeneseknek van-e közös pontjuk vagy sem? Úgy tűnhet, hogy az a és b egyenes metszi egymást, b és c szintén. Az a és c egyenes egymással párhuzamosnak tűnik, de ebben sem lehetünk biztosak. További információkra van szükségünk.

Az épület fényképe, amelynek három élét a rajzon *modelláltuk* elég információt nyújt a kérdések eldöntéséhez. Az a **és** c egyenes párhuzamos egymással, tehát egy síkban helyezkednek el és nincs közös pontjuk. Az a és b egyenesek nem egy síkban helyezkednek el, kitérőek, nincs közös pontjuk. Ugyanez a helyzet a b és c egyenessel is.

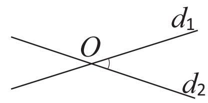
A térmértani alakzatok síkbeli ábrázolása alkalmával pontosan be kell tartani az egyezményes eljárásokat. A helyesen elkészített síkmértani ábrák a rajtuk szereplő elemek pontos képét mutatják. Ezzel szemben, a térbeli ábrázolás csak egyik oldalát mutatja a vizsgálandó alakzatnak. A gyakorlás során tapasztalatot szerezhetünk, képzelőerőnket fejleszthetjük, fokozatosan „látni fogunk a térben”, megtanuljuk „kiolvasni” az ábrákból a különböző alakzatok egymáshoz viszonyított helyzetét.

Fedezzük fel, értsük meg!

A. Két térbeli egyenes hajlásszöge

Bármely két térbeli egyenes esetén beszélhetünk ezek hajlásszögéről.
A térben két egyenes lehet egybeeső, párhuzamos, metsző és kitérő.
1. *Az egybeeső egyenesek* nullszöget képeznek. Ha $d_1 = d_2$, akkor $(d_1, d_2) \sphericalangle = 0°$.
2. *A párhuzamos egyenesek* hajlásszöge megegyezés szerint nulla. Ha $d_1 \parallel d_2$, akkor $(d_1, d_2) \sphericalangle = 0°$.
3. *A metsző egyenesek* hajlásszöge: ha d_1 és d_2 metsző egyenesek, akkor meghatározzák a (d_1, d_2) síkot.

A (d_1, d_2) síkban a két egyenes 4 szöget határoz meg a közös metszéspont körül. Ezek páronként csúcsszögek. A csúcsszögek egymással kongruensek, az egymás melletti szögek pedig kiegészítő szögek: összegük 180°. Tehát a négy szög összesen két szögmértéket jelent.

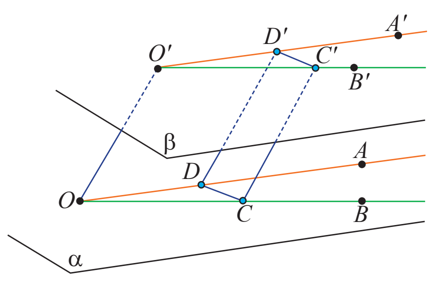


Az O pont körül keletkezett négy szög közül a *kisebb szög* mértékét tekintjük a d_1 és d_2 egyenes *hajlásszögének*. Jelölése: $(d_1, d_2) \sphericalangle$.

4. A *kitérő egyenesek hajlásszöge* a térmértan sajátos fogalma, a síkban ezzel nem találkozunk. Az értelmezés síkmértani ismeretekre vezethető vissza, amelyeket nem több síkban fogunk alkalmazni. Előbb bebizonyítjuk, hogy a síkmértan keretei között tanult tétel, amely szerint a párhuzamos szárú szögek kongruensek vagy kiegészítő szögek, érvényes a térben is.

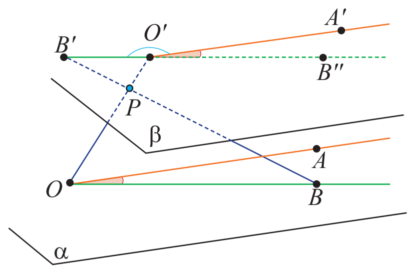
1. kijelentés. Ha az $AOB\sphericalangle$ és $A'O'B'\sphericalangle$ szárai páronként párhuzamosak, $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$, akkor
$AOB\sphericalangle \equiv A'O'B'\sphericalangle$ vagy $AOB\sphericalangle + A'O'B'\sphericalangle = 180°$.
Bizonyítás. Jelöljük α-val és β-val az (AOB) illetve $(A'O'B')$ *síkot!*

1. *eset*. Ha az $(OA, O'A')$ *és* $(OB, O'B')$ síkban az OO' egyenes nem metszi az AA' *és* BB' szakaszt, vizsgáljuk a C és D pontot az OA, illetve OB szakaszon és a C' és D' pontot az $O'A'$, illetve $O'B'$ szakaszon úgy, hogy $OO' \parallel CC' \parallel DD'$. Az $OO'C'C$ és $OO'D'D$ négyszög paralelogramma (a szemben fekvő oldalak párhuzamosak), tehát $OC \equiv O'C'$ és $OD \equiv O'D'$.
Mi több, CC', OO' és DD' párhuzamos és kongruens szakaszok, tehát $CC'D'D$ paralelogramma és $CD \equiv C'D'$.
Az O.O.O. egybevágósági eset alapján $OCD\Delta \equiv O'C'D'\Delta$, tehát $COD\sphericalangle \equiv C'O'D'\sphericalangle$ vagy $AOB\sphericalangle \equiv A'O'B'\sphericalangle$.



2. e*set.* Ha OO' metszi az AA' *és a* BB' szakaszt, tekintjük az $O'A'$ és $O'B'$ félegyenesekkel ellentétes $O'A''$, illetve $O'B''$ félegyeneseket. A csúcsszögek kongruensek, tehát $A''O'B''\sphericalangle \equiv A'O'B'\sphericalangle$.
Hasonlóan igazoljuk azt is, hogy $AOB\sphericalangle \equiv A'O'B'\sphericalangle$.

3. *eset*. Az OO' egyenes nem metszi az AA', szakaszt, de metszi a BB' szakaszt, és legyen $OO' \cap BB' = \{P\}$.
Jelöljük OB''-tel az OB' félegyenes ellentétes félegyenesét a β síkban. Nyilvánvaló, hogy $A'O'B' \sphericalangle + A'O'B'' \sphericalangle = 180°$ és $AOB \sphericalangle \equiv A'O'B'' \sphericalangle$ az 1. eset szerint. Ebből következik, hogy $AOB \sphericalangle + A'O'B'' \sphericalangle = 180°$.
Ugyanígy járunk el, ha OO' nem metszi a BB' szakaszt, de metszi az AA' szakaszt.



Most készen állunk arra, hogy értelmezzük két kitérő egyenes hajlászögét.

Értelmezés. Két tetszőleges egyenes hajlásszöge az a szög, amit adott rögzített ponton át az egyenesekkel húzott párhuzamosok zárnak be egymással.

Megjegyzés. A fent bizonyított kijelentés alapján a kitérő egyenesek értelmezése nem függ annak a pontnak a helyzetétől, amelyen keresztül a párhuzamosokat állítjuk.
Sajátosan, ez a pont az egyik adott egyenesen is kijelölhető, ebben az esetben az értelmezés újrafogalmazható.

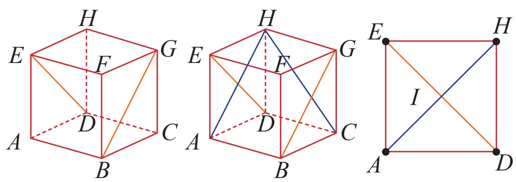
A d_1 és d_2 kitérő egyenesek hajlásszöge az a szög, amit d_1 egy olyan egyenessel zár be, amely d_2-vel párhuzamos és átmegy d_1 valamely pontján.

Alkalmazások

1. alkalmazás. Az $ABCDEFGH$ kockának 12 éle, 12 lapátlója és 4 testátlója van. Határozzátok meg a következő egyenespárok hajlásszögét:
PT
a) $(AE,\ ED)$, **b)** (CD, HG), **c)** (AD, BF), **d)** (AH, CG), **e)** (BG, DE), **f)** (BG, CH).

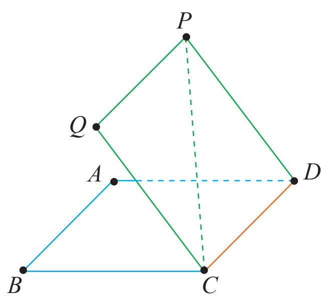
Megoldás. A kocka minden lapja négyzet és igazak az alábbi kijelentések:

(1) A kocka minden lapján a szemben fekvő oldalak kongruensek és párhuzamosak.
(2) Egy lap szomszédos oldalai derékszöget zárnak be egymással.
(3) A kocka minden lapján az átlók 45°-os szöget zárnak be az adott lap oldalaival.
(4) A kocka minden lapján az átlók merőlegesek egymásra.



a) AE és ED metsző egyenesek: $(AE,ED) \sphericalangle = (AED) \sphericalangle \overset{(3)}{=} 45°$. **b)** CD és HG párhuzamos egyenesek ($CDHG$ négyzet), tehát $(CD, HG) \sphericalangle = 0°$. A többi egyenespár kitérő egyenesekből áll, tehát alkalmas párhuzamost keresünk egyik egyenessel. **c)** $ABFE$ négyzet és $BF \parallel AE$. $(AD,BF) \sphericalangle = (AD, AE) \sphericalangle = (DAE) \sphericalangle \overset{(2)}{=} 90°$.
d) $CDHG$ négyzet és $CG \parallel HD$. A hajlásszög: $(AH, CG) \sphericalangle = (AH, HD) \sphericalangle = (AHD) \sphericalangle \overset{(3)}{=} 45°$. **e)** A két lap átlója, BG és ED az $ADHE$, illetve $BCGF$ lapok síkjában helyezkedik el. Azonosítjuk az AH átlót, amely metszi DE-t. Bebizonyítjuk, hogy $AH \parallel BG$. Valóban, az AB él párhuzamos és kongruens a CD éllel, ez pedig párhuzamos és kongruens a HG éllel, tehát AB párhuzamos és kongruens HG-vel. Következik, hogy $ABGH$ paralelogramma és $AH \parallel BG$. Így a BG és ED egyenesek hajlásszöge egyenlő a DE és AH egyenesek szögével, amelyek az $ADHE$ lap átlóinak tartóegyenesei. Egy négyzet átlói merőlegesek egymásra, tehát $(BG,DE) \sphericalangle = (AH,DE) \sphericalangle \overset{(4)}{=} 90°$. **f)** $AH \parallel BG$, ezért $(BG, CH) \sphericalangle = (AH, CH) \sphericalangle = (AHC) \sphericalangle$. Az AHC háromszög egyenlő oldalú, oldalai kongruens négyzetek átlói, tehát $(BG, CH) \sphericalangle = 60°$.

2. alkalmazás. Az $ABCD$ *és* $CDPQ$ rombusz különböző síkokban helyezkedik el. Tudjuk, hogy $BAD\sphericalangle = 140^\circ$ és $CD \equiv CP$.
Határozzuk meg a következő hajlásszögeket: **a)** $(AB,\ DP)\sphericalangle$ **b)** $(PQ,\ BC)\sphericalangle$.



Megoldás. **a)** A $CDPQ$ rombusz oldalai kongruensek és $CD \equiv CP$. Ebből következik, hogy CDP egyenlő oldalú háromszög: $CDP\sphericalangle = 60^\circ$.
Az AB *és* DP kitérő egyenesek, ezért alkalmas párhuzamost keresünk egyikükkel, amely metszi a másik egyenest.
$ABCD$ rombusz, CD *és* DP metszik egymást és $CD \parallel AB$.
Következik, hogy $(AB,\ DP)\sphericalangle = (CD,\ DP)\sphericalangle = CDP\sphericalangle = 60^\circ$, tehát $(AB,DP)\sphericalangle = 60^\circ$.
b) Hasonlóan járunk el a $(PQ,\ BC)\sphericalangle$ esetén is.
$CDPQ$ rombusz, tehát $CD \parallel PQ$. Következik, hogy $(PQ,\ BC)\sphericalangle = (CD,\ BC)\sphericalangle = (BCD)\sphericalangle$.
$BCD\sphericalangle = BAD\sphericalangle = 140^\circ$ (a rombusz szemben fekvő szögei). Mivel a $BCD\sphericalangle$ tompaszög, a PQ és BC egyenesek hajlásszöge: $(PQ,BC)\sphericalangle = 180^\circ - \sphericalangle BCD = 40^\circ$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Az AOB szög α síkban helyezkedik el. A $Q \notin \alpha$ ponton át meghúzzuk a $QC \parallel OA$ *és* $QD \parallel OB$ párhuzamosokat. Határozzátok meg a CQD szög mértékét a következő esetekben:
a) $(AOB)\sphericalangle = 72^\circ$; **b)** $(AOB)\sphericalangle = 123^\circ$.

2. Az a és b metsző egyenesek által alkotott egyik szög mértéke 130°. Az (a,b) síkon kívül található O ponton át c *és* d egyeneseket fektetünk a következő feltételek szerint: $c \parallel a$, és d párhuzamos az a és b egyenesek által meghatározott egyik szög szögfelezőjével. Számítsátok ki a $(c,\ d)\sphericalangle$ mértékét!

3. Az $ABCDEFGH$ kockában:
a) keressetek két kitérő egyenest, amelyek hajlásszöge 90°;
b) keressetek két kitérő egyenest, amelyek hajlásszöge 45°;
c) keressetek két egyenest, amelyek hajlásszöge 60°!

4. A $VABC$ szabályos gúlában $AB = 2a$ és $VA = a\sqrt{2}$. Ha M *és* N az AB, illetve AC él felezőpontja, számítsátok ki a következő egyenespárok hajlásszögét:
a) VA és VB; **b)** VN és BC; **c)** VB és MN.

5. Az $ABCD$ rombusz és az $ADEF$ téglalap különböző síkokban helyezkedik el. $AB = 2$ cm, $(BAD)\sphericalangle = 60^\circ$, $AF = 2\sqrt{2}$ cm *és* $EC = 2\sqrt{3}$ cm. Számítsátok ki az alábbi egyenespárok hajlásszögét:
a) AB és EF; **b)** AE és EC;
c) BF és EC; **d)** EF és AC.

6. Az $ABCDEFGH$ téglatestben $AC \cap BD = \{O\}$ és $EG \cap FH = \{Q\}$.
a) Igazoljátok, hogy $AE \parallel OQ$!
b) Felhasználva azt, hogy $HD \perp BD$, számítsátok ki az AE *és* BD egyenesek hajlásszögét!

7. Az $ABCD$ szabályos tetraéderben M, N, P a BC, BD, illetve CD szakasz felezőpontja. Határozzátok meg a következő egyenespárok hajlásszögét:
a) AD és MN; **b)** AM és NP.

8. Az $ABCDEFGH$ kockában O *és* Q az $ABCD$, illetve $BCGF$ lap középpontja. Számítsátok ki a következő szögek mértékét: $(GO,\ BD)\sphericalangle$, $(HO,\ BG)\sphericalangle$, $(AB,\ OQ)\sphericalangle$, $(BO,\ EF)\sphericalangle$.

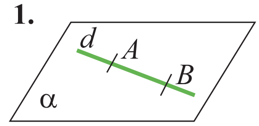
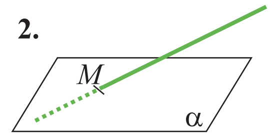
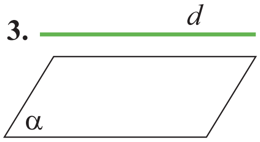
9. Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest DD' élének felezőpontja M, $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $BC = 4$ cm és $CC' = 8$ cm.
a) Igazoljátok, hogy $MD \perp B'C'$.
b) Számítsátok ki az $(AM,CC')\sphericalangle$, $(AB,MC)\sphericalangle$ és $(AA',MC)\sphericalangle$ hajlásszögek mértékét!

10. $CDEF$ paralelogramma és M egy pont, $M \notin (CDE)$, $MED\sphericalangle = 90^\circ$, $DME\sphericalangle = 55^\circ$, $EMF\sphericalangle = EFM\sphericalangle = 45^\circ$.
a) Igazoljátok, hogy $CF \perp ME$ és $ME \perp CD$!
b) Számítsátok ki a $(CF,DM)\sphericalangle$ és $(CD,MF)\sphericalangle$ hajlásszögeket!

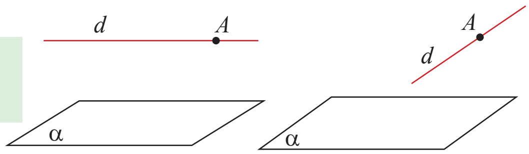
2.*l.* Adott síkkal párhuzamos egyenes

Emlékeztető

Ha d egy egyenes és α egy sík, akkor a következő esetek lehetségesek:
1. d az α síkban található;
2. d *metszi* az α síkot;
3. d *párhuzamos* az α síkkal.

$d \subset \alpha \Leftrightarrow d \cap \alpha = d$ d és α végtelenül sok közös ponttal rendelkezik	$d \cap \alpha = \{M\}$ d és α egyetlen közös ponttal rendelkezik	$d \cap \alpha = \varnothing$ d és α nem rendelkezik közös ponttal
1. 	**2.** 	**3.** 

Fedezzük fel, értsük meg!



Értelmezés. Ha a d egyenesnek és az α síknak nincs közös pontja, azt mondjuk, hogy a d egyenes párhuzamos α *síkkal*. Jelölés: $d \parallel \alpha$.

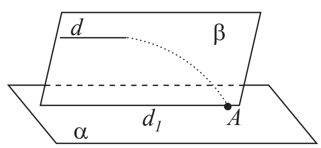
Megjegyzés. $d \parallel \alpha \Leftrightarrow d \cap \alpha = \varnothing$

Amikor egy adott síkkal egyetlen párhuzamos egyenest ábrázolunk, akkor azt rendszerint az ábrázolt síktartomány valamelyik szélével párhuzamosan szoktuk meghúzni.

A következő kijelentés hasznos módszert nyújt annak bizonyítására, hogy *egy egyenes párhuzamos egy síkkal*.

1. kijelentés. Ha a d egyenes párhuzamos az α síkban elhelyezkedő valamely d_1 egyenessel, akkor a d egyenes párhuzamos az α síkkal, vagy benne van az α síkban.

Feltétel: $d \parallel d_1$ és $d_1 \subset \alpha$ — *Következtetés:* $d \parallel \alpha$ vagy $d \subset \alpha$

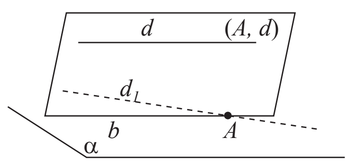


Bizonyítás. A d_1 egyenes az α síkban található, $d \parallel d_1$, és tekintsük előbb a $d \not\subset \alpha$ esetet! Az ellentmondásra való visszavezetés (*reductio ad absurdum*) módszerét alkalmazzuk. Feltételezzük, hogy $d \cap \alpha \neq \varnothing$. Mivel $d \not\subset \alpha$, következik, hogy d metszi a síkot, tehát $d \cap \alpha = \{A\}$. Mivel $d \parallel d_1$, meghatározzák a β *síkot, amely különbözik az* α *síktól, továbbá* $d_1 \subset \alpha$ és $d_1 \subset \beta$, tehát $\alpha \cap \beta = d_1$.
Másrészt $A \in \alpha$ és $A \in d \subset \beta$, ebből következik, hogy $A \in \alpha \cap \beta = d_1$, ami ellentmond a $d \parallel d_1$ feltételnek. Az ellentmondás oka az, hogy a $d \cap \alpha \neq \varnothing$ kiinduló feltétel hamis, tehát $d \cap \alpha = \varnothing$, vagyis $d \parallel \alpha$.Ha a $d \subset \alpha$ eset áll fenn, akkor az 1. kijelentés nyilvánvalóan igaz.

Következtetés. Azt, hogy a d egyenes, amely tartalmaz egy pontot az α *síkon kívül*, párhuzamos az α *síkkal, úgy bizonyítjuk, hogy keresünk egy egyenest az* α *síkban, amely párhuzamos* d-vel. Ha azt szeretnénk bizonyítani, hogy *egy egyenes adott síkban helyezkedik el*, jól alkalmazható a következő eredmény:

2. kijelentés. Ha a d egyenes párhuzamos az α *síkkal, és a* d_1 egyenes párhuzamos d-vel és van egy közös A pontja α *sík*kal, akkor a d_1 egyenes az α *síkban helyezkedik el.*

Feltétel: $d \parallel \alpha$, $d_1 \parallel d$, $A \in d_1$ és $A \in \alpha$ — *Következtetés:* $d_1 \subset \alpha$.



Bizonyítás. A d egyenes és az A pont meghatározza a (d, A) síkot, amely különbözik α-tól, de van közös pontja vele, így a két sík metszete egy egyenes: $b = \alpha \cap (d, A)$.
Mivel $d \parallel \alpha$, $b \subset \alpha$ és d, b egy síkban helyezkedik el, következik, hogy $d \parallel b$. Tehát A ponton átmenő d_1 és b egyenes egyaránt párhuzamos d-vel. A *párhuzamossági axióma* szerint ez csak úgy lehetséges, ha $d_1 = b$, *és* mivel $b \subset \alpha$, következik, hogy $d_1 \subset \alpha$.

3. kijelentés. (a 2. kijelentés következménye). Ha az α sík tartalmazza a d egyenest, amely párhuzamos a β síkkal, akkor a két sík vagy párhuzamos vagy a d egyenessel párhuzamos egyenesben metszi egymást.

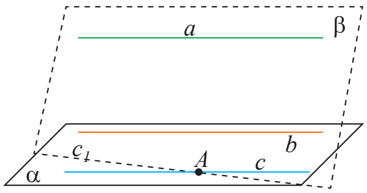
Alkalmazások

Bebizonyítjuk, hogy az egyenesek párhuzamossága tranzitív reláció.

4. kijelentés Ha két különböző egyenes párhuzamos egy harmadik egyenessel, akkor egymással is párhuzamosak.

Vizsgáljuk az a, b és c egyenest, ha $a \parallel b$ és $b \parallel c$!

Feltétel: a, b és c különbözőek, $a \parallel b$ és $b \parallel c$	*Következtetés*: $a \parallel c$



Bizonyítás. **1.** Ha mindhárom egyenes ugyanabban a síkban fekszik, akkor a tulajdonságot már bebizonyítottuk a síkmértan keretei között.

2. Ha a, b és c nem található ugyanabban a síkban, vegyük a b *és* c párhuzamos egyenesek által meghatározott α *síkot*.

Mivel $a \parallel b$ *és* $b \subset \alpha$, következik, hogy $a \parallel \alpha$ (a 2. kijelentés szerint). Felveszünk egy $A \in c$ pontot és vizsgáljuk a $\beta = (a, A)$ síkot. A β sík tartalmazza az a egyenest és $a \parallel \alpha$, ezért a 3. kijelentés szerint α és β az a egyenessel párhuzamos c_1 egyenesben metszi egymást: $\{c_1\} = \alpha \cap \beta$, tehát $c_1 \parallel a$ és $A \in c_1$.

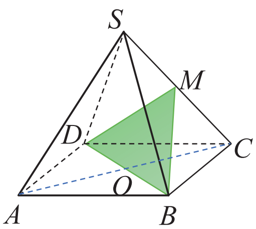
Mivel $b \parallel a$ *és* $a \subset \beta$, következik, hogy $b \parallel \beta$. Másrészt $b \subset \alpha$, tehát $b \parallel \alpha \cap \beta = \{c_1\}$. A c és c_1 egyaránt párhuzamos b-vel és az A pontot tartalmazzák, a párhuzamosok axiómája szerint egybeesnek: $c = c_1$ és $c_1 \parallel a$, tehát $c \parallel a$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Az $ABCDA'B'C'D'$ kockában azonosítsatok:
a) az (ABB') síkkal párhuzamos egyeneseket;
b) az (ABC') síkkal párhuzamos egyeneseket!

2. Adott az $ABCDMNPQ$ téglatest.
a) Melyek azok az egyenesek, amelyeket a téglatest két csúcsa határoz meg és párhuzamosak az (ADQ) síkkal?
b) Melyek azok a síkok, amelyeket a téglatest három csúcsa határoz meg és párhuzamosak az NP síkkal?
c) Igazoljátok, hogy $MP \parallel (ACQ)$!

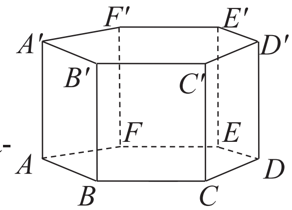
3. Az $SABCD$ gúla alapja egy négyzet. Jelöljük M-mel az SC él felezőpontját! Bizonyítsátok be, hogy az SA egyenes párhuzamos az $(MBD$ síkkal!



4. Az $ABCDEFGH$ téglatestben BK a CBD szög szögfelezője, $K \in CD$, és DL az ABD szög szögfelezője, $L \in AB$. Bizonyítsátok be, hogy:
a) $BK \parallel (DEL)$; **b)** $DL \parallel (BFK)$

5. Az ABC egyenlő oldalú háromszög AB oldala az α *síkban fekszik*, $AB = 24$ cm és $C \notin \alpha$. Az M pont az AC félegyenesen található, $MC = 3 \cdot MA$. Határozzátok meg az NC szakasz hosszát, ha N a BC egyenesen található és $MN \parallel \alpha$!

6. **6.** A mellékelt ábrán egy szabályos hatoldalú hasáb látható.



a) Melyek az (ABA') síkkal párhuzamos egyenesek?
b) Bizonyítsátok be, hogy az AB' egyenes párhuzamos a (CFC') síkkal!

7. Az $MNPQ$ tetraéderben az A és B pont az MN, illetve MP élen fekszik és $MA = 2 \cdot AN$, $MP = 3 \cdot BP$. Az NPQ lap G súlypontján keresztül NP egyenessel húzott párhuzamos a PQ és NQ élet a C, illetve D pontban metszi.
a) Készítsetek a feltételeknek megfelelő ábrát és határozzátok meg az MQ egyenesnek az (ABC) síkhoz viszonyított helyzetét!
b) Bizonyítsátok be, hogy $NP \parallel (ABG)$!

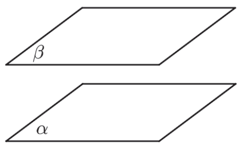
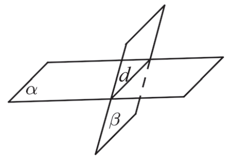
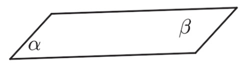
8. Az $ABCD$ tetraéderben G_1 és G_2 az ABC, illetve ABD lap súlypontja. Bizonyítsátok be, hogy a G_1G_2 egyenes párhuzamos a (BCD) és az (ACD) síkkal!

9. Az $ABCD$ trapéz és a $BCEF$ paralelogramma különböző síkban helyezkedik el. A trapéz alapjai: $AB \parallel CD$. Határozzátok meg:
a) az AD egyenes (BEF) síkhoz viszonyított helyzetét;
b) a BF egyenes (DCE) síkhoz viszonyított helyzetét;
c) az EF egyenes (ABC) síkhoz viszonyított helyzetét!

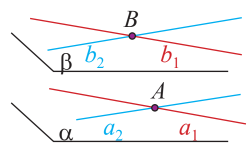
3.6. Párhuzamos síkok

Emlékeztető

A térben vannak párhuzamos síkok.
Ha α és β két sík a térben, a következő esetek lehetségesek:

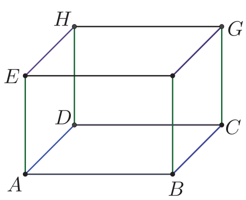
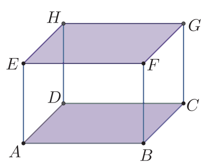
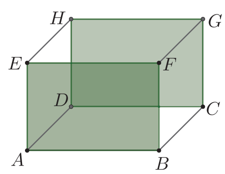
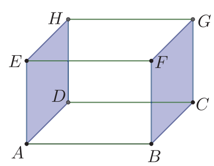
Párhuzamos síkok $\alpha \parallel \beta$	*Metsző síkok* $\alpha \cap \beta = d$	*Egybeeső síkok* $\alpha = \beta$
 Két sík *párhuzamos*, ha nincs közös pontjuk.	 Két sík *metsző*, ha közös részük egy egyenes.	 Két sík *egybeeső*, ha minden olyan pont, amely hozzátartozik egyikhez, hozzátartozik a másikhoz is.

Ha az α sík két metsző egyenese párhuzamos egy-egy olyan egyenessel, amely a β *síkban található, akkor* $\alpha \parallel \beta$.
Megjegyzés. Ez az megállapítás lehetőséget nyújt két sík (α és β) párhuzamosságának bizonyítására. Elegendő azonosítani az α síkban az a_1 és a_2 metsző egyenest, illetve a β *síkban a* b_1 és b_2 metsző egyenest, majd belátni azt, hogy $b_1 \parallel a_1$ és $b_2 \parallel a_2$.

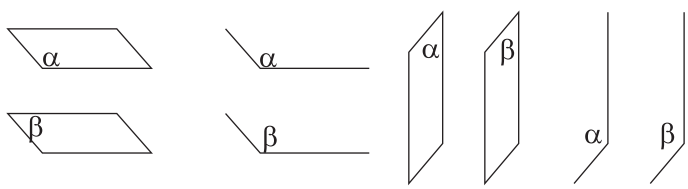


Fedezzük fel, értsük meg!

1. Egy hasáb két alapja párhuzamos síkokban található.
2. Egy henger két alapja párhuzamos síkokban található.
3. Egy paralelepipedon bármely két szemben fekvő lapja párhuzamos síkokban található.

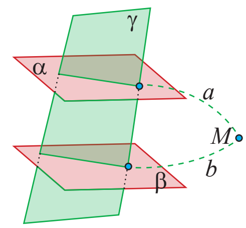
			
ABCDEFGH paralelepipedon	$(ABCD) \parallel (EFGH)$	$(ABFE) \parallel (DCGH)$	$(ADHE) \parallel (BCGF)$

Megjegyzés. Két párhuzamos síkot rendszerint paralelogrammák segítségével ábrázolunk, ezek megfelelő oldalai párhuzamosak.
Szokás ugyanezt két párhuzamos szárú szöggel is ábrázolni.



Két sík párhuzamossági relációja hasznos lehet számos gyakorlati helyzet elemzése közben. A geometria alábbi eredményei kapcsolatot teremtenek a környező valósággal, ezáltal segítenek azt megérteni.

1. kijelentés (a fűrészlap tétele) Két párhuzamos síkot egy harmadik sík párhuzamos egyenesek mentén metsz el.



Bizonyítás. A két párhuzamos sík: $\alpha \parallel \beta$, és γ az őket metsző harmadik sík.
Ha $\alpha \cap \gamma = a$ *és* $\beta \cap \gamma = b$, be fogjuk bizonyítani, hogy $a \parallel b$.
Az ellentmondásra való visszavezetés módszerét alkalmazzuk. Mivel a két egyenes (a és b) egyaránt a γ síkban található, párhuzamosak vagy metszik egymást.
Feltételezzük, hogy $a \nparallel b$, vagyis $a \cap b = \{M\}$.
Mivel $M \in a$, $a \subset \alpha$ és $M \in b$, $b \subset \beta$, következik, hogy $M \in \alpha \cap \beta$, vagyis $\alpha \nparallel \beta$, ami ellentmond a feltételnek. Következésképpen az $a \nparallel b$ feltételezés hamis, tehát az ellenkezője igaz: $a \parallel b$.

Alkalmazások

Az egyenesekhez hasonlóan, a síkok párhuzamossága is *tranzitív* reláció.

1. alkalmazás. Ha α, β és γ három különböző sík, és $\alpha \parallel \beta$, $\beta \parallel \gamma$, akkor $\alpha \parallel \gamma$.

Újrafogalmazva: két különböző sík, amely párhuzamos egy harmadik síkkal, egymással is párhuzamos.

Feltétel: $\alpha \neq \gamma$, $\alpha \parallel \beta$ és $\beta \parallel \gamma$.	*Következtetés*: $\alpha \parallel \gamma$.

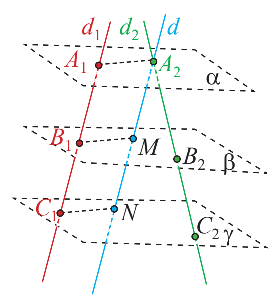
Bizonyítás. Feltételezve, hogy $\alpha \nparallel \gamma$, a két síknak van közös pontja: $A \in \alpha \cap \gamma$. Az A ponton keresztül a β síkhoz egyetlen párhuzamos sík fektethető, tehát $\alpha = \gamma$. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy $\alpha \neq \gamma$. Következésképpen $\alpha \parallel \gamma$.

2. kijelentés (Thalész tételének térbeli változata) Három vagy több párhuzamos sík őket metsző két egyenesen arányos szakaszokat határoz meg.

Feltétel: $\alpha \neq \gamma$, $\alpha \parallel \beta$ és $\beta \parallel \gamma$; d_1 metszi az α, β, γ síkot az A_1, B_1, illetve C_1 pontban, d_2 pedig az A_2, B_2, illetve C_2 pontban.	*Következtetés*: $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

Bizonyítás. A három sík esetét vizsgáljuk: $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$, ezeket a d_1 és d_2 egyenes metszi rendre az A_1, A_2, B_1, B_2, illetve C_1, C_2 pontban.

1. eset: d_1 és d_2 egy síkban található. (Lásd a digitális tankönyvet!)
2. eset: d_1 és d_2 különböző síkokban helyezkedik el.

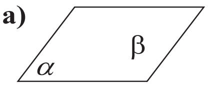


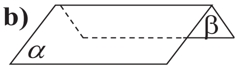
Az A_2 ponton át meghúzzuk a d párhuzamos egyenest a d_1 egyeneshez. Ez metszi a β és γ síkot az M, illetve N pontban. Mivel $d_1 \parallel d$, a két egyenes meghatározza a (d_1, d) síkot, és a megfelelő szakaszok (paralelogrammák szemben fekvő oldalai) kongruenciája alapján $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2M}{MN}$.

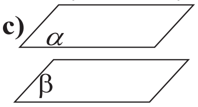
A d_2 és d egyenes metszi egymást, tehát egy síkban található, és az 1. eset szerint érvényes az $\dfrac{A_2M}{MN} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$ aránypár. Következésképpen $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Állapítsátok meg az alábbi ábrákon az α és β sík egymáshoz viszonyított helyzetét!

a)


b)


c)


2. Egészítsétek ki az alábbi mondatokat úgy, hogy a kijelentések igazak legyenek!

a) Az α síkhoz egy rajta kívül található ponton át … párhuzamos sík fektethető.

b) Ha α ∥ β és β ∥ γ, akkor … vagy … .

c) Ha $a \cap b = \{M\}$ és $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha$, akkor az (a, b) sík és az α sík … .

3. Ha *ABCDA'B'C'D'* egy paralelepipedon, állapítsátok meg a következő síkok egymáshoz viszonyított helyzetét!

a) (*ABC*) és (*A'B'D'*);

b) (*ACC'*) és (*BDD'*);

c) (*ACC'*) és (*A'B'C'*);

d) (*ADD'*) és (*BCC'*).

4. *ABCDEFGH* egy téglatest, *O* és *Q* az *ABCD*, illetve *EFGH* alaplap középpontja, *M* pedig a *BC* szakasz felezőpontja. Bizonyítsátok be, hogy (*ABE*) ∥ (*MOQ*) ∥ (*CDH*)!

5. Az *ABCD* és *ABEF* paralelogrammák különböző síkokban helyezkednek el.

a) Bizonyítsátok be, hogy az (*ADF*) sík párhuzamos a (*BCE*) síkkal!

b) Ha *EG* ∥ *BC*, igazoljátok, hogy az (*EFG*) sík párhuzamos az (*ABC*) síkkal.

6. Az *S* pont az *ABCD* négyzet síkján kívül található, *M*, *N*, *P* és *Q* pedig rendre az *SA*, *SB*, *SC*, illetve *SD* szakasz felezőpontja. Bizonyítsátok be, hogy az *M*, *N*, *P* és *Q* pont egy síkban található, és ez a sík párhuzamos az (*ABC*) síkkal!

7. Az *ABCD* téglalap csúcsain keresztül az *AA'*, *BB'*, *CC'*, illetve *DD'* párhuzamos egyeneseket fektetjük úgy, hogy az *A'*, *B'*, *C'* és *D'* pont az (*ABC*) sík ugyanazon oldalán helyezkedjék el.

a) Bizonyítsátok be, hogy (*ABB'*) ∥ (*CDD'*) és (*ADD'*) ∥ (*BCC'*)!

b) Igazoljátok, hogy ha *AA'* = 0,1 m, *BB'* = 1 dm, *CC'* = 10 cm és *DD'* = 100 mm, akkor (*ABC*) ∥ (*A'B'D'*)!

8. Adott három párhuzamos sík, α, β és γ, továbbá $A, B \in \alpha$ és $C, D \in \beta$. Az *AC*, *BC*, *BD* és *AD* egyenes a γ síkot az *E*, *F*, *G*, illetve *H* pontban metszi. Tudjuk azt, hogy *AB* és *DC* kitérő egyenesek. Bizonyítsátok be, hogy az *E*, *F*, *G* és *H* pontok egy paralelogramma csúcsai!

9. Az *Ox*, *Oy* és *Oz* félegyenes rendre meghatároz az α, β és γ síkon az *ABC*, *DEF*, illetve *HIJ* háromszöget.

a) Bizonyítsátok be, hogy a háromszögek hasonlóak!

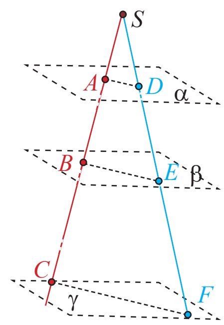
b) Jelölje *M* a *BC* szakasz felezőpontját, és $OM \cap \beta = \{N\}$. Igazoljátok, hogy *N* az *EF* szakasz felezőpontja!

c) A *d* egyenes tartalmazza az *O* pontot és a *HIJ* háromszög *G* csúcspontját. Bizonyítsátok be, hogy a *d* egyenes tartalmazza az *ABC* és *DEF* háromszögek súlypontját is!

10. A mellékelt ábrán α, β és γ párhuzamos síkok, *SA* = 6 cm, *SC* = 36 cm, *SD* = 10 cm, *SE* = 30 cm és *BE* = 24 cm. Számítsátok ki:

a) az *AB*, *BC* és *SF* szakasz hosszát;

b) az *AD* és *CF* szakasz hosszának összegét!

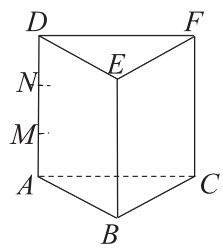


11. Az *ABCDEF* háromoldalú egyenes hasábban *M* és *N* az *AD* élen helyezkedik el, úgy, hogy *AM* = *MN* = *ND* (az él harmadoló pontjai).

a) Egészítsétek ki az ábrát az *a* és *b* egyenessel $a \parallel AB$, $b \parallel AC$, $a \cap b = \{M\}$ feltételeknek megfelelően!

b) Szerkesszétek meg a *c* és *d* egyenest a $c \parallel DE$, $d \parallel DF$, $c \cap d = \{N\}$ feltételek szerint!

c) Bizonyítsátok be, hogy $(a,b) \parallel (c, d)$!



4.ℓ. A mértani testek alapsíkjával párhuzamos síkmetszetek

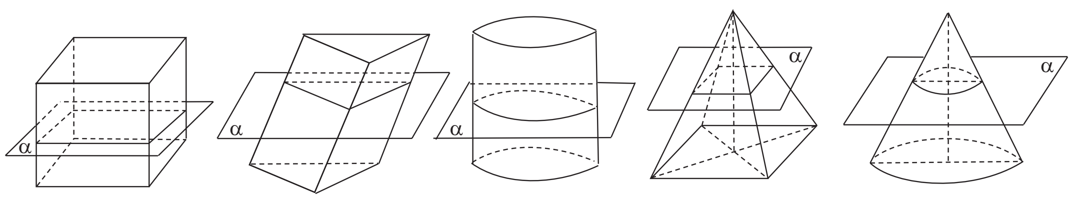
Emlékeztető

A hasábnak két alapja van, ezek egybevágó konvex sokszögek, és párhuzamos síkokban helyezkednek el.
A hengernek is két alapja van, ezek egyenlő sugarú körök, és párhuzamos síkokban helyezkednek el.

Értelmezés. Egy mértani test és egy α sík közös pontjainak halmazát *síkmetszetnek* nevezzük. Az α síkot *metsző síknak* nevezzük.

A síkmetszet alakja és mérete függ a síknak a testhez viszonyított helyzetétől. Kezdetben csak olyan metszősíkokkal foglalkozunk, amelyek párhuzamosak a test alapjával/alapjaival.

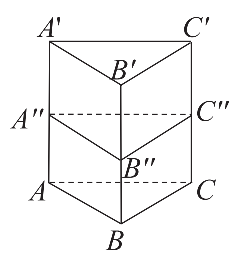
Képzeljétek el, hogy az α sík metsz egy kockát, háromoldalú hasábot, hengert, gúlát vagy kúpot, minden esetben úgy, hogy párhuzamos az adott test alapjával vagy alapjaival. (*Lásd az alábbi ábrát!*)
Keressetek az osztályteremben vagy az iskolában olyan síkokat, amelyek bizonyos testek metszősíkjainak tekinthetők. Nevezzétek meg azokat, amelyek párhuzamosak az általuk metszett testtel!



Válaszolni szeretnénk az alábbi kérdésekre:
a) Milyen testek keletkeznek, amikor egy mértani testet elmetszünk egy, az alappal párhuzamos síkkal?
b) Milyen tulajdonsággal rendelkeznek az így keletkezett testek?
c) Milyen alakzat lesz maga a síkmetszet?

Fedezzük fel, értsük meg

A. A hasáb és a henger alapjával hasonló síkmetszetek



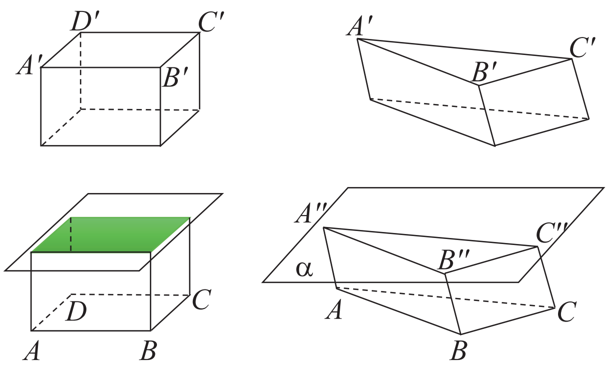
1. kijelentés. Az alapokkal párhuzamos helyzetű síkmetszet egy olyan sokszög, amely egybevágó a hasáb két alapjával.

Bizonyítás. A fenti kijelentést a háromoldalú hasábra igazoljuk, a további eseteket hasonlóan kell tárgyalni. Tekintsük az $ABCA'B'C'$ hasábot!
legyen $\alpha \parallel (ABC)$ a metsző sík, és A'', B'', C'' az a három pont, amelyben az α sík metszi az oldaléleket.
Az (ABB') sík az (ABC) síkot az AB egyenes mentén metszi, α síkot pedig az $A''B''$ egyenes mentén. Mivel $\alpha \parallel (ABC)$, következik, hogy $AB \parallel A''B''$. Másrészt $AA' \parallel BB'$, tehát az $ABB''A''$ négyszög paralelogramma és $A''B'' \equiv AB$. Hasonlóan, $B''C'' \equiv BC$ és $A''C'' \equiv AC$.
Az O.O.O. egybevágósági eset alapján $ABC\Delta \equiv A''B''C''\Delta$, majd $A''B''C''\Delta \equiv A'B'C'\Delta$.

Következtetés. **a)** Ha egy hasábot az alapokkal párhuzamos síkkal metszve két testre bontunk, *két hasábot* kapunk.

b) 1. Az így kapott hasábok alapjai *kongruensek* az eredeti hasáb alapjaival.
2. Ha az eredeti hasáb egyenes hasáb volt, akkor az újonnan keletkezett hasábok is azok lesznek.
3. Ha az eredeti hasáb szabályos hasáb volt, akkor az újonnan keletkezett hasábok is azok lesznek.

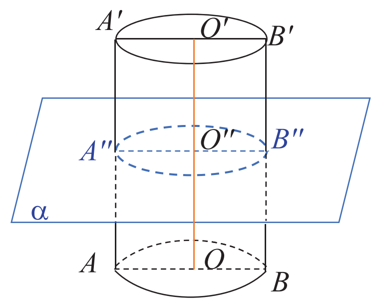
c) Egy hasábot az alapokkal párhuzamos helyzetű síkkal metszve a keletkező síkmetszet *az alapokkal egybevágó sokszög* lesz.



2. kijelentés. Ha egy egyenes körhengert az alapokkal párhuzamos helyzetű síkkal metszünk, akkor az alapokkal egybevágó (egyenlő sugarú) körlapot kapunk.

Bizonyítás. Vegyük az egyenes körhengert, amelyet az $AOO'A'$ téglalap OO' tengely körüli forgatásából kapunk! Az α metszősík az OO' és AA' szakaszt az O'' illetve A'' pontban metszi. A fűrészlap tétele szerint az $(AOO'A')$ sík párhuzamos egyenesek mentén metszi a párhuzamos síkokat, tehát $AO \parallel A''O'' \parallel A'O'$. Mivel $AA'' \parallel OO''$, az $AOO''A''$ négyszög paralelogramma, tehát $A''O'' = AO$.

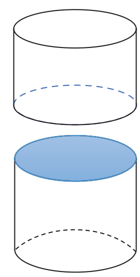
Ez az egyenlőség nem függ az A pont megválasztásától, tehát a hengert az α síkkal elmetszve a keletkezett síkmetszet egy körlap, amely kongruens a henger alaplapjaival.



Következtetés. **a)** Ha egy *egyenes körhengert* az alapokkal párhuzamos síkkal metszve két testre bontunk, *két egyenes körhengert* kapunk.

b) Az így keletkezett körhengerek *alapkörei kongruensek* az eredeti körhenger alapköreivel.

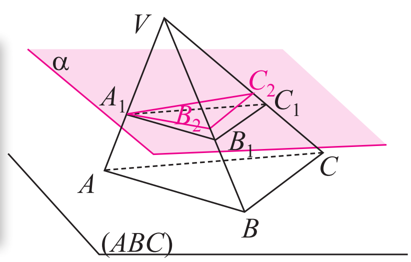
c) Egy hengert az alapokkal párhuzamos helyzetű síkkal metszve, a keletkező síkmetszet *az alapokkal egybevágó körlap* lesz.



Alkalmazás

B. A gúla és a kúp alapjával párhuzamos síkmetszetek

1. alkalmazás. A $VABC$ tetraéder VA, VB és VC élén felvesszük az A_1, B_1, illetve C_1 pontot úgy, hogy teljesüljön a $\dfrac{VA_1}{A_1A} = \dfrac{VB_1}{B_1B} = \dfrac{VC_1}{C_1C}$ aránysor. Igazoljátok, hogy az $(A_1B_1C_1)$ és (ABC) síkok párhuzamosak!



Megoldás. Az A_1 pont nem az alap síkjában található, tehát rajta keresztül fektethető egy α sík, amely párhuzamos az (ABC) síkkal. Ez a sík a VB és VC egyenest a B_2, illetve C_2 pontban metszi. Mivel $\alpha \parallel (ABC)$ és a (VAB) sík metszi ezeket, a fűrészlap tétele alapján azt kapjuk, hogy $A_1B_2 \parallel AB$.

A VAB háromszögben a feltétel szerint $\frac{VA_1}{A_1A} = \frac{VB_1}{B_1B}$. Thalész tételének fordított tétele alapján következik, hogy $A_1B_1 \parallel AB$. Mivel az A_1 ponton át egyetlen párhuzamos fektethető az AB egyenessel (*párhuzamosok axiómája*), következik, hogy A_1B_1 *és* A_1B_2 egybeeső egyenesek, tehát $B_1 = B_2$. Hasonlóan igazolható, hogy $C_1 = C_2$, vagyis $(A_1B_1C_1) = (A_1B_2C_2) = \alpha$, és $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.

Megjegyzés. A $VABC$ tetraéderből kiindulva fektettünk a VA *él* A_1 pontján keresztül egy párhuzamos síkot a tetraéder alapjával. Ez a sík a másik két élt B_1-ben, illetve C_1-ben metszi. Ezáltal létrejött az újabb, $VA_1B_1C_1$ tetraéder, amelynek az eredetivel hasonló tulajdonságai vannak.

1. A *két tetraéder alapjai hasonló háromszögek. A fűrészlap tétele alapján*: $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$ és $BC \parallel B_1C_1$. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszög szögei páronként kongruensek (párhuzamos szárú szögek), tehát $A_1B_1C_1\Delta \sim ABC\Delta$.

A hasonlósági arány: $k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$.

2. Az oldallapok is páronként hasonló háromszögek. A VAB oldallap háromszög és $A_1B_1 \parallel AB$, tehát a hasonlóság alaptétele szerint $VA_1B_1\Delta \sim VAB\Delta$, és $\frac{VA_1}{VA} = \frac{VB_1}{VB} = \frac{A_1B_1}{AB} = k$. Bebizonyítottuk tehát, hogy ha egy tetraédert egy, az alapjával párhuzamos sík metszi, akkor a keletkező kisebb tetraéder *hasonló* az eredetivel, abban az értelemben, hogy:

a) a megfelelő szögek kongruensek;

b) a megfelelő élek aránya ugyanaz, és ezt az arányt a tetraéderek *hasonlósági arányának* nevezzük.

Megjegyzés. A tetraéderben (háromoldalú gúlában) érvényes fenti tulajdonságok általánosíthatók tetszőleges *n*-oldalú sokszög alapú gúlára is, ha a gúlát egy olyan síkkal metsszük, amely párhuzamos az alap síkjával.

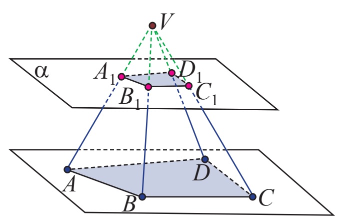
3. kijelentés. Egy gúla síkmetszete egy olyan síkkal, amely párhuzamos az alap síkjával, egy, *a gúla alaplapjával hasonló sokszöglap*.

Ha egy gúlát egy, az alapjával párhuzamos síkkal metszünk, az alap síkja és a metsző sík egy újabb mértani testet zár közre, amit *csonka gúlának* nevezünk.

Példa. Tekintsük a $VABCD$ négyoldalú gúlát.

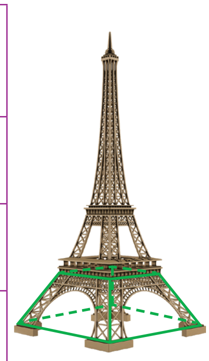
Az alappal párhuzamos síkmetszet az oldaléleket rendre az A_1, B_1, C_1 illetve D_1 pontban metszi.

Leválasztjuk a $VA_1B_1C_1D_1$ gúlát (a *kis* gúlát) a $VABCD$ gúláról (a *nagy* gúláról), és ami marad, az a *csonka gúla*. Azt mondjuk, hogy megszerkesztettük az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ négyoldalú csonka gúlát.



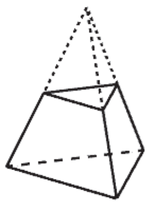
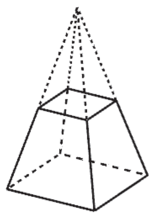
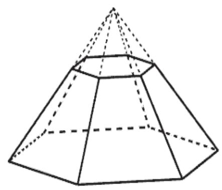
A csonka gúla jellegzetes elemeit az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ négyoldalú csonka gúla alapján azonosítjuk.

Az alapok: a *nagy* gúla alapja a csonka gúla *nagyalapja*, a *kis* gúla alapja a csonka gúla *kisalapja*.	A nagyalap az $ABCD$ négyszög; a kisalap az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög.
Alapélek: a nagyalap és a kisalap oldalai.	A nagyalap élei: AB, BC, CD, AD; a kisalap élei: A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1.
Oldalélek: a *nagy* gúla oldaléleiből megmaradt szakaszok a *kis* gúla eltávolítása után.	Az oldalélek: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.
Oldallapok: a *nagy* gúla oldallapjaiból megmaradt sokszöglapok, a *kis* gúla eltávolítása után.	Az oldallapok trapéz alakú sokszöglapok: ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1 és ADD_1A_1.



Megjegyzések. **1.** A metsző sík a nagy gúla oldallapjain hasonló háromszögeket határoz meg, a hasonlósági arány minden lapon ugyanaz, következésképpen: $\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{C_1D_1}{CD}=\dfrac{D_1A_1}{DA}$.

2. A csonka kúp kis- és nagyalapjának megfelelő oldalai párhuzamosak és kongruens szögeket képeznek.
Aszerint, hogy milyen gúlából származik, a csonka gúla lehet:
1) háromoldalú, négyoldalú, ötoldalú, hatoldalú stb. csonka gúla;
2) szabályos csonka gúla vagy általános csonka gúla.
A csonka gúlát úgy ábrázoljuk, hogy előbb lerajzoljuk szaggatott vonallal az eredeti gúlát, majd megerősítjük a csonka gúla látható alapéleit és oldaléleit.

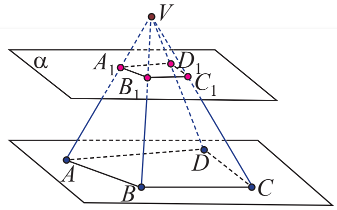
Szabályos háromoldalú csonka gúla	Szabályos négyoldalú csonka gúla	Szabályos hatoldalú csonka gúla
		

Megjegyzés. Pusztán a rajz alapján nem tudhatjuk, hogy a csonka gúla szabályos.
Ez csak az adatokból derül ki.

Feladat a portfólióba

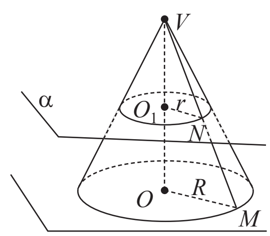
Tekintsétek a $VABCD$ gúlát és az $\alpha \parallel (ABC)$ síkot, amely az oldaléleket az A_1, B_1, C_1, illetve D_1 pontban metszi és meghatározza a $VA_1B_1C_1D_1$ gúlát.

A mellékelt ábra alapján állapítsátok meg, hogy milyen kapcsolatok állnak fenn a $VA_1B_1C_1D_1$ *és* $VABCD$ gúla megfelelő élei között? Indokoljatok is!



2. alkalmazás. Egy kúp síkmetszete az alapjával párhuzamos síkkal egy *körlap*, amelynek középpontja a kúp szimmetriatengelyén található.

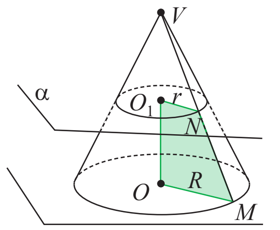
Bizonyítás. A kúp alapköre $C(O, R)$, szimmetriatengelye OV. Tekintsük az M változó pontot az alapkörön: $M \in C(O,R)$. Az α sík párhuzamos az alap síkjával és az OV szakaszt az O_1 pontban, a kúp VM alkotóját pedig az N pontban metszi. A (VOM) sík az α síkot és az alap síkját párhuzamos egyenesekben metszi (a fűrészlap tétele szerint), tehát $O_1N \parallel OM$. Alkalmazható a $VOM\Delta$-ben a hasonlóság alaptétele: $VO_1N\Delta \sim VOM\Delta$, és $\dfrac{VN}{VM}=\dfrac{O_1N}{OM}=\dfrac{VO_1}{VO}$. M változó pont az alapkörön, de a $\dfrac{VO_1}{VO}=k$ arány és az $OM=R$ szakasz hossza állandó, következésképpen $O_1N=\dfrac{VO_1\cdot OM}{VO}=k\cdot R$ is állandó. Következésképpen a síkmetszet egy körlap, melynek sugara: $O_1N=r$.



Következtetések: **a)** Ha egy egyenes körkúpot az alappal párhuzamos síkkal metszünk, két testet kapunk. A metsző síknak az eredeti kúp csúcsa felöli oldalán található test egy kisebb egyenes körkúp.
b) Az α sík és az egyenes körkúp síkmetszete a $C(O_1, r)$ körlap.
c) A kis kúp eltávolítása után maradt mértani testet *egyenes csonka körkúpnak* (röviden *csonka kúpnak*) nevezzük.

A csonka kúp jellegzetes elemeit a származtató kúp elemeiből kiindulva azonosítjuk.

Az alapok: a *nagy* kúp alapja a csonka kúp *nagyalapja*, a *kis* kúp alapja a csonkkúp *kisalapja*.	Nagyalap: a $C(O, R)$ körlap; kisalap: a $C(O_1, r)$ körlap.
Alkotók: a csonka kúp *alkotói* a nagy kúp alkotóiból megmaradt szakaszok, miután eltávolítottuk a kis kúpot.	Az MN szakasz a csonka kúp egyik alkotója.
Szimmetriatengely: azonos az eredeti kúp szimmetriatengelyével.	Az OO_1 szakasz tartóegyenese a csonka kúp szimmetriatengelye.



Megjegyzés. Az egyenes körkúp egy forgástest. Úgy is megkaphatjuk, hogy megforgatunk egy derékszögű trapézt az alapjaira merőleges szára körül.

Gyakorlatok és feladatok

1. Az $ABCDEFGH$ szabályos négyoldalú hasábban M, N, P és Q rendre az AE, BF, CG, illetve DH oldalél egy-egy pontja, és $MA = NB = PC = QD$.

a) Készítsetek a feladat adatainak megfelelő ábrát!

b) Bizonyítsátok be, hogy az M, N, P és Q pont ugyanabban a síkban található!

c) A hasábot elmetsszük az (MNP) síkkal. Nevezzétek meg és írjátok le az így keletkező mértani testeket!

2. Az $ABCA'B'C'$ háromoldalú hasábban az M, N és P pont rendre az $ABB'A'$, $BCC'B'$, illetve $ACC'A'$ oldallap átlóinak metszéspontja.

a) Bizonyítsátok be, hogy az (MNP) és (ABC) síkok párhuzamosak!

b) Készítsetek ábrát, amelyen kiemelitek az (MNP) síkkal elmetszett hasábon keletkezett síkmetszetet!

c) Számítsátok ki az $MNP\Delta$ és az $ABC\Delta$ tJerületének arányát!

d) Számítsátok ki a síkmetszet és az $ABJC\Delta$ területének arányát!

3. A $VABC$ gúlát az ABC alapháromszöggel párhuzamos síkkal metsszük.

a) Ábrázoljátok a gúlát és a síkmetszetet!

b) Jelöljétek megfelelően a síkmetszet és az oldalélek közös pontjait, majd nevezzétek meg a gúla metszése révén keletkező mértani testeket!

c) Soroljátok fel ezen testek alapjait és éleit!

4. Az $SABC$ szabályos tetraédert az (ABC) alapsíkkal párhuzamos és az SA él felezőpontját tartalmazó α síkkal metsszük.

a) Készítsetek a feltételeknek megfelelő ábrát!

b) Bizonyítsátok be, hogy ha $\{N\} = \alpha \cap SB$ és $\{P\} = \alpha \cap SC$, akkor $SN + CP = SA$.

c) Tudva azt, hogy a tetraéder egyik lapjának területe $4\sqrt{3}$ cm², számítsátok ki a metszés révén keletkező csonka gúla éleinek hosszát!

5. Igazoljátok, hogy ha AA', BB', CC', DD' egy négyoldalú csonka gúla oldalélei, akkor ezek páronként egy síkban helyezkednek el.

6. Egy egyenes körhenger két alapköre $C(O, r)$ és $C(O', r)$, AB a $C(O, r)$ kör átmérője, AA' és BB' a henger két alkotója. Az alapkörök síkjával párhuzamos α *sík* C-ben és C'-ben metszi az AA', illetve BB' alkotót.

a) Készítsetek a feltételeknek megfelelő ábrát!

b) Nevezzétek meg a henger metszése révén keletkező újabb hengerek sugarait és alkotóit!

7. Egy egyenes körkúp alapkörének átmérője $AB = 10$ cm, alkotója $VA = 13$ cm. A kúpot metszi egy, az alappal párhuzamos sík, amely tartalmazza a VAB háromszög magasságpontját (ortocentrumát). Számítsátok ki a metszet területét!

4. Merőlegesség

1.*ℓ*. Merőleges egyenesek, síkra merőleges egyenes, egy pont távolsága adott síktól

Emlékeztető

1. Két tetszőleges egyenes hajlásszöge az a hegyesszög vagy derékszög, amit adott rögzített ponton át az egyenesekkel húzott párhuzamosok egymással zárnak be.
2. Két párhuzamos szárú szög kongruens egymással vagy egymás kiegészítő szögei

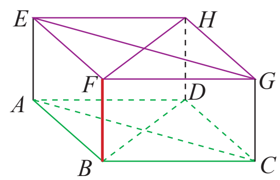
Értelmezés. Azt mondjuk, hogy a d_1 és d_2 egyenes merőleges egymásra, ha a hajlásszögük derékszög.

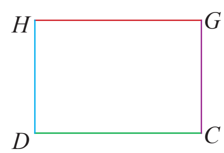
Matematikai jelekkel: $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \sphericalangle(d_1, d_2) = 90°$.

Oldjuk meg figyelmesen!

Gyakorlat. Adott az *ABCDEFGH* téglatest. Azonosítsátok azokat az éleket, lapátlókat és a testátlókat, amelyek derékszöget zárnak be a *BF* éllel!

Megoldás. A téglatest minden lapja téglalap. Vizsgáljuk *BF* és *GH* hajlásszögét!





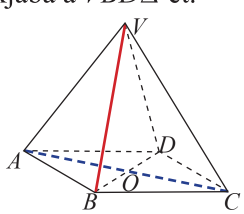
Nyilvánvaló, hogy *BF* és *GH* kitérő egyenesek. *CG* párhuzamos *BF*-fel és egy síkban található *GH*-val. Következésképpen: $(BF, GH)\sphericalangle = (CG, GH)\sphericalangle = CGH\sphericalangle$, utóbbi a *CGHD* téglalap egyik szöge, tehát $(BF, GH)\sphericalangle = 90°$. Az értelmezés alapján: $BF \perp HG$.

Megjegyzés. *CG* nem az egyetlen párhuzamos a *BF*-fel, amely tartalmazza a *GH* egyenes valamely pontját. Keressetek még egy ilyen egyenest! Hasonlóan eljárva, a *BF* éllel további, derékszöget bezáró egyeneseket találunk: **a)** élek: *CD*, *AB*, *EF*, *BC*, *GF*, *EH*, *AD*; **b)** lapátlók: *FH*, *EC*, *AC*, *BD*. **c)** ilyen testátló nincs.

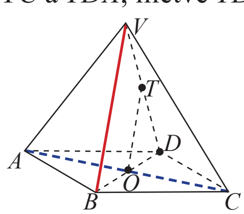
Fedezzük fel, értsük meg!

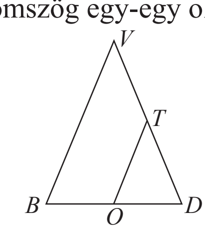
1. alkalmazás. Nagyanyó házán a háztető négyoldalú szabályos gúla alakú. A gúlát *VABCD*-vel jelöljük, alapja a padlás alaprajzának felel meg. Igazoljátok, hogy a háztető *VB* éle merőleges a padlás *AC* átlójával!

Megoldás. Az alap átlóinak *O* metszéspontján át párhuzamos egyenest fektetünk a *BV* éllel. Ez az egyenes a (*VBO*) síkban található. Kiterítjük a füzet síkjába a *VBD*Δ-et.

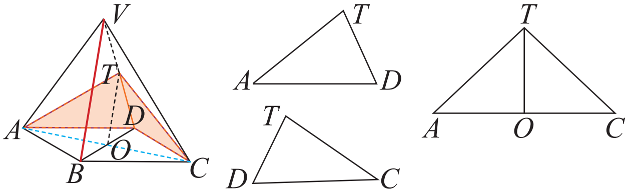


A *VBD* háromszög egyenlő szárú (a szabályos gúla oldalélei kongruensek), *OT* középvonal a *VBD* háromszögben (*O* a négyzet középpontja és $OT \parallel BV$). Tehát $(VB, AC)\sphericalangle \equiv (TO, AC)\sphericalangle$. Megvizsgáljuk a *TAC* háromszöget, mert gyanítjuk, hogy egyenlő szárú. *TA* és *TC* a *TDA*, illetve *TDC* háromszög egy-egy oldala.





A TDA és TDC háromszögben $DA \equiv DC$ (ugyanazon négyzet oldalai), $TDA\sphericalangle \equiv TDC\sphericalangle$ (a szabályos gúla oldallapjai kongruens egyenlő szárú háromszögek), $TD \equiv TD$ (közös oldal). Az O.SZ.O. kritérium alapján $TDA\Delta \equiv TDC\Delta$, tehát $TA \equiv TC$.



A TAC egyenlő szárú háromszögben TO az alaphoz tartozó oldalfelező, tehát egyben magasságvonal is, vagyis $TO \perp AC$. *Következtetés*: $TO \perp AC$ és $(VB, AC)\sphericalangle \equiv (TO, AC)\sphericalangle = 90°$, tehát $BV \perp AC$.

Visszatérve az $ABCDEFGH$ téglatest BF oldaléléhez, megállapítjuk, hogy az $ABCD$ alaplap számos egyenesére merőleges: AB-re, BC-re, CD-re, DA-ra, AC-re, BD-re. Feltesszük a következő kérdést: vajon a BF egyenes merőleges-e az (ABC) sík minden egyenesére?

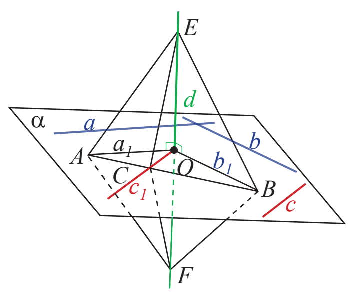
Értelmezés. Azt mondjuk, hogy a d egyenes merőleges az α síkra, ha merőleges az α *síkban található bármely egyenesre.*

Ha a d egyenes merőleges az α síkra, azt így írjuk: $d \perp \alpha$.
Lehetetlen egyesével ellenőrizni, hogy egy egyenes merőleges egy síkban található összes egyenesre, mivel ezek végtelenül sokan vannak. A következő eredmény alkalmas arra, hogy áthidaljuk ezt a nehézséget.

1. kijelentés. Ha egy egyenes merőleges egy síkban található két metsző egyenesre, akkor merőleges a síkra.

Feltétel: $d \perp a$ és $d \perp b$, a és b metsző egyenesek, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$
Következtetés: $d \perp \alpha$

Bizonyítás. Jelöljük O-val a d egyenes és az α *sík metszéspontját:* $\{O\} = d \cap \alpha$. Az O ponton keresztül párhuzamosokat fektetünk az a *és* b egyenesekkel, ezeket a_1-gyel és b_1-gyel jelöljük. Felvesszük az O-tól különböző $A \in a$ *és* $B \in b$ pontot. Be kell bizonyítani, hogy ha c az α *síkban található tetszőleges egyenes, akkor* $d \perp c$.
Az O ponton keresztül párhuzamost fektetünk c-vel: $c_1 \parallel c$, *és jelöljük* C-vel a c_1 és AB egyenesek metszéspontját! A d egyenesen felvesszük az E *és* F pontokat oly módon, hogy O legyen az EF szakasz felezőpontja.
Mivel $OE \equiv OF$ *és* $OA \equiv OA$, következik, hogy $OAE\Delta \equiv OAF\Delta$ (befogó-befogó eset), tehát $AE \equiv AF$ **(1)**.Hasonlóan: $OE \equiv OF$ *és* $OB \equiv OB$, $OAE\Delta \equiv OAF\Delta$, tehát $BE \equiv BF$ **(2)**.

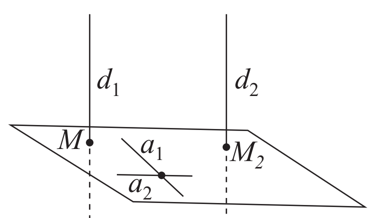


Az **(1)**-es és **(2)**-es részeredmény alapján $EAB\Delta \equiv FAB\Delta$ (O.O.O.).
Ebből következik, hogy $EAC\sphericalangle \equiv FAC\sphericalangle$ **(3).** Mivel $AE \equiv AF$, $EAC\sphericalangle \equiv FAC\sphericalangle$ és $AC \equiv AC$, következik, hogy $EAC\Delta \equiv \Delta FAC$ (O.SZ.O.), tehát $EC \equiv FC$. Ez azt jelenti, hogy az $EFC\Delta$ egyenlő szárú, és CO az alapjához tartozó oldalfelező. Következik, hogy CO magasságvonal is, tehát $CO \perp EF$.
Igazoltuk tehát, hogy ha $d \perp a$, $d \perp b$, $a \subset \alpha, b \subset \alpha$, a és b metsző egyenesek, akkor $d \perp c$, bármely $c \subset \alpha$ egyenes esetén. Tehát $d \perp \alpha$.

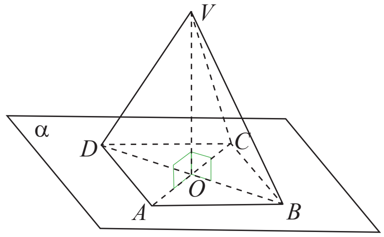
1. alkalmazás. Adott síkra merőleges egyenessel párhuzamos bármely egyenes szintén merőleges arra a síkra.

Feltétek: $d_1 \parallel d_2$ és $d_1 \perp \alpha$
Következtetés: $d_2 \perp \alpha$

Bizonyítás. Ha α a sík, d_1 *és* d_2 a két egyenes, akkor a feltétel szerint $d_1 \perp \alpha$ és $d_1 \parallel d_2$. Mivel $d_1 \perp \alpha$,következik, hogy létezik két metsző egyenes (a_1 és a_2) az α síkban, amelyekre d_1 egyaránt merőleges: $d_1 \perp a$ és $d_1 \perp b$. A párhuzamosság megőrzi a hajlásszöget, ezért $d_2 \perp a_1$ és $d_2 \perp a_2$, tehát $d_2 \perp \alpha$.



2. alkalmazás. Bizonyítsátok be, hogy a szabályos négyoldalú gúla csúcsát az alap középpontjával összekötő egyenes merőleges az alap síkjára!



Megoldás. $VABCD$ a gúla, az $ABCD$ alapja az α *síkban fekszik, és* O az alap átlóinak metszéspontja (az alap középpontja). Igazolni szeretnénk, hogy $VO \perp \alpha$. Az **1. kijelentés** szerint elegendő bebizonyítani, hogy VO merőleges az alap síkjában található két metsző egyenesre. A VBD és VAC háromszög egyenlő szárú ($VD \equiv VB \equiv VA \equiv VD$), és mindkettőben VO az alaphoz tartozó oldalfelező, tehát VO magasságvonal is ezekben a háromszögekben: $VO \perp AC$ és $VO \perp BD$. Mivel AC és BD az alapsíkban fekvő két metsző egyenes és VO mindkettőre merőleges, következik, hogy $VO \perp \alpha$.

Megjegyzés. Az 1. kijelentésben szereplő eredmény a térmértan legfontosabb és leghasznosabb eredményei között szerepel, különösképpen, ha a tanulmányozott feladatban síkra merőleges egyenesről van szó. Néhány feltételből végtelenül sok eredmény következik: az egyenes merőleges a síkban található bármely egyenesre.

2. kijelentés. Adott síkra adott pontból egyetlen merőleges egyenes állítható.
3. kijelentés. Ugyanarra a síkra állított két merőleges egyenes párhuzamos egymással.
4. kijelentés. A tér adott M pontján át egyetlen olyan sík megy át, amely merőleges egy adott d egyenesre. Ezt a d egyenesre merőleges, M ponton átmenő síknak nevezzük.

5. kijelentés. Két különböző sík, amely merőleges ugyanarra az egyenesre, párhuzamos egymással.

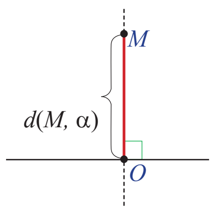
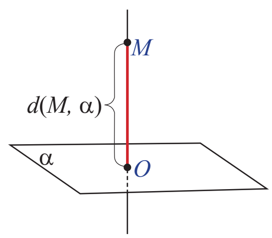
A 2., 3. és 4. kijelentés bizonyítása megtalálható a digitális tankönyvben.

Feladat a portfólióba

A digitális tankönyvben található bizonyítások mintájára bizonyítsátok be az 5. kijelentést, az ellentmondásra való visszavezetés (*reductio ad absurdum*) módszerével.

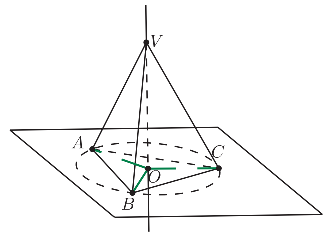
A térmértanban, akárcsak a síkmértanban, két mértani alakzat távolsága, a távolság fogalmának pontos értelmezése és helyes használata maximális jelentőséggel bír a valóság modellálása során. A síkmértanban használt *„pont távolsága adott egyenestől”* fogalom érvényben marad a térmértan keretei között is.

Hasonló módon értelmezzük a *„pont távolsága adott síktól”* fogalmat is.

Síkban		**Térben**	
Adott az M pont és a d egyenes.		Adott az M és az α *sík.*	
M-ből a d_1 merőleges egyenest bocsájtjuk d-re, ez egyértelműen meghatározott.		M-ből a d_1 merőleges egyenest bocsájtjuk az α síkra, ez egyértelműen meghatározott.	
Jelölés: $\{O\} = d_1 \cap d$ Az O pontot az M pontból a d egyenesre bocsájtott *merőleges talppontjának* nevezzük.		Jelölés: $\{O\} = d_1 \cap \alpha$ Az O pontot az M pontból az α *síkra bocsájtott merőleges talppontjának* nevezzük.	
1. értelmezés. Az M pont távolsága a d egyenestől egyenlő az MO szakasz hosszával. Jelölés: $d(M, d)$		*2. értelmezés.* Az M pont távolsága az α síktól egyenlő az MO szakasz hosszával. Jelölés: $d(M, \alpha)$	

Alkalmazások

3. alkalmazás. Igazoljátok, hogy egy háromoldalú szabályos gúla csúcsát az alapháromszög köré írható kör középpontjával összekötő egyenes merőleges az alap síkjára!



Megoldás. A gúla csúcsából merőlegest bocsájtunk az alapra: $VO \perp (ABC)$. Az így keletkező VOA, VOB és VOC derékszögű háromszögek kongruensek egymással (*átfogó-befogó eset*). A háromszögek egybevágóságából következik, hogy $OA \equiv OB \equiv OC$, tehát O az ABC háromszög köré írt kör középpontja, és így $VO \perp (ABC)$

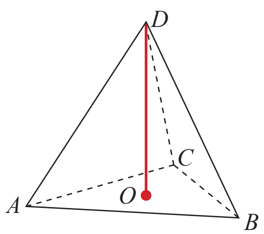
Észrevétel. Az 1. és 2. alkalmazásban kapott eredmények általánosíthatók.

Bármely szabályos gúla csúcsát az alapsokszög köré írható kör középpontjával összekötő egyenes merőleges az alap síkjára.

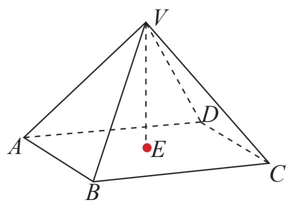
Megjegyzés. A szabályos gúla csúcsát az alapsokszög középpontjával összekötő szakasz hosszát a csúcsnak az alapsíktól mért *távolságának* nevezzük.

1. értelmezés. A gúla csúcsának az alap síkjától mért távolságát a gúla *magasságának* nevezzük.

Az $ABCD$ tetraéderben az ABC háromszöget tekintjük az alapnak.
A tetraéder magassága $d(D, (ABC))$, vagyis a DO szakasz hossza, ahol O a D csúcsból az (ABC) síkra bocsájtott merőleges talppontja.
$DO \perp (ABC)$

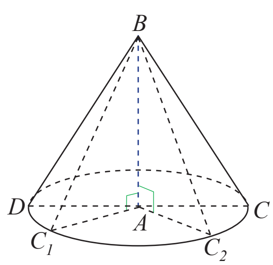


A $VABCD$ négyoldalú gúla magassága $d(V, (ABCD))$, vagyis a VE szakasz hossza, ahol E a V csúcsból az (ABC) síkra bocsájtott merőleges talppontja.
$VE \perp (ABC)$



Megjegyzések. **1)** A merőlegesség ábrázolására kevés egyezményes megállapodás létezik. Amikor csak egy síkot és a rá merőleges egyenest ábrázoljuk, akkor rendszerint a síkot vízsintesen az egyenest függőlegesen helyezzük el.
Figyelem! Nem minden függőlegesnek *látszó* egyenes merőleges egy vízszintes síkra!
2) A háromoldalú gúlában (tetraéderben), bármely lap tekinthető alapnak, tehát négy magasságról beszélhetünk.

4. alkalmazás. Bizonyítsátok be, hogy egy egyenes körkúp szimmetriatengelye merőlegeąs az alap síkjára!



Megoldás. Vizsgáljuk az ABC derékszögű háromszög ($BAC\sphericalangle = 90^\circ$) AB befogója körüli megforgatásából származó kúpot! Ha C_1 és C_2 a C pont két különböző helyzete az alapkörön, akkor $AB \perp AC_1$ és $AB \perp AC_2$, tehát AB merőleges az alapsík két metsző egyenesére, így magára az alapsíkra is.

2. értelmezés. Egy egyenes körkúp csúcsának távolságát a kúp alapjától, a *kúp magasságának* nevezzük.

Az egyenes körkúp magassága a egyenlő kúp csúcsát és az alapkör középpontjával összekötő szakasz hosszával.

Gyakorlatok és feladatok

1. Az ABC és BCD egyenlő oldalú háromszög két különböző síkban helyezkedik el, és E a BC közös oldal felezőpontja. Bizonyítsátok be, hogy $BC \perp (ADE)$.

2. Az $ABCD$ és $BCEF$ négyzet két különböző síkban helyezkedik el, és a CM félegyenes a DCE szög szögfelezője, $M \in DE$. Bizonyítsátok be, hogy:
a) $BC \perp (CDE)$ b) $CM \perp (ADE)$

3. $ABCD$ tetraéder ABC, ACD és ABD lapja A-ban derékszögű háromszög.
a) Bizonyítsátok be, hogy $AC \perp (ABD)$, $AD \perp (ABC)$ és $AB \perp (ACD)$
b) Határozzátok meg a BC egyenes (ABD) síkhoz viszonyított helyzetét!
c) Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ tetraéder szemben fekvő oldalai merőlegesek egymásra!

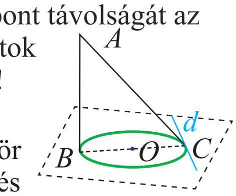
4. Az $ABCDEFGH$ kockában $AC \cap BD = \{O\}$, $EG \cap FH = \{Q\}$. Bizonyítsátok be, hogy:
a) $BD \perp (ACE)$; **b)** $AC \perp BH$;
c) $OQ \parallel AE$; **d)** $OQ \perp (ABC)$

5. Az ABC egyenlő szárú háromszög, $(AC = BC)$ és az $ABDE$ téglalap különböző síkban helyezkedik el, és $EA \perp AC$. Bizonyítsátok be, hogy:
a) $EA \perp (ABC)$;
b) a BDC háromszög derékszögű;
c) az AC egyenes nem merőleges az (ABD) síkra;
d) $AB \perp (CMN)$, ahol az M és N pont az AB, illetve DE szakasz felezőpontja!

6. Az $MNPQ$ négyzet oldala $MN = 40$ cm, és $AM \perp (MNP)$, $AM = 30$ cm. Tekintsük az MAN háromszög MB magasságvonalát, $B \in AN$ és a $BC \parallel NP$ szakaszt, $C \in AP$.
a) Bizonyítsátok be, hogy $NP \perp (AMN)$ és $PQ \perp (AMQ)$!
b) Számítsátok ki a $d(A, (NPQ))$, $d(N, (AMQ))$ és $d(P, (AMN))$ távolságot!
c) Bizonyítsátok be, hogy $AN \perp (BCM)$ és határozzátok meg az A pont távolságát a (BCM) síktól!

7. Az ABC derékszögű háromszög $(BAC\sphericalangle = 90^\circ)$ síkjára az AM merőlegest emeljük. Tudva azt, hogy $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm és $MB = 2 \cdot AB$, számítsátok ki:
a) az M pont távolságát az (ABC) síktól;
b) a B pont távolságát az (ACM) síktól;
c) a C pont távolságát az (ABM) síktól!

8. Az $ABCD$ rombuszban $AB = a$, $BAD\sphericalangle = 60^\circ$, $AC \cap BD = \{O\}$. Tudjuk, hogy az AE és CF egyenes merőleges a rombusz síkjára, és $AE = CF = BD$.
a) Készítsetek a feladat adatainak megfelelő ábrát!
b) Bizonyítsátok be, hogy $BD \perp (EOF)$!
c) Határozzátok meg az O pont távolságát az EF egyenestől! Vizsgáljatok minden lehetséges esetet!

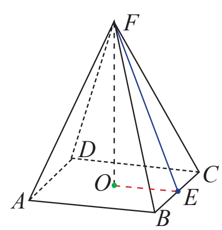


9. **9.** A mellékelt ábrán AB merőleges a $C(O, r = OB)$ kör síkjára, BC a kör átmérője, és a d egyenes érinti a kört a C pontban.
a) Igazoljátok, hogy $d \perp (ABC)$!
b) Ha $AB = 20$ cm és $AC = 2{,}5 \cdot r$, számítsátok ki a kör sugarát!

10. Az $ABCD$ téglalap középpontja O, $AB = 12$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm, és az S pont az (ABC) síkon kívül helyezkedik el úgy, hogy $SA = SB = SC = SD = AB$.
a) Igazoljátok, hogy $SO \perp AC$!
b) Igazoljátok, hogy $SO \perp (ABC)$!
c) Számítsátok ki az S pont távolságát az (ABC) síktól !

11. Az $A_1A_2 \ldots A_n$, $n \in \{3, 4, 6\}$ szabályos sokszög a $VA_1A_2 \ldots A_n$ gúla alapja, az O pont a V csúcsból az alap síkjára bocsájtott merőleges talppontja. Bizonyítsátok be, hogy az O pont akkor és csakis akkor az $A_1A_2 \ldots A_n$ szabályos sokszög köré írható kör középpontja, ha $VA_1 = VA_2 = \ldots = VA_n$.

12. A mellékelt ábrán FO az $FABCD$ szabályos négyoldalú gúla magassága. Tudjuk, hogy az FOE háromszög területe $6\sqrt{3}$ cm², az E pont a BC él felezőpontja és $FEO\sphericalangle = 60^\circ$. Számítsátok ki a gúla magasságát!



13. A $DABC$ tetraéder alapja az ABC egyenlő oldalú háromszög, $AB = 6$ cm O az ABC háromszög köré írt kör középpontja és $d(D, (ABC)) = 2\sqrt{6}$ cm. Menyivel egyenlő $d(A, (BCD))$?

2.6. Két párhuzamos sík távolsága, az egyenes hasáb, a téglatest, az egyenes körhenger, a csonka gúla és az egyenes körhenger magassága

Emlékeztető

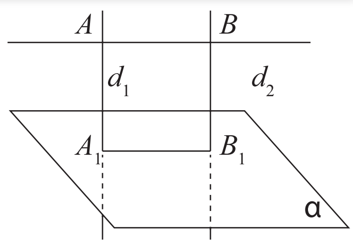
A síkban két párhuzamos egyenes közötti távolság egyenlő az egyik egyenes valamely pontjának a másik egyenestől mért távolságával. Ugyanez az értelmezés a térben is érvényes, mivel két párhuzamos egyenes egy síkban található. A párhuzamosok közötti távolság nem függ a pont megválasztásától.

Fedezzük fel, értsük meg!

A. Egyenes távolsága egy vele párhuzamos síktól

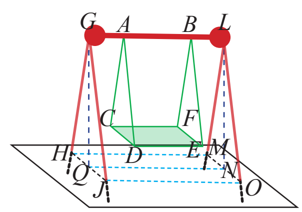
Tekintsük a d egyenest és a vele párhuzamos α *síkot!* Célunk, értelmezni a d és α *közötti távolság fogalmát.*

1. kijelentés. Ha A egy pont a d egyenesen, $d \parallel \alpha$, $AA_1 \perp \alpha$ és $A_1 \in \alpha$, akkor az AA_1 szakasz hossza állandó (nem függ az A pont megválasztásától a d egyenesen).



Bizonyítás. Felveszünk a d egyenesen egy A-tól különböző B pontot, és megszerkesztjük az $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$ merőlegeseket, $A_1 \in \alpha$, $B_1 \in \alpha$. Bebizonyítjuk, hogy az AA_1 és BB_1 szakaszok kongruensek.
Az AA_1 és BB_1 egyenesek merőlegesek ugyanarra a síkra, így $AA_1 \parallel BB_1$, tehát meghatároznak egy síkot, amely az α síkot a d egyenessel párhuzamos A_1B_1 egyenesben metszi. Következésképpen $AA_1 \parallel BB_1$ és $AB \parallel A_1B_1$, $AA_1 \perp A_1B_1$, tehát az AA_1B_1B négyszög egy téglalap és $AA_1 \equiv BB_1$.

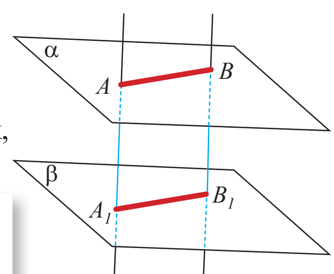
1. értelmezés. A d egyenes és a vele párhuzamos α sík távolsága egyenlő a d egyenes tetszőleges pontjának az α síktól mért távolságával. Jele: $d(d, \alpha)$.



PT *Gyakorlati tevékenység*. Tibor és András szeretne egy hintát építeni a mellékelt ábra alapján. Észreveszik, hogy az $ACDBFE$ és $GHJLMO$ két háromoldalú hasáb, és $AC = AD$, $GH = GJ$.

1. Melyek azok a szakaszok, amelyek hosszát ismerniük kell ahhoz, hogy kiszámíthassák az AB rúd távolságát a hintalap ($CDEF$) síkjától és a GL rúd távolságát a talaj ($HJOM$) síkjától?
2. Fejezzétek ki a CD, DE, EF, CF egyenesek távolságát a talajtól!
3. Próbáljátok meg kiszámítani a talaj síkja és a hintalap síkja közötti távolságot!

B. Párhuzamos síkok közötti távolság



A fenti gyakorlati tevékenység rámutat a párhuzamos síkok közötti távolság fogalmának szükségességére (a hintalap és a talaj síkja közötti távolság).
Ahogy a síkban két egyenes távolsága csak akkor értelmezett, ha azok párhuzamosak, a térben két sík távolsága csak a párhuzamos síkok esetén értelmezhető.

2. kijelentés. Ha két egyenes merőleges az α és β párhuzamos síkokra, melyeket A és A_1, illetve B és B_1-ben metszik, akkor $AA_1 \equiv BB_1$.

*Bizonyítás***.** Ha két egyenes merőleges ugyanarra a síkra, akkor párhuzamos egymással, tehát: $AA_1 \parallel BB_1$.
Másrészt, az (AA_1B_1B) sík párhuzamos egyenesek mentén metszi az α és β síkot, tehát $AB \parallel A_1B_1$. Tehát az AA_1B_1B négyszög szemben fekvő oldalai párhuzamosak, vagyis paralelogramma, és $AA_1 \equiv BB_1$.
Megjegyzés. Ez a kijelentés a következő tétel sajátos esete: *két párhuzamos sík az őket metsző párhuzamos egyeneseken kongruens szakaszokat határoz meg.*

1. alkalmazás. Egy szoba padlója és mennyezete az α, illetve β párhuzamos síkban helyezkedik el. A függőleges éle a padlóra merőleges d egyeneshez illeszkedik. Meg szeretnénk határozni a mennyezet egy pontjának *minimális távolságát* a padló egy pontjától, majd a két sík közötti távolságot.

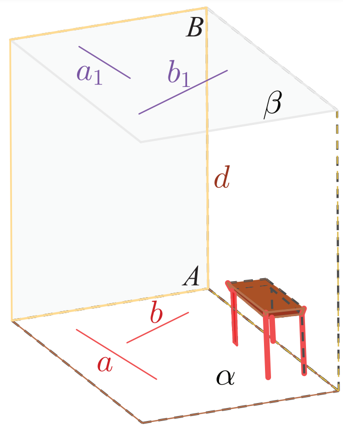
a) Igazoljátok, hogy $d \perp \beta$!

b) Azonosítsátok az alábbi ábrán a B pont távolságát a padlótól, és indokoljátok meg a választ!

c) Azonosítsátok az alábbi ábrán az A pont távolságát a mennyezettől, és indokoljátok meg a választ!

d) Hasonlítsátok össze a **b)** és **c)** pontban kapott eredményeket!

e) Milyen kapcsolat áll fenn az AB távolság és egy MN szakasz hossza között, ha M és N az α, illetve β sík egy-egy pontja?



Megoldás. α és β párhuzamos síkok, $d \perp \alpha$, $d \cap \alpha = \{A\}$, $d \cap \beta = \{B\}$.
a) Vegyük fel az α *síkban az* a *és* b metsző egyeneseket! Mivel $d \perp \alpha$, $a \subset \alpha$ és $b \subset \alpha$, következik, hogy $d \perp a$ és $d \perp b$. **(1)**
Az $\alpha \parallel \beta$, $a \subset \alpha$ és $b \subset \alpha$ feltételekből következik, hogy a és b párhuzamos a β síkkal, tehát létezik olyan a_1 és b_1 egyenes a β síkban, amely teljesíti az $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ feltételt. **(2)**
(1) és **(2)** alapján következik, hogy $d \perp a_1$ és $d \perp b_1$, tehát $d \perp (a_1, b_1) = \beta$.
b) $BA \perp \alpha$ és $A \in \alpha$, tehát $d(B, \alpha) = AB$. **c)** $AB \perp \beta$ és $B \in \beta$, tehát $d(A, \beta) = AB$. **d)** $d(B, \alpha) = d(A, \beta)$. **e)** Legyen $M \in \alpha$ és $N \in \beta$.
1. eset. Ha $MN \perp \alpha$, akkor a fenti eredmények alapján $MN = AB$.
2. eset. Ha $MN \not\perp \alpha$, akkor megszerkesztjük az $NP \perp \alpha$, $P \in \alpha$ szakaszt. Az MPN derékszögű háromszögben MN átfogó, továbbá $NP = AB$, tehát $MN > AB$.
Következtetések. 1. Egy síkra merőleges egyenes merőleges az első síkkal párhuzamos bármely síkra.
2. Két párhuzamos sík ugyanakkora szakaszt metsz ki bármely rájuk merőleges egyenesből.

2. értelmezés. Az α és β párhuzamos síkok távolsága egyenlő az egyik síkban található tetszőleges pontnak a másik síktól mért távolságával. Jelölés: $d(\alpha, \beta)$.

Megjegyzés. Ha $\alpha \parallel \beta$, akkor bármely $M \in \alpha$ és $N \in \beta$ pont esetén az MN szakasz hossza nagyobb a két sík távolságánál, vagy egyenlő vele. Utóbbi eset akkor és csakis akkor áll fenn, ha $MN \perp \alpha$.

Alkalmazások

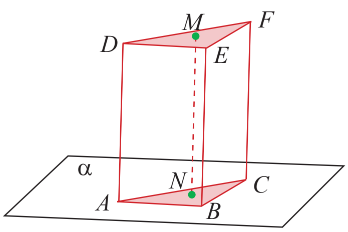
C. Hasáb magassága. Egyenes körhenger magassága

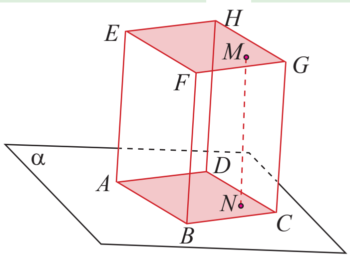
A hasáb alapjai párhuzamos síkokban elhelyezkedő kongruens sokszöglapok.

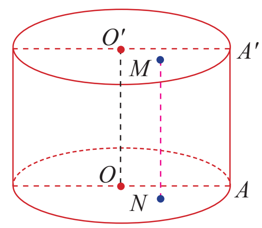
3. értelmezés. Egy hasáb két alapsíkja közötti távolságot a *hasáb magasságának* nevezzük.

Az egyenes körhenger alapjai párhuzamos síkokban elhelyezkedő kongruens körlapok.

4. értelmezés. Egy egyenes körhenger két alapsíkja közötti távolságot a *henger magasságának* nevezzük.





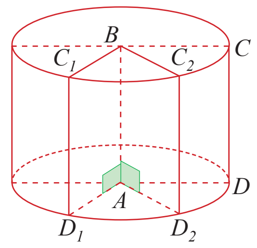


2. alkalmazás. Bizonyítsátok be, hogy egy egyenes hasáb minden oldaléle egyben a hasáb magassága is.

Megoldás. Válasszunk ki egy oldalélt! Az egyenes hasáb oldallapjai téglalapok. Minden oldalél derékszöget zár be a hozzá kapcsolódó alapélekkel. A kiválasztott oldalél merőleges mindkét alap síkjában található két-két egyenesre (a hozzá kapcsolódó alapélekre), tehát merőleges mindkét alapsíkra, így egyben a hasáb magassága is.
Következtetés. Egy egyenes hasáb magassága egyenlő a hasáb tetszőleges oldalélének hosszával.
A téglatest mindegyik lapja téglalap, tehát bármely lapját tekintjük alapnak, egyenes hasábot kapunk.

3. alkalmazás. Az $ABCD$ téglalapot az AB oldala körül megforgatva a képen látható egyenes körhengert kapjuk.

a) Bizonyítsátok be, hogy AB a henger magassága!
b) Bizonyítsátok be, hogy a henger bármely alkotója egyben a henger magassága is!



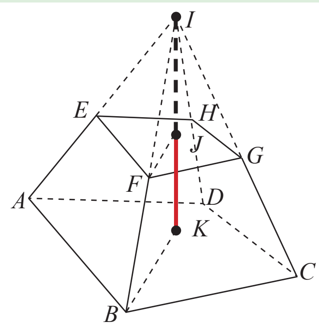
a) Az ABC_1D_1 és ABC_2D_2 téglalap különböző síkban található és a forgatás két pillanatát ábrázolja. A téglalapokban $AB \perp AD_1$ és $AB \perp AD_2$, tehát AB merőleges az alap síkjára (az A középpontú, AD sugarú körlapra). Mivel a két alapkör párhuzamos síkokban található, AB merőleges a B középpontú, BC sugarú körlapra is, tehát a henger magassága.
b) Ha CD tetszőleges alkotó, mivel *ABCD téglalap, következik, hogy* $CD \parallel AB$, tehát CD merőleges az alapokra, vagyis a henger magassága.
Következtetés. Egy egyenes körhenger magassága egyenlő az alapkörök középpontja által meghatározott szakasz hosszával.
Bármely alkotó szintén az egyenes körhenger magasságának tekinthető.

D. A csonka gúla magassága. Az egyenes csonka kúp magassága

A csonka gúla egy gúlából származik, amelyet egy, az alapjával párhuzamos síkkal metszettünk.
A csonka kúp egy kúpból származik, amelyet egy, az alapjával párhuzamos síkkal metszettünk.
A csonka gúla és a csonka kúp alapjai párhuzamos síkokban helyezkednek el.

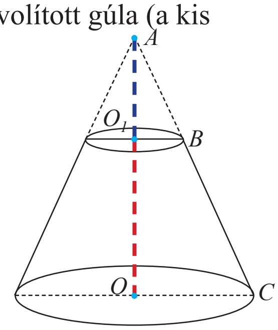
5. értelmezés. Egy csonka gúla két alapja közötti távolságot a csonka gúla magasságának nevezzük.
6. értelmezés. Egy csonka kúp két alapja közötti távolságot a csonka kúp magasságának nevezzük.

4. alkalmazás. Határozzátok meg annak a gúlának a magasságát, amelyből az $ABCDEFGH$ csonka gúla származik, ha a kisalap és a nagyalap aránya $\frac{1}{4}$, és a csonka gúla magassága: $JK = 12$ cm.



Megoldás. Jelöljük I-vel annak a gúlának a csúcsát, amelyből a csonka gúla származik. Rendre alkalmazzuk a hasonlóság alaptételét: $IAB\Delta \sim IEF\Delta$ és $IBK\Delta \sim IFJ\Delta$. Azt kapjuk, hogy $\frac{IK}{IK - IJ} = \frac{4}{3}$, ebből $\frac{IK}{JK} = \frac{4}{3}$, végül $IK = 16$ cm.
Megjegyzés. A csonka gúla magassága egyenlő az eredeti gúla (a nagy gúla) és az eltávolított gúla (a kis gúla) magasságának különbségével.

5. alkalmazás. Határozzátok meg a kúp magasságát, ha a belőle származó csonka kúp két alapkörének sugara $OC = 7$ cm és $O_1B = 3$ cm, és a csonka kúp magassága $OO_1 = 8$ cm.



Megoldás. A-val jelöljük a kúp csúcsát, és alkalmazzuk a hasonlóság alaptételét az (AOC) síkban: $AO_1B\Delta \sim AOC\Delta$, tehát $\frac{O_1B}{OC} = \frac{AO_1}{AO}$. Ebből következik, hogy $\frac{OC - O_1B}{OC} = \frac{AO - AO_1}{AO}$, tehát $\frac{4}{7} = \frac{8}{AO}$, végül $AO = 14$ cm.
Megjegyzés. A csonka kúp magassága egyenlő az eredeti kúp (a nagy kúp) és az eltávolított kúp (a kis kúp) magasságának különbségével.

Gyakorlatok és feladatok

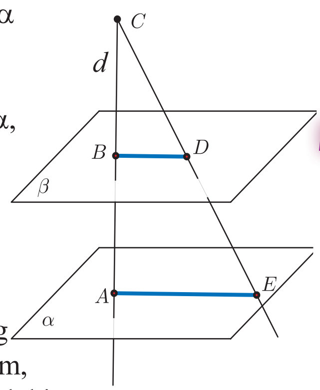
1. Adott az $ABCDMNPQ$ kocka.
a) Igazoljátok, hogy $AB \perp (ADM)$ és $AB \perp (BCN)$!
b) Ha $AN = 4\sqrt{2}$ cm, számítsátok ki az (ADM) és (BCN) síkok távolságát!

2. Állapítsátok meg az alábbi kijelentések logikai értékét!
a) Ha α és β két párhuzamos sík, akkor $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$.
b) Ha α és β két párhuzamos sík, és $d \perp \alpha$, akkor $d \perp \beta$.
c) Egy egyenes hasáb oldalélének hossza nagyobb, mint a hasáb magassága.
d) Ha $ABCDEFGH$ egy kocka, akkor $d((ABC), (EFG)) = d((ADH), (BCG))$.

3. Az $ABCDEFGH$ szabályos négyoldalú hasábban L, M, N és P rendre az AB, BC, CD, illetve DA él felezőpontja, Q, R, S, T pedig az EF, FG, GH, illetve HE él felezőpontja.
a) Ábrázoljátok a hasábot, és tüntessétek fel a felsorolt pontokat!
b) Igazoljátok, hogy az (LMQ) sík párhuzamos az (NPS) síkkal!
c) Számítsátok ki az (LMQ) és (NPS) síkok közötti távolságot, ha a hasáb alapélének hossza l!

4. Az $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ szabályos hatoldalú hasáb oldallapjai négyzetek és $AD = 24$ cm. Az alaplapokkal párhuzamos α *sík az AB'* szakaszt az M pontban metszi, és $AM = 2\sqrt{2}$ cm. Számítsátok ki az α sík által meghatározott hasábok magasságát!

5. A mellékelt ábrán $d \perp \alpha$, $\alpha \parallel \beta$, $d \cap \alpha = \{A\}$, $d \cap \beta = \{B\}$ *és* $C \in d$, $BC = 2{,}4$ cm. A C ponton átmenő másik egyenes a β síkot D-ben, az α síkot pedig E-ben metszi, $BD = 4$ cm, $AE = 10$ cm. Számítsátok ki az α és β síkok közötti távolságot!



6. Egy egyenes körkúp csúcsa A, az alapkör átmérője $BC = 36$ cm. Az ABC szög szögfelezője az AC egyenest D-ben metszi, és $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{5}{6}$.
a) Számítsátok ki a kúp magasságát!
b) A kúpot egy síkkal metsszük, amely tartalmazza a D pontot és párhuzamos a kúp alapsíkjával. Számítsátok ki annak a csonka kúpnak a magasságát, amely a metszés következtében jött létre!

7. Egy négyoldalún szabályos hasáb alapterülete $16\ \text{cm}^2$, és egyik oldallapjának területe $20\sqrt{2}\ \text{cm}^2$. Számítsátok ki a hasáb magasságát!

8. Az $ABCMNP$ egy háromoldalú egyenes hasáb AM, BN és CP élén rendre felvesszük a D, E, illetve F pontot úgy, hogy $AD = 3 \cdot DM$, $BN = 4 \cdot EN$ és $PF = 0{,}(3) \cdot CF$ teljesüljön.
a) Ábrázoljátok a hasábot, és emeljétek ki a (DEF) síkot!
b) Bizonyítsátok be, hogy $(DEF) \parallel (ABC) \parallel (MNP)$.
c) Igazoljátok, hogy $d((ABC), (DEF)) = 3 \cdot d((DEF), (MNP))$.

9. A $BCDELMNP$ téglatest alapja a $BCDE$ téglalap, $BC = 7$ cm, $BD = 25$ cm és $CN = 40$ cm. Számítsátok ki:
a) a téglatest BL magasságát;
b) az L pont távolságát a (PND) síktól.

10. Egy egyenes körhengerben AB és CD a két alap átmérője, AD alkotó, O és Q a két alapkör középpontja. Tudjuk, hogy $CO = 12$ cm és $COD\sphericalangle = u$. Számítsátok ki a henger magasságát, ha $u \in \{60°, 90°, 120°\}$.

11. A, B, C *és* D négy pont egy egyenes körhenger $C(O, r)$ alapkörén, AD az alapkör átmérője B *és* C az AD egyenes ugyanazon oldalán helyezkednek el, és $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{CD}$. AA', BB', CC' és DD' a henger alkotója.
a) Bizonyítsátok be, hogy $(ADD') \parallel (BCC')$!
b) Határozzátok meg a henger magasságát, tudva azt, hogy egyenlő az (ADD') és (BCC') síkok közötti távolsággal!

3.6. Merőleges síkok, átlós metszetek, tengelymetszetek

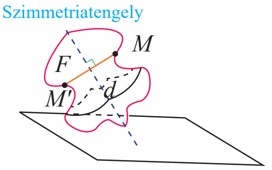
Emlékeztető

Ha a d egyenes merőleges az α síkra, és a d_1 egyenes párhuzamos d-vel, akkor d_1 merőleges α-ra.

Egy n-oldalú konvex sokszögben az átlók száma $\dfrac{n(n-3)}{2}$. Megjegyzés: $n \geq 4$.

Egyik csúcsból kiinduló átlók a sokszöget $n - 2$ háromszögre bontják.

Az M pont szimmetrikusa a d egyenesre nézve az M' pont, $MM' \perp d$ *és* $d(M,d) = d(M',d)$. M és M' különböző pontok.



A d egyenes az F alakzat szimmetriatengelye, ha az alakzat bármely M pontjának a d egyenesre nézve szimmetrikus pontja is az alakzathoz tartozik.

Fedezzük fel, értsük meg!

A környezetünkben számos síkszerű felszínnel találkozunk: az épületek homlokzata, a szoba falai, a szekrényajtó és sok egyéb felület rendszerint ilyen. Gyakran előfordul, hogy egy függőleges sík egy vízszintes síkkal metszi egymást. Ha egy egyenes a függőleges síkban helyezkedik el, és merőleges a két sík közös élére, akkor merőleges a vízszintes síkra is.[1]

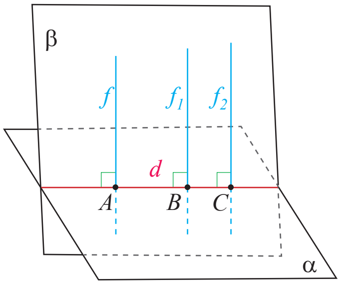
1. értelmezés. Azt mondjuk, hogy az α és β *sík merőleges egymásra*, ha metszi egymást a d egyenesben, és egy f egyenes, amely egyik síkban helyezkedik el úgy, hogy merőleges d-re, merőleges a másik síkra is.[1]

Matematikai jelekkel: $\alpha \perp \beta$, *ha létezik olyan* $f \subset \beta$, *amelyre igaz, hogy* $f \perp d$ és $f \perp \alpha$.

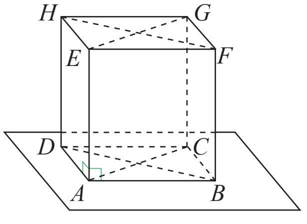
Megjegyzések. **1)** A β síkban elhelyezkedő f egyenes azon tulajdonsága, hogy merőleges α síkra, érvényes minden olyan egyenesre, amely a β síkban helyezkedik el, és merőleges a d egyenesre.

Bizonyítás. Ha f_1 a β síkban elhelyezkedő másik egyenes és $f_1 \perp d$, akkor $f_1 \parallel f$ és $f \perp \alpha$, *tehát* $f_1 \perp \alpha$.

2) Ha α egy sík, amely tartalmazza a d egyenest, amely merőleges a β síkra, akkor $\alpha \perp \beta$. Ez a kijelentés két sík merőlegességének leggyakrabban használt kritériuma.



Alkalmazás. Tekintsük az $ABCDEFGH$ téglatestet. Azonosítsátok az összes olyan síkot, amelyet két oldalél határoz meg, és bizonyítsátok be, hogy mindegyik merőleges az (ABC) síkra!



Megoldás. A téglatest minden oldallapja és alaplapja téglalap, tehát az AE oldalélre igaz, hogy: $AE \perp AB$ és $AE \perp AD$, vagyis $AE \perp (ABCD)$. A *2. megjegyzés* alapján $(ABFE) \perp (ABCD)$, $(ADHE) \perp (ABCD)$, $(AEGC) \perp (ABCD)$. Mivel $BF \parallel AE \parallel DH$ és $AE \perp (ABCD)$, következik, hogy $BF \perp (ABCD)$ és $DH \perp (ABCD)$.

[1] A merőleges síkok klasszikus értelmezését néhány leckével később fogjuk megadni.

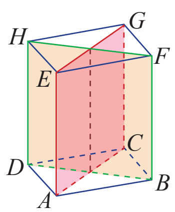
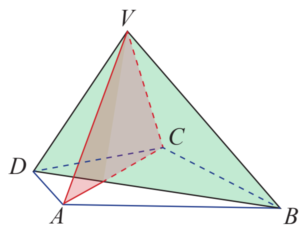
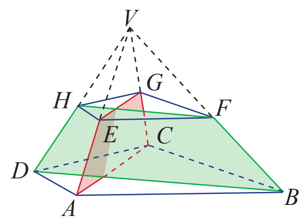
A $(DBFH)$, $(BCGF)$ és $(DCGH)$ sík mindegyike tartalmazza ezen merőleges egyenesek közül valamelyiket, amiből következik, hogy merőlegesek az $(ABCD)$ síkra. Végeredményben a téglatest oldaléleinek segítségével hat olyan síkot találtunk, amelyek merőlegesek az $(ABCD)$ alapsíkra.

A. Átlós metszetek

A fenti **alkalmazás** bizonyítása során találkoztunk két olyan síkkal, amely tartalmazza az alapok egy-egy átlóját és két oldalélet.

2. értelmezés. Egy mértani testben (hasábban, gúlában, csonka gúlában), melynek alapja legalább négyoldalú sokszög, az alapsokszög egyik átlója és valamely oldalél által meghatározott síkmetszetet *átlós metszetnek* nevezzük.

Azonosítjuk a jellegzetes elemeket az alábbi példákon, négyoldalú alapsokszögek esetében.

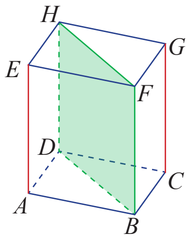
Hasáb	Gúla	Csonka gúla
		
1) Egy átlós metszet tartalmaz: **a)** két oldalélet, amelyek különböző oldallapokhoz tartoznak; **b)** két alapátlót, mindkét alaplapból egyet-egyet. **2.** Egyenes hasábban az átlós metszet síkja merőleges az alapsíkokra.	**1)** Egy átlós metszet tartalmaz: **a)** két oldalélet, amelyek különböző oldallapokhoz tartoznak; **b)** egy alapátlót és a gúla csúcsát.	**1)** Egy átlós metszet tartalmaz: **a)** két oldalélet, amelyek különböző oldallapokhoz tartoznak; **b)** két alapátlót, mindkét alaplapból egyet-egyet. **2.** A csonka gúla átlós metszetének síkja azonos a gúla átlós metszetének síkjával, amelyből a csonka gúla származik.

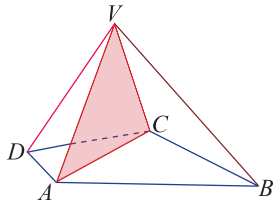
Megjegyzés. **a)** Ha az alap n-oldalú, $n \geq 4$, akkor az átlós metszetek száma $\dfrac{n(n-3)}{2}$.
b) Egy átlós metszet nem tartalmazhat egyetlen alapélet sem.

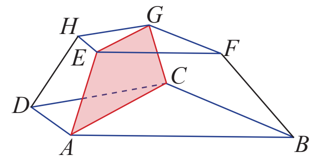
Feladat a portfólióba

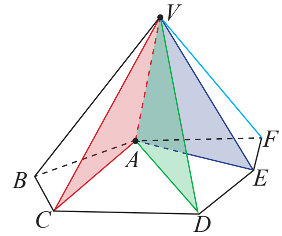
Tekintsük az *ABCDEFGH* téglatestet!
a) Ábrázoljátok a téglatestet, kiemelve az átlós metszeteket!
b) Szemléltessétek ábrán, hogy mindegyik átlós metszet háromoldalú egyenes hasábokra bontja a téglatestet!
c) Bizonyítsátok be, hogy a téglatest két átlós metszete kongruens egymással!
d) A téglatest alapjának az *ABFE* téglalapot tekintve, oldjátok újra az előző alpontokat!

Észrevétel. Az eddig tanulmányozott n-oldalú alappal rendelkező poliédereket a közös élet tartalmazó átlós metszetek $n-2$ mértani testre bontják fel. Ezek alapjai háromszögek.









Ha $n = 4$, az átlós metszet az eredeti mértani testet két testre bontja. Mindkettő alapja háromszög.
Ha $n = 6$, akkor egy oldalélhez 3 átlós metszet tartozik, amelyek mentén a poliéder négy testre bontható; mindegyik alapja háromszög.

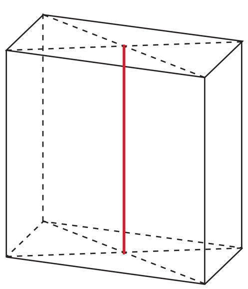
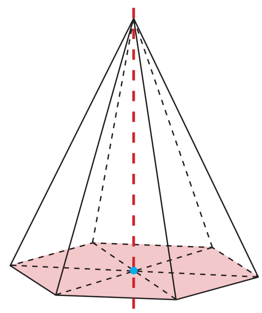
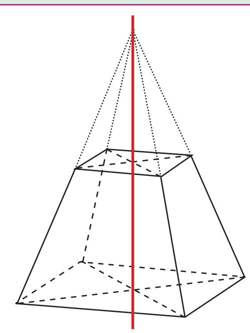
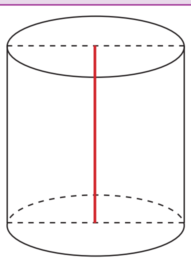
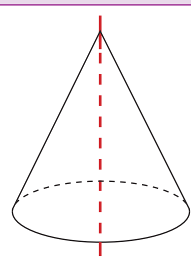
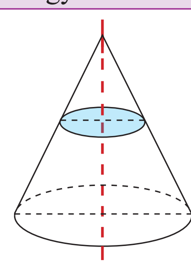
B. Tengelymetszetek

Ha egy mértani test rendelkezik szimmetriatengellyel, akkor:

1) A mértani test felszínén található bármely pont szimmetrikusa a szimmetriatengelyre nézve, szintén a mértani test felszínén található.

2) A mértani test belsejében található bármely pont szimmetrikusa a szimmetriatengelyre nézve, szintén a mértani test belsejében található

Az alábbi testek rendelkeznek szimmetriatengellyel:

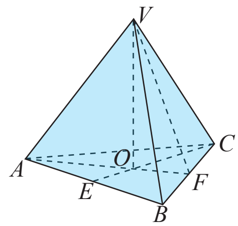
A téglatest és az n-oldalú szabályos hasáb, ha n páros	Az n-oldalú szabályos gúla, ha n páros	Az n-oldalú szabályos csonka gúla, ha n páros
		
A szimmetriatengely az alaplapok középpontját összekötő egyenes.	A szimmetriatengely a csúcsot az alaplap középpontjával összekötő egyenes.	A szimmetriatengely az alaplapok középpontját összekötő egyenes.
		
Az egyenes körhenger	Az egyenes körkúp	Az egyenes csonka körkúp

Alkalmazások

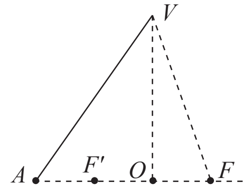
Észrevétel. Egy mértani test szimmetriatengelye merőleges a test alapjára.

1. alkalmazás. Igazoljátok, hogy egy háromoldalú szabályos gúla csúcsa és az alap középpontja által meghatározott egyenes nem szimmetriatengelye a gúlának.

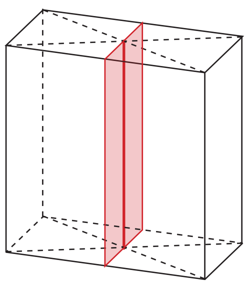
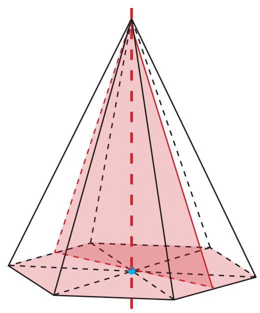
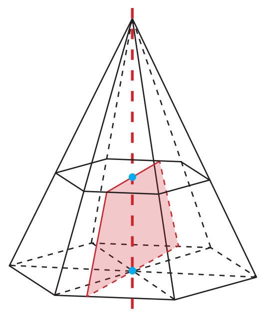
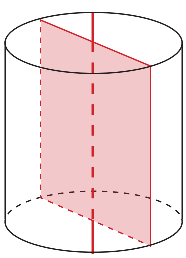
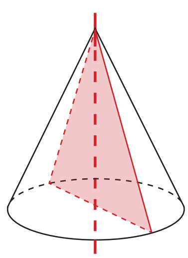
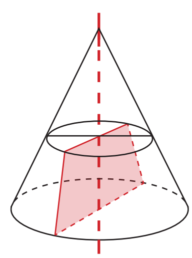
Bizonyítás. Jelöljük $VABC$-vel a gúlát, és O-val az alapjának középpontját! Bebizonyítjuk, hogy VO nem szimmetriatengely. Tekintsük az AO és a BC egyenes F metszéspontját!



Elegendő bebizonyítani, hogy F szimmetrikusa a VO-ra nézve nem található a gúla felszínén. **A** VO egyenes a gúla magassága, tehát $VO \perp (ABC)$, ebből következik, hogy $VO \perp AO$. Az F pont szimmetrikusa VO-ra nézve F', ez a pont az AO szakasz felezőpntja, tehát nem található a gúla felszínén.



Értelmezés. Egy mértani test szimmetriatengelyét tartalmazó sík által meghatározott metszetet *tengelymetszetnek* nevezzük.

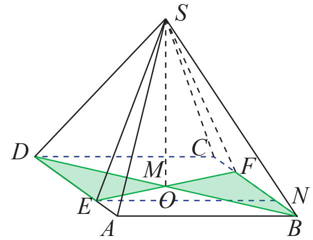
A téglatest és az n-oldalú szabályos hasáb, ha n páros	Az n-oldalú szabályos gúla, ha n páros	Az n-oldalú szabályos csonka gúla, ha n páros
		
Téglalap	Egyenlő szárú háromszög	Egyenlőszárú trapéz
		
Az egyenes körhenger	Az egyenes körkúp	Az egyenes csonka körkúp

2. alkalmazás. Az $SABCD$ négyoldalú szabályos gúla AD és BC oldalélein felvesszük az E, illetve F pontot. Tudjuk, hogy $AB = 8$ cm, $AE = 2$ cm, $BF = 6$ cm.

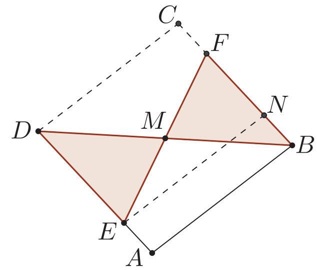
a) Igazoljátok, hogy az SEF háromszöglap a gúla egyik tengelymetszete!

b) Bizonyítsátok be, hogy $(SEF) \perp (ABC)$!

c) Tudva azt, hogy az SEF háromszög területe $32\sqrt{5}$ cm², számítsátok ki a gúla magasságát!



Megoldás: **a)** $ABCD$ négyzet, tehát $AD = AB = 8$ cm és $DE = AD - AE = 6$ cm. Jelöljük M-mel az EF és BD egyenes metszéspontját: $EF \cap BD = \{M\}$! Mivel $EDM\sphericalangle \equiv FBM\sphericalangle = 45^\circ$, $DE \equiv BF$ és $DEM\sphericalangle \equiv BFM\sphericalangle$ (belső váltószögek), következik, hogy $DEM\Delta \equiv BFM\Delta$ (SZ.O.SZ.). Következik, hogy $DM \equiv BM$ és $EM \equiv FM$, tehát az M pont egybeesik az O ponttal, a gúla alapjának középpontjával.



Az (SEF) sík tartalmazza a gúla SO magasságvonalát, ami egyben a gúla szimmetriatengelye is, tehát az SEF háromszöglap a gúla egy tengelymetszete.

b) SO az (SEF) síkban található, és $SO \perp (ABC)$, tehát $(SEF) \perp (ABC)$.

c) Legyen $EN \perp BC$, $N \in BC$. Az $ABNE$ téglalapban $EN = AB = 8$ cm és $BN = AE = 2$ cm.
Az EFN háromszögben $EN = 8$ cm, $NF = BF - BN = 4$ cm, $ENF\sphericalangle = 90^\circ$, és Pitagorasz-tétel alapján $EF = 4\sqrt{5}$ cm. $T_{SEF} = 32\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{EF \cdot SO}{2} = 32\sqrt{5}$, és ebből kiszámítható, hogy SO = 16 cm.

Feladat a portfólióba

Szemléltessétek alkalmas geometriai oktatóprogram (például Geogebra) segítségével az alábbi kijelentések érvényességét!

1. A tengelymetszet az alapra merőleges síkban található, és tartalmazza az alap középpontját.

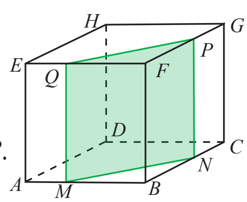
2. Ha egy mértani testnek van szimmetriatengelye akkor létezik végtelenül sok tengelymetszete.

3. A henger, a kúp és a csonka kúp összes tengelymetszete kongruens egymással.

Gyakorlatok és feladatok

1. Rajzoljatok egy négyoldalú szabályos hasábot és szemléltessetek rajta egy átlós metszetet! Tudva azt, hogy az átlós metszet egy olyan négyzet, amelynek átlója $8\sqrt{2}$ cm, határozzátok meg a hasáb méreteit!

2. Az $ABCDEFGH$ kockában $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in FG$, $Q \in EF$ és $AM = CN = EQ = GP = \dfrac{1}{3} \cdot AB$.



Tudva azt, hogy $T_{MNPQ} = 24\sqrt{2}$ cm², határozzátok meg a hasáb átlós metszetének területét!

3. Az $ABCDEFGH$ téglatestben $AB = 10$ cm, $AD = 6\sqrt{3}$ cm, az AG és BH egyenesek hajlásszöge 60°. Számítsátok ki az $ACGE$ négyszög kerületét!

4. Az $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ szabályos hatoldalú hasáb alapéle 4 cm, és $AD' = 16$ cm. Számítsátok ki az összes olyan átlós metszet területét, amely tartalmazza az AA' élet!

5. Az $ABCDEFGH$ négyoldalú szabályos hasábban az $ACGE$ négyszög kerülete 24 cm, és ctg $EDF\sphericalangle = 3$.

a) Határozzátok meg a hasáb magasságát!

b) Számítsátok ki a $BDHF$ négyszög területét!

6. Az $ABCDMNPQ$ kockában E, F, G és H rendre az AD, BC, NP, illetve MQ él felezőpontja.

a) Döntsétek el, hogy az $EFGH$ négyszöglap a kocka tengelymetszete-e?

b) Ha $AG = 6$ cm, számítsátok ki az $EFGH$ tengelymetszet területét!

7. A $VABCD$ szabályos négyoldalú gúla VA élének felezőpontja P, és a VPC háromszög területe 24 cm^2. Számítsátok ki a VBD háromszög területét!

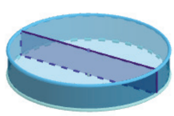
8. A $VABCD$ négyoldalú szabályos gúla magassága VO, és $OE \perp VA$, $E \in VA$. Ha az átlós metszet területe 8 cm^2, és az ACV háromszög derékszögű, számítsátok ki a BEO háromszög területét!

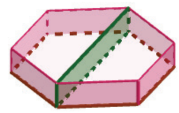
9. Az $ABCDMNPR$ szabályos négyoldalú csonka gúla alapjainak középpontja O, illetve Q. Az AD, és BC él felezőpontja E, illetve F, a QEF háromszög egyenlő oldalú, és kerülete 48 cm. Tudva azt, hogy $MN = 12$ cm, számítsátok ki:
a) a csonka gúla átlós metszetének területét;
b) annak a gúlának a magasságát, amelyből a csonka gúla származik!

10. **a)** Rajzoljatok egy $ABCDEFGH$ négyoldalú szabályos hasábot és tekintsétek azt a tengelymetszetét, amely a CG oldalélet tartalmazza!
b) Tudva azt, hogy a metszet négyzetlap, és területe 72 cm^2, határozzátok meg az alapél hosszát és a hasáb magasságát!

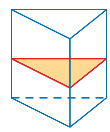
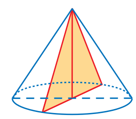
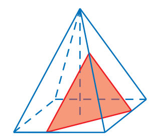
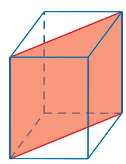
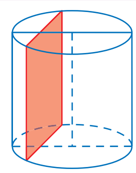
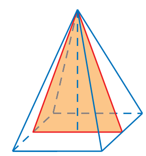
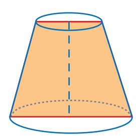
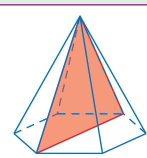
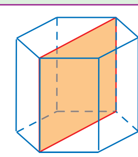
11. $ABCD$ egy egyenes körhenger tengelymetszete, AB az alapkör átmérője, O az alapkör középpontja, és $OC = 8$ cm. Mekkora a henger sugara és alkotója, ha $CDO\sphericalangle = 60°$?

12. A VAB háromszöglap egy kúp tengelymetszete, és $VA = VB = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$. Határozzátok meg a kúp alapkörének sugarát, ha a VAB háromszög kerülete $2 \cdot (2 + \sqrt{2})$ cm.

13. 
Egy delfinárium medencéje egyenes körhenger alakú. Hogy több előadást lehessen tartani, a medencét két egyenlő részre osztották egy téglalap alakú fallal, melynek területe 300 m^2. Tudjuk, hogy a henger alapkörének sugara 15 m. Milyen mély a medence?

14. 
Egy kereskedelmi társaság egy szabályos hatoldalú területen működik. Az árbevétel növelése céljából a terület felére mozitermet építenek. A válaszfal 6 m magas, és területe 324 m^2. (Lásd az ábrát!) Számítsátok ki a cég által használt terület méretét, és fejezzétek ki azt hektárban!

15. **a)** Vizsgáljátok az alábbi, mértani testeket ábrázoló rajzokat, és válasszátok ki azokat, amelyek átlós metszetet tartalmaznak!

a) Szabályos háromoldalú hasáb	**b)** Egyenes körkúp	**c)** Négyoldalú szabályos gúla
		
d) Négyoldalú szabályos hasáb	**e)** Egyenes körhenger	**f)** Négyoldalú szabályos gúla
		
g) Egyenes csonka kúp	**h)** Szabályos hatoldalú gúla	**i)** Szabályos hatoldalú hasáb
		

b) Válasszátok ki a fenti ábrákból azokat, amelyek tengelymetszetet tartalmaznak!
c) Rajzoljátok le az **a)** és **b)** alpontban kiválasztott testeket a metszettel együtt!
d) Határozzátok meg a **c)** alpontban lerajzolt testek közük azokat, amelyek egyidejűleg átlós- és tengelymetszetet tartalmaznak!

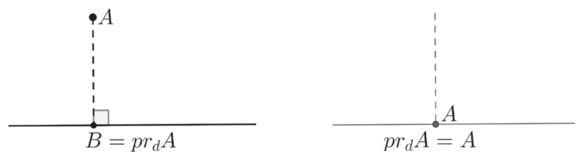
5. Merőleges vetületek a térben

1.ℓ. Pont, szakasz és egyenes vetülete a síkra

Sir Isac Newtonról (1642-1727) kering az az anekdota, mely szerint egy almafa alatt pihent, amikor a fejére esett egy érett alma, ennek a történésnek a hatására fogalmazta volna meg a tömegvonzás törvényét.
A Newton almájának történetét mértani síkra terelve tekintsük az almafa alatti területet egy vízszintes síknak, a leeső alma irányát függőlegesnek, egyben *merőlegesnek a talaj síkjára*.
Leegyszerűsítve ennek megfelelően, az alma az A kiindulópontból érkezik merőlegesen a talaj α síkjára, és a B pontban ér földet, ahol az A-ból húzott merőleges metszi a síkot.

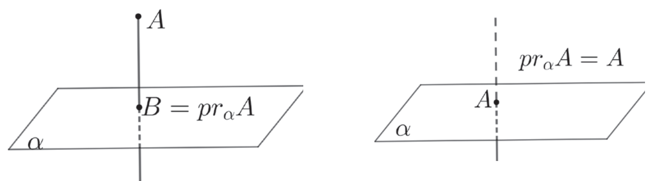
Fedezzük fel, értsük meg!

1. értelmezés. Az A ponton átmenő, d egyenesre merőleges egyenes metszéspontját a d egyenessel az A pont d egyenesre eső *merőleges vetületének* nevezzük. Jelölés: $B = pr_d\, A$.



Ha $A \in d$, akkor $pr_d A = A$.

2. értelmezés. Az A ponton átmenő, α síkra merőleges egyenes metszéspontját a α síkkal az A pont α síkra eső *merőleges vetületének* nevezzük. Jelölés: $B = pr_\alpha A$.



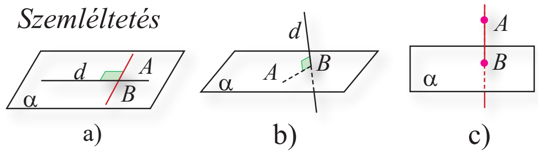
Ha $A \in \alpha$, akkor $pr_\alpha A = A$.

Megjegyzések. **1)** Egyszerűség kedvéért a *merőleges vetület* helyett rendszerint csak *vetületet* mondunk.
2) Egy pont *térmértani* vetülete egy egyenesre ugyanazt jelenti, mint az adott pont síkmértani *vetülete* ugyanarra az egyenesre, a pont és az egyenes által meghatározott síkban.
3) Egy pont vetülete egy egyenesre vagy egy síkra szintén egy pont, amely az adott egyenesen vagy az adott síkban található.
4) A fenti ábrákon az AB szakaszra csak a vetület megszerkesztése miatt van szükség.

1. alkalmazás

a) Az α sík d egyenesén rögzítünk egy B pontot. Melyek azok az A pontok az α síkban, amelyekre igaz, hogy $B = pr_d A$?
b) A tér egy d egyenesén rögzítünk egy B pontot. Melyek azok az A pontok a térben, amelyekre igaz, hogy $B = pr_d A$?
c) Az α síkban rögzítünk egy B pontot. Melyek azok az A pontok a térben, amelyekre igaz, hogy $B = pr_\alpha A$?

Szemléltetés

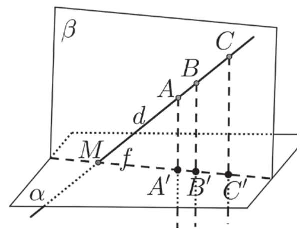


Megoldás.
a) A B pontban a d egyenesre emelt merőleges egyenes minden pontja teljesíti a feltételt.
b) A B pontot tartalmazó, d-re merőleges α sík bármely A pontja teljesíti a kért feltételt: mivel $d \perp \alpha$ és $AB \subset \alpha$, következik, hogy $AB \perp d$, tehát $B = pr_d A$. Mindazon pontok, amelyeknek a d egyenesre eső vetülete a rögzített B pontban van a d egyenesre merőleges, B pontot tartalmazó síkban helyezkednek el.
c) A B pontban az α síkra állított merőleges egyenes minden pontja teljesíti a feltételt, mert ezen egyenes bármely pontjának az α *síkra eső vetülete a* B pont.

2. alkalmazás. Tanulmányozzátok a digitális tankönyv alapján egy pontnak a tetraéder lapjainak síkjaira eső vetületét!

3. alkalmazás. a) Ha A, B és C kollineáris pontok, akkor az α síkra eső vetületük is három kollineáris pont.

b) Ha $A'=pr_\alpha A$, $B'=pr_\alpha B$ és $C'=pr_\alpha C$, akkor $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$.



Megoldás. **a)** Ha $A, B, C \in d$, $d \not\subset \alpha$, $d \cap \alpha = \{M\}$, jelöljük β-val az $(AA'M)$ síkot és f-fel az α és β sík metszésvonalát: $f = \alpha \cap \beta$.
$AA' \perp \alpha$, $BB' \perp \alpha$ és $CC' \perp \alpha$, ebből következik: $AA' \parallel BB' \parallel CC'$.
Mivel $B \in d$, $d \subset \beta$, $AA' \subset \beta$ és $AA' \parallel BB'$, következik, hogy $BB' \subset \beta$, tehát $B' \in \alpha \cap \beta$.
Hasonlóan igazolható, hogy $C' \in \alpha \cap \beta$. Végeredményben $A', B', C' \in \alpha \cap \beta$, tehát kollineárisak.

b) A β síkban párhuzamos egyenesek két egyenesen arányos szakaszokat határoznak meg: $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$.

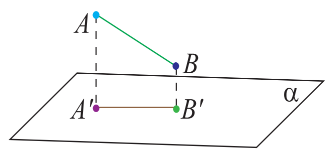
Következmények. **1)** Egy szakasz felezőpontjának vetülete egy síkra a szakasz vetületének felezőpontjába esik.
2) Ha B az AC szakasz egy pontja, akkor B' az $A'C'$szakasz egy pontja.
A mértani alakzatok ponthalmazok: beszélhetünk egy ponthalmaz vetületéről egy egyenesre vagy egy síkra.

3. értelmezés. Egy F alakzat minden pontját az α síkra vetítjük. Az így kapott pontok halmazát az F alakzat α *síkra eső vetületének nevezzük.*

1. tétel. Legyen AB egy szakasz, α egy sík, és $A' = pr_\alpha A$, $B' = pr_\alpha B$.

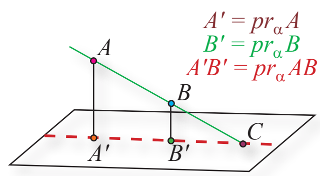
1) Ha $AB \not\perp \alpha$, akkor az AB szakasz α síkra eső vetülete az $A'B'$ szakasz.
2) Ha $AB \perp \alpha$, akkor az AB szakasz α síkra eső vetülete az A' pont.

Bizonyítás. Ha $AB \not\perp \alpha$, akkor három eset lehetséges:



a) Ha $AB \subset \alpha$, akkor az AB szakasz minden pontjának vetülete önmaga, tehát $pr_\alpha AB = AB$, és a vetület hossza egyenlő a vetített szakasz hosszával.
b) Ha $AB \parallel \alpha$, akkor $AA' \parallel BB'$, és $ABB'A'$ egy paralelogramma (mi több: téglalap!), tehát $AB = A'B'$.
c) Ha $AB \not\subset \alpha$ és $AB \nparallel \alpha$, akkor elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor a szakasz nem metszi az α *síkot. Az* $ABB'A'$ derékszögű trapézban AB és $A'B'$ a nem párhuzamos oldalak, és $AB > A'B'$. ($A'B'$ a trapéz magassága). Abban az esetben, ha az AB szakasz metszi a síkot, az $A\,A'BB'$ trapéz keletkezik, amelyben AB egy átló, és hosszabb, mint a trapéz $A'B'$ magassága.
Ha $AB \perp \alpha$, akkor a vetület egy pont, A' és B' egybeesik, és az állítás nyilvánvalóan igaz: $AB > A'B'$.

2. tétel. Egy egyenes vetülete egy síkra egy egyenes vagy egy pont.

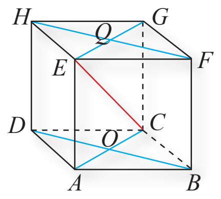


Bizonyítás. Legyen AB az egyenes és α a sík, $A' = pr_\alpha A$, $B' = pr_\alpha B$.
1) Ha $AB \not\perp \alpha$, $A' = pr_\alpha A$ és $B' = pr_\alpha B$, akkor A' különbözik B'-től. Kollineáris pontok vetülete is kollineáris, következik, hogy az AB egyenes vetülete az α *síkra az* $A'\,B'$ egyenes.
2) Ha $AB \perp \alpha$, akkor $pr_\alpha AB = \{A'\} = \{B'\}$, tehát a vetület egy pont. *Következmény*. Ha $AB \cap \alpha = \{C\}$, akkor $C \in A'B' = pr_\alpha AB$. (A metszéspont a vetületen található.)

Alkalmazás

4. alkalmazás. $ABCDEFGH$ kocka, az alaplapok középpontja O, illetve Q. Egészítsétek ki a táblázatot a szakaszok síkra eső vetületével. Az α sor és MN oszlop találkozásához beírjuk a $pr_{\alpha}MN$ vetületnek megfelelő szakaszt.

Ezt a szakaszt vetítjük / Erre a síkra vetítjük	CE	DH	HB
(ABC)	AC		
(ABE)			
(DBF)			



Útmutatás. Meghatározzuk a CE szakasz vetületét az (ABC) síkra. $C \in (ABC)$, tehát C vetülete önmaga. $E \notin (ABC)$ és $EA \perp (ABC)$, tehát E vetülete az (ABC) síkra az A pont. Következésképpen a CE szakasz vetülete az (ABC) síkra az AC szakasz. Tehát a táblázatba, az (ABC) sík sorának és a CE szakasz oszlopának a találkozásához beírjuk, hogy AC. (Lásd a modellt.)

Gyakorlatok és feladatok

1. A d egyenes párhuzamos az α síkkal, és $g = pr_{\alpha}d$. Bizonyítsatok be, hogy g párhuzamos d-vel!

2. Az AB szakasz az α síkkal párhuzamos egyenesen található, és a vetülete az α síkra $A'B'$. Az P pont az AB szakaszon helyezkedik el, $AP = 2 \cdot PB$, és $Q = pr_{\alpha}P$.

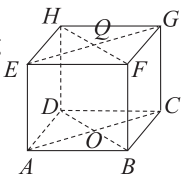
a) Bizonyítsátok be, hogy a Q pont az $A'B'$ szakaszon található!

b) Számítsátok ki a $\dfrac{QB'}{A'B'}$ arány értékét!

3. Ha α egy sík, $A \in \alpha$ és $B \notin \alpha$, $AB = 8\sqrt{2}$ cm, a B pont α síkra eső vetülete C és $AC \equiv BC$, számítsátok ki az AB szakasz α síkra eső vetületének hosszát!

4. Az ABC egyenlő oldalú háromszög oldala $AB = 20$ cm, BM és CN a háromszög két magassága, $M \in AC$, $N \in AB$. A háromszög BC oldala az α síkban található. Mekkora az MN szakasz α síkra eső vetülete?

5. A melléket ábrán egy kocka látható, O és Q az $ABCD$, illetve $EFGH$ alap középpontja. Határozzátok meg a következő vetületeket:



a) $pr_{AD}C,\ pr_{EF}B$;

b) $pr_{(ABC)}A,\ pr_{(EFG)}D$;

c) $pr_{(ABC)}Q,\ pr_{(EFG)}O$;

d) $pr_{(ABC)}AE,\ pr_{(BCF)}AE$;

e) $pr_{(ABC)}AG,\ pr_{(BCF)}EC$;

f) $pr_{(ADE)}OA,\ pr_{(ADE)}AB,\ pr_{(ADE)}BG$!

6. Az A, B, C, D pontok nem egy síkban helyezkednek el, és $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$.

a) Bizonyítsátok be, hogy $AD \perp (ABC)$

b) Határozzátok meg a BD és CD szakasz vetületét az (ABC) síkra!

c) Állapítsátok meg a következő kijelentések logikai értékét:

c_1) a BC szakasz vetülete az (ABD) síkra az AB szakasz;

c_2) a BD szakasz vetülete az (ACD) síkra a CD szakasz;

c_3) az AD szakasz vetülete az (ABC) síkra az A pont.

7. Az A, B és C három különböző, kollineáris pont, ezek vetülete a β síkra is három különböző pont: A', B és C'.

a) Igazoljátok, hogy $B \in \beta$ és A', B, C' kollineárisak!

b) Bizonyítsátok be, hogy $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B}{BC'}$.

c) Ha $A'C' = 25$ cm és $\dfrac{T_{ABA'}}{T_{BCC'}} = \dfrac{9}{4}$, számítsátok ki az $A'B$ és BC' szakasz hosszát!

8. A DEF háromszög az ABC általános háromszög vetülete az α síkra. Az ABC háromszög súlypontját G-vel jelöljük. Bizonyítsátok be, hogy a G pont vetülete az α síkra egybeesik a DEF háromszög súlypontjával!

2.6. Egyenes és sík hajlásszöge. Szakasz vetületének hossza

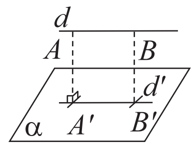
Fedezzük fel, értsük meg!

Kérdések. Legyen d egy tetszőleges egyenes a térben, α egy sík, és a egy egyenes az α síkban.
A következő kérdések merülnek fel: **1)** Hogyan határozzuk meg a d és az a egyenes hajlásszögét?
2) Az α *sík mely egyenese zárja* be a d-vel a legkisebb szöget?
Megoldás. Ha $d \subset \alpha$, akkor a és d ugyanabban a síkban helyezkedik el. A minimális szög mértéke 0°, ezt akkor kapjuk, ha $a = d$ vagy $a \parallel d$. Ha $d \perp \alpha$, akkor $d \perp a$ bármely $a \subset \alpha$ esetén, tehát a d egyenes 90°-os szöget zár be az α *sík minden egyenesével.* Ha d metszi a síkot, és $d \not\perp \alpha$, akkor a d és a egyenes hajlásszögét így határozzuk meg:
– párhuzamost húzunk a d egyenes és az α *sík metszéspontján át az* a egyenessel;
– d és a hajlásszöge egyenlő a d egyenes és a párhuzamos által bezárt szöggel.
A d és a egyenes hajlásszöge 0° és 90° között változik.Be lehet bizonyítani, hogy a d egyenes az α sík egyenesei közül a saját vetületével zárja be a legkisebb szöget.

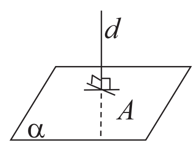
1. *értelmezés.* A d egyenes és az α sík hajlásszöge egyenlő a d egyenes és a síkra eső vetülete által bezárt szöggel. ($d \not\perp \alpha$ és $d \nparallel \alpha$)

Megállapodás

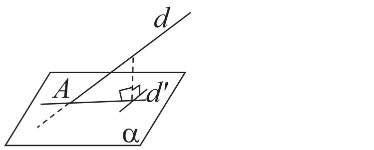
1) Ha $d \parallel \alpha$, akkor $(d, \alpha)\sphericalangle = 0^\circ$.



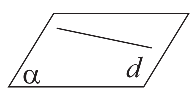
2) Ha $d \perp \alpha$, akkor $(d, \alpha)\sphericalangle = 90^\circ$.



Ha d metszi a síkot, és $d \not\perp \alpha$, akkor $(d, \alpha)\sphericalangle = (d, d')\sphericalangle (d' = pr_\alpha d)$

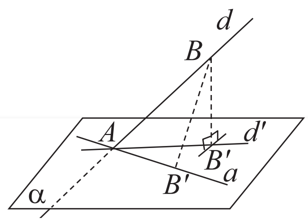


Ha $d \subset \alpha$, akkor $(d, \alpha)\sphericalangle = 0^\circ$.



Megjegyzés. Ha d tetszőleges egyenes és α tetszőleges sík a térben, akkor $0 \le (d, \alpha)\sphericalangle \le 90^\circ$.

1. alkalmazás. Ha d egy egyenes a térben, és a az α sík tetszőleges egyenese, akkor $(d, \alpha)\sphericalangle \le (d, a)\sphericalangle$.

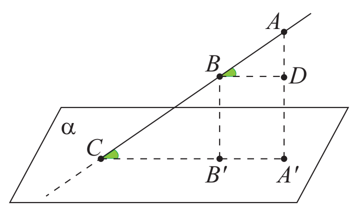


A bizonyítás megtalálható a digitális tankönyvben.

Az előzőek során bebizonyítottuk, hogy egy szakasz valamely síkra eső vetületének hossza legfeljebb a szakasz hosszával lehet egyenlő. Az alábbi eredmény alkalmas arra, hogy kiszámítsuk egy szakasz valamely síkra eső vetületének hosszát.

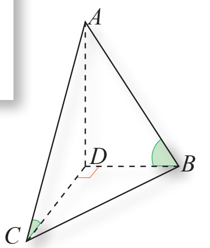
1. *kijelentés.* Az AB szakasz α síkra eső vetületének hosszát megkapjuk, ha megszorozzuk a szakasz hosszát a tartóegyenese és az α sík hajlásszögének koszinuszával.

Bizonyítás. Jelöljük C-vel az AB egyenes és az α sík metszéspontját és $A'B'$-tel az AB szakasz vetületét az α síkra! Megszerkesztjük az (ACA') síkot, a B ponton keresztül párhuzamost húzunk $A'B'$-hez és D-vel jelöljük ennek metszéspontját AA'-tel. Az így létrejött $BB'A'D$ négyszög téglalap, és $BD = A'B'$. Az AB egyenes és az α sík hajlásszöge $ACA'\sphericalangle \equiv ABD\sphericalangle$ (megfelelő szögek), és az ABD derékszögű háromszögben $\cos(ABD\sphericalangle) = \dfrac{BD}{AB}$, tehát $BD = AB \cdot \cos(ABD\sphericalangle)$, vagyis $A'B' = AB \cdot \cos(ACA'\sphericalangle)$.A kijelentés igaz akkor is, ha $AB \parallel \alpha$ vagy $AB \perp \alpha$.



Alkalmazások

2. alkalmazás. Az ABC háromszög vetülete az α *síkra a* DBC háromszög, amelyben $DB = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm és $BDC\sphericalangle = 90°$. Határozzátok meg az α *sík* hajlásszögét az AB, illetve AC egyenessel!



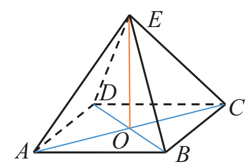
Megoldás. A BCD háromszög derékszögű ($BDC\sphericalangle = 90°$), $DB = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm, ebből Pitagorasz-tétellel következik, hogy $CD = 6$ cm. A feltétel szerint $A \notin \alpha$, $pr_\alpha A = D$, $pr_\alpha B = B$, $pr_\alpha C = C$, tehát $pr_\alpha AB = DB$ és $pr_\alpha AC = DC$. Értelmezés szerint $(AB,\alpha)\sphericalangle = (AB,DB)\sphericalangle = ABD\sphericalangle$ és $(AC,\alpha)\sphericalangle = (AC,DC)\sphericalangle = ACD\sphericalangle$

Mivel $AD \perp \alpha$, DB, $DC \subset \alpha$, következik, hogy $AD \perp DB$ és $AD \perp DC$, tehát az ADB és ADC háromszög derékszögű. Az ADB háromszögben $ADB\sphericalangle = 90^\circ$, $\operatorname{tg} ABD\sphericalangle = \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{6}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, tehát $ABD\sphericalangle = (AB,\alpha)\sphericalangle = 60^\circ$.

Az ADC háromszögben $ADC\sphericalangle = 90^\circ$, $AD = DC = 6$ cm, tehát $ACD\sphericalangle = (AC,\alpha)\sphericalangle = 45^\circ$.

3. alkalmazás. Az $ABCD$ rombuszban $BD = 12$ cm és E a rombusz síkján kívül fekvő pont. $EA = EC = 12$ cm, $EB = ED$, és EA hajlásszöge a rombusz síkjával 30°.

a) Számítsátok ki az EA szakasz vetületét a rombusz síkjára!
b) Számítsátok ki az EA szakasz vetületét az (EBD) síkra!
c) Számítsátok ki az EB egyenes hajlásszögét az (ABC) síkkal!



Megoldás. Jelöljük O-val a rombusz átlóinak metszéspontját! EO az EAC és EBD egyenlő szárú háromszög oldalfelező egyenese, tehát magasságvonala is. Így $EO \perp AC$ és $EO \perp BD$, tehát $EO \perp (ABC)$, és $pr_{(ABC)}AE = AO$, $pr_{(ABC)}EB = BO$, következésképpen $(AE, (ABC))\sphericalangle = EAO\sphericalangle$, és $(BE, (ABC))\sphericalangle = EBO\sphericalangle$.

a) $(AE, (ABC))\sphericalangle = 30^\circ$, következik, hogy $AO = AE \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm.

b) A rombusz átlói merőlegesek egymásra, tehát $AO \perp BD$. Kimutattuk, hogy $EO \perp (ABCD)$, és mivel AO az $(ABCD)$ síkban fekszik, $EO \perp AO$. Következik, hogy $AO \perp (EBD)$ (merőleges a sík két metsző egyenesére). Végeredményben $pr_{(EBD)}EA = EO$.

c) Az EOA háromszög derékszögű és az EO befogóval szemben fekvő szög 30°-os, tehát $EO = 6$ cm (az átfogó fele). Bebizonyítottuk, hogy $pr_{(ABC)}EB = BO$, ebből következik, hogy $(BE, (ABC))\sphericalangle = EBO\sphericalangle$.
Az EOB derékszögű háromszög befogói $BO = EO = 6$ cm, tehát $EBO\sphericalangle = 45^\circ$.

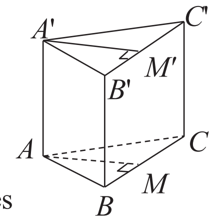
Feladat a portfólióba

1. Bizonyítsátok be, hogy nincs olyan szabályos hatoldalú gúla, amelynek minden oldallapja egyenlő oldalú háromszög!
2. **a)** Határozzátok meg egy a élű szabályos tetraéder egyik oldaléle és az alaplap hajlásszögének koszinuszát, az *1. kijelentés* alapján!
   b) Határozzátok meg egy szabályos négyoldalú gúla egyik oldaléle és az alaplap hajlásszögének koszinuszát, ha az oldallapok egyenlő oldalú háromszögek és az élek hossza a!

Gyakorlatok és feladatok

1. Rajzoljátok le az $ABCDEFGH$ téglatestet, és nevezzétek meg:
a) az AF egyenes vetületét a (BCF) síkra, és azt a szöget, amelyet az AF egyenes a (BCF) síkkal zár be;
b) a BH egyenes vetületét az (ACD) síkra, és azt a szöget, amelyet az BH egyenes az (ACD) síkkal zár be;
c) a CE egyenes vetületét az (ADE) síkra, és azt a szöget, amelyet az CE egyenes az (ADE) síkkal zár be!

2. Az $ABCA'B'C'$ szabályos háromoldalú hasábban $AB = AA'$, $AM \perp BC$ és $A'M' \perp B'C'$.

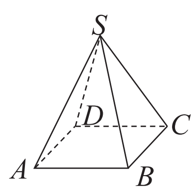


a) Nevezzétek meg azt a szöget, amelyet az AC' egyenes a (BCC') síkkal zár be!
b) Határozzátok meg az $A'B$ egyenes és az (ABM) sík hajlásszögét!
c) Számítsátok ki a $(AM, (BCC'))\sphericalangle$ és $(BM, (AMM'))\sphericalangle$ hajlásszöget!
d) Bizonyítsátok be, hogy $(AC', (ABC))\sphericalangle \equiv (A'B, (A'B'C'))\sphericalangle$!

3. Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatestben $AB = BC = 9\sqrt{2}$ cm és $AC' = 12\sqrt{3}$ cm.
a) Bizonyítsátok be, hogy $AC' = 2 \cdot AA'$.
b) Számítsátok ki az AC' egyenes és az (ABC) sík hajlásszögét!

4. Az ABC derékszögű háromszögben $BAC\sphericalangle = 90°$. A háromszög síkjára, ugyanazon az oldalon a BB' és CC' merőleges szakaszt állítjuk. Tudjuk, hogy az (ABC) síkkal $B'A$ és $C'A$ hajlásszöge $60°$, illetve $45°$, $B'B = 3\sqrt{3}$ cm, és $C'C = 2$ cm. Számítsátok ki:
a) az AB' és AC' szakasz vetületének hosszát az ABC háromszög síkjára;
b) az ABC háromszög területét!

5. Az $SABCD$ gúla minden élének hossza 6 cm.

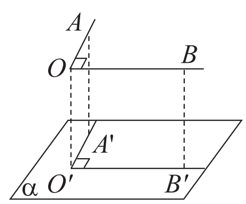


a) Határozzátok meg a következő vetületeket: $pr_{(ABC)}S$, $pr_{(ABC)}SA$ és $pr_{(ABC)}SB$!
b) Számítsátok ki az SAC háromszög szögeinek mértékét!
c) Bizonyítsátok be, hogy $DB \perp (SAC)$!
d) Számítsátok ki a következő hajlásszögeket: $(SA, (ABC))\sphericalangle$ és $(SB, (SAC))\sphericalangle$!

6. Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle = 90°$, $AB = AC = 4\sqrt{3}$ cm, és N a BC szakasz felezőpontja. A háromszög síkjára a $TA = 2\sqrt{2}$ cm merőlegest emeljük.
a) Bizonyítsátok be, hogy $BC \perp (ANT)$!
b) Számítsátok ki a következő lapszögeket: $(AT, (ABC))\sphericalangle$, $(AT, (ANT))\sphericalangle$, $(AB, (ANT))\sphericalangle$, $(NT, (ABC))\sphericalangle$.

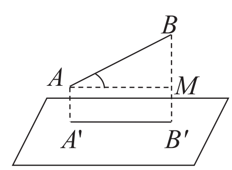
7. Az AM és DN egyenes merőleges az $ABCDEF$ szabályos hatszög síkjára. M és N a hatszög síkjának különböző oldalán helyezkedik el, és $AM = DN = AB = a$.
a) Készítsetek a feltételeknek megfelelő ábrát!
b) Bizonyítsátok be, hogy M, A, N és D egy paralelogramma csúcsai.
c) Határozzátok meg a következő hajlásszögek mértékét: $(MN, (ABC))\sphericalangle$, $(MA, (ABC))\sphericalangle$ és $(AD, (BCE))\sphericalangle$!

8. Az AOB derékszög vetülete az α síkra az $A'O'B'$ derékszög. Tudjuk, hogy $OA \nparallel \alpha$. Bizonyítsátok be, hogy:



a) $O'A' \perp (OB'O')$;
b) $OB \perp (O'A', OA)$;
c) $OB \parallel \alpha$!

9. Az AB egyenes és az α sík hajlásszöge $30°$. Az AB szakasz vetülete az α síkra $A'B' = 24$ cm. Számítsátok ki:



a) az AB szakasz hosszát;
b) az AB szakasz vetületének hosszát a BB' egyenesre!

10. Az ABC derékszögű háromszög síkjára az átfogó M középpontjába merőlegest állítunk, és felvesszük rajta az N pontot. Tudva azt, hogy $AB = AC = 6\sqrt{2}$ cm és $MN = 8$ cm, számítsátok ki:
a) az AN szakasz (BCN) síkra eső vetületének hosszát;
b) az AC szakasz (AMN) síkra eső vetületének hosszát!

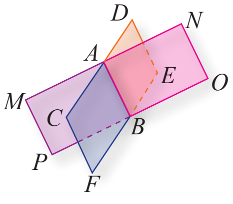
3.6. Lapszög, lapszöghöz tartozó síkszög, két sík hajlásszöge, merőleges síkok

Emlékeztető

Egy síkban, adott egyenes ugyanazon oldalán található pontok halmazát félsíknak nevezzük. Ha a d egyenes az α *síkban található, akkor két félsíkot határoz meg.*

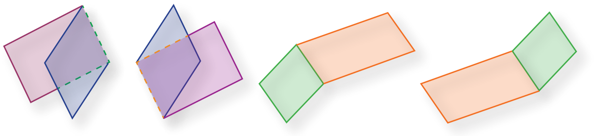
A térmértan az egyik legyakrabban használt *matematikai modell.* Nézzétek a képeken látható házakat, és figyeljétek a síkkal azonosítható felületeket a falakon és háztetőkön!

Tremészetesen vetődik fel a következő kérdés: hogyan jellemezhető a síkok egymáshoz viszonyított dőlése (hajlása), beszélhetünk-e két sík szögéről?
Az ábrákon a megjelölt síkok páronként egy-egy közös egyenesben metszik egymást.
Tekintsünk két síkot, amely az AB egyenesben metszi egymást. Az AB egyenes a síkokat két-két félsíkra osztja.
Így létrejön a térmértan egyik alapvető alakzata, amely két, közös *határegyenessel* rendelkező, de különböző síkokban található félsíkból áll.
Lásd a mellékelt ábrát!

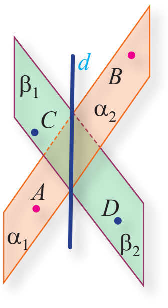


1. értelmezés. A két, közös határegyenessel rendelkező félsíkból álló mértani alakzatot lapszögnek nevezzük.

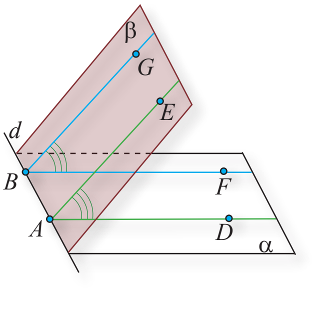
A lapszöget alkotó félsíkok közös határegyenesét a lapszög *élének* nevezzük, a félsíkokat pedig a lapszög *lapjainak*.



Megjegyzés. Ha az α síkban tekintjük a $d \subset \alpha$ egyenest, és A *és* B a sík két pontja a d egyenes két oldalán, (vagyis az AB szakasz metszi a d egyenest, jelöljük α_1-gyel a d egyenes által határolt, A pontot tartalmazó félsíkot és α_2-vel a d egyenes által határolt, B pontot tartalmazó félsíkot. Jelölés: $\alpha_1 = (d, A$ és $\alpha_2 = (d, B$. Kiemeljük ezáltal a félsík határegyenesét és egy pontját, amely nem a határegyenesen található.
Példa. Az α és β sík a d egyenesben metszi egymást és létrehozzák ezáltal az α_1 és α_2, illetve β_1 *és* β_2 félsíkokat. Ezek párosával lapszögeket alkotnak. Tehát a α és β metsző sík négy lapszöget határoz meg. Ezek: $(\alpha_1, \beta_1)\sphericalangle$, $(\alpha_1, \beta_2)\sphericalangle$, $(\alpha_2, \beta_1)\sphericalangle$ és $(\alpha_2, \beta_2)\sphericalangle$.

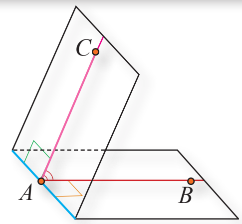


1. kijelentés. Az $(\alpha_1, \beta_1)\sphericalangle$ lapszög d élén felvesszük az A és B pontot.
A két ponton át a d egyenesre merőleges síkokat fektetünk: $\gamma_1 \perp d$ és $\gamma_2 \perp d$.
A lapszög lapjait a γ_1 sík az AD, illetve AE *félegyenesben, a* γ_2 *sík pedig a* BF, illetve BG félegyenesben metszi.
A megadott feltételek között $DAE\sphericalangle \equiv FBG\sphericalangle$.
Bizonyítás. Ha $\gamma_1 \perp d$ és $\gamma_2 \perp d$, akkor $\gamma_1 \parallel \gamma_2$.
A γ_1 és γ_2 párhuzamos síkokat az α_1 sík párhuzamos egyenesek mentén metszi: $AD \parallel BF$. Hasonlóan β_1 is, tehát $AE \parallel BG$. Következésképpen $DAE\sphericalangle$ és $FBG\sphericalangle$ párhuzamos szárú szögek, tehát kongruensek egymással.



2. értelmezés. Egy *lapszöghöz tartozó síkszögnek* nevezzük azt a szöget, amelyet a lapszög lapjai a lapszög élére merőleges síkkal történő metszésekor kapunk.
3. értelmezés. Egy lapszög mértéke egyenlő a hozzá tartozó síkszög mértékével.

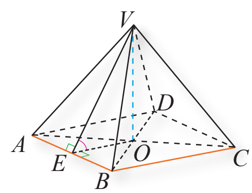
Megjegyzések. **1)** Az 1. kijelentés szerint egy lapszöghöz tartozó síkszög mértéke nem függ annak a pontnak a megválasztásától, amelyen keresztül a lapszög élére a merőleges síkot fektetjük.



2) A lapszöghöz tartozó síkszög szárai merőlegesek a lapszög élére.
A fenti észrevétel lehetőséget nyújt arra, hogy a lapszöghöz tartozó síkszöget a következő algoritmus szerint szerkesszük meg:
a) választunk a lapszög élén egy alkalmas pontot;
b) a lapszög mindkét lapján a választott pontból a lapszög élére merőleges félegyenest szerkesztünk;
c) a két félegyenes által meghatározott szög a lapszöghöz tartozó síkszög.

1. alkalmazás. a) Szerkesszétek meg egy szabályos négyoldalú gúla alaplaplapja és oldallapjai által meghatározott lapszögekhez tartozó síkszögeket! **b)** Számítsátok ki a lapszögek mértékét, ha a gúla magassága egyenlő az alapél felével!

Megoldás. **a)** Az $(AB, C$ **és** $(AB, V$ félsíkok által meghatározott lapszöghöz vegyük fel az AB oldal E felezőpontját! Az ABV **és** ABO háromszög egyenlő szárú, ebből következik, hogy $VE \perp AB$ *és* $EO \perp AB$, tehát a lapszöghöz tartozó síkszög a $VEO\sphericalangle$.



b) A feltétel szerint $VO = \frac{1}{2} AB$, az $ABCD$ négyzetben $OE = \frac{1}{2} AB$ (a négyzet apotémája).
$VOE\Delta$ derékszögű O-ban ($VE \perp EO$), befogói kongruensek, tehát $VEO\sphericalangle = 45^\circ$.
Ha α és β *két metsző sík, és* $\alpha \cap \beta = d$, akkor értelmezhetjük az általuk meghatározott hajlásszöget:

4. értelmezés. Két nempárhuzamos sík hajlásszöge egyenlő az általuk meghatározott lapszögekhez tartozó kisebbik síkszög mértékével.

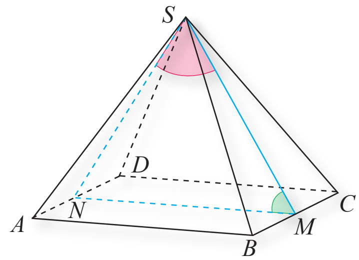
Megjegyzés. Két metsző sík négy lapszöget határoz meg, ezek mértéke páronként egyenlő. A közös félsíkkal rendelkező lapszögek mértéke egymást 180°-ra egészítik ki.
Két párhuzamos sík hajlásszöge megegyezés szerint 0°.
Korábban értelmeztük két sík merőlegességének fogalmát: két metsző egyenes merőleges egymásra, ha az egyik sík tartalmaz egy olyan egyenest, amely merőleges a másik síkra. Ebből következik, hogy két merőleges síkhoz 90°-os síkszög tartozik, tehát két merőleges sík hajlásszöge 90°.
Következmény. Két sík hajlásszöge a $[0^\circ, 90^\circ]$ intervallumban található.
Fentiek alapján két sík merőlegessége így is értelmezhető:

5. értelmezés. Két sík merőleges egymásra, ha az általuk meghatározott valamely lapszög mértéke 90°.

Megjegyzés. Az alábbi eredmények két sík merőlegességének azonnali következményei, számos feladat megoldása közben hasznukat vesszük.
1. Két merőleges sík merőleges egymásra, ha az általuk meghatározott lapszögek derékszögek.
2. Ha egy sík tartalmaz egy egyenest, amely merőleges egy másik síkra, akkor a két sík merőleges egymásra.
3. Ha két sík merőleges egymásra, és az egyikükben található valamely egyenes merőleges a két sík metszésvonalára, akkor ez az egyenes merőleges a másik síkra.
4. Ha két sík merőleges egymásra, és az egyikükben található valamely ponton át a másik síkra merőleges egyenest szerkesztünk, akkor ez az egyenes az első síkban fekszik.

MINITESZT Az alábbi feladatokban egyetlen válasz helyes! Válaszd ki a helyes választ!

1. Az $SABCD$ szabályos gúlában M **és** N a BC, illetve AD él felezőpontja.



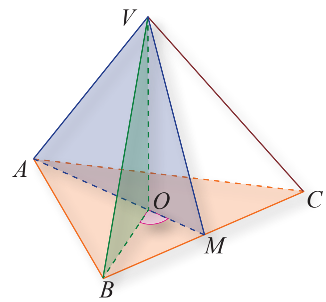
a) Az ábrán pirossal jelölt lapszöget alkotó síkok:

A. (SAD) és (SAB)	B. (SAD) és (SBC)	C. (SAD) és (SCD)

b) Az ábrán pirossal jelölt lapszöget alkotó síkok:

A. (SBC) és (SCD)	B. (SBC) és (SAB)	C. (SBC) és (ABD)

2. A $VABC$ szabályos gúlában VO magasságvonal és $AO \cap BC = \{M\}$.



a) Az $(OV, M$ és $(VO, B$ félsík által meghatározott lapszöghöz tartozó síkszög:

A. $VOA\sphericalangle$	B. $VOB\sphericalangle$	C. $BOM\sphericalangle$

b) A $(BC, A$ és $(BC, V$ félsík által meghatározott lapszöghöz tartozó síkszög:

A. $VBA\sphericalangle$	B. $VMA\sphericalangle$	C. $VCA\sphericalangle$

c) A (VOA) és (VOB) síkok hajlásszöge:

A. 60°	B. 90°	C. 120°

Gyakorlatok és feladatok

1. Rajzoljatok a füzetbe egy $ABCDEF$ szabályos háromoldalú hasábot.

a) Azonosítsátok azokat a lapszögeket, amelyeket a $(BCFE)$ lap az $(ACFD)$ lappal, illetve az $(ABED)$ lap a $(BCFE)$ lappal alkot!

b) Jelöljetek meg a rajzon az előző pontban azonosított lapszögekhez egy-egy hozzátartozó síkszöget!

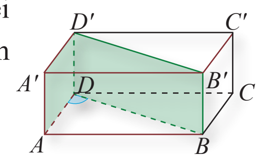
2. **a)** Ábrázoljátok a különböző síkokban fekvő $ABCD$ és $CDEF$ téglalapot és azonosítsatok egy olyan síkszöget, amely az általuk meghatározott lapszöghöz tartozik!

b) Mekkora a két téglalap síkjának hajlásszöge, ha az ADE háromszög egyenlő szárú?

3. Számítsátok ki az $ABCDEFGH$ kockában a következő síkpárok hajlásszögét:

a) $(ABCD)$ és $(BCGF)$ **b)** (ABE) és (ADH)
c) (ADH) és (EFG) **d)** (ABG) és (ABH)
e) (ABD) és (ADF) **f)** (ACG) és (BDF)

4. Egy téglatest méretei $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm és $AA' = 2\sqrt{3}$ cm.



a) Nevezzétek meg a $(DD', A$ és (DD', B) félsík lapszögéhez tartozó két síkszöget!

b) Számítsátok ki a $(DD'A)$ és $(DD'B)$ síkok hajlásszögét!

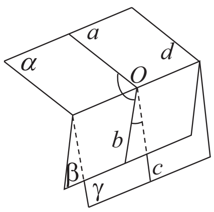
5. Az $SABCD$ szabályos négyoldalú gúla alapéle 10 cm, oldaléle $5\sqrt{5}$ cm.

a) Azonosítsátok azokat a lapszögeket, amelyeket az SBC lap az $ABCD$ lappal, az SAD lap az $ABCD$ lappal, illetve az SBC az SAD lappal alkot!

b) Számítsátok ki az (SAD) és (ABC) sík lapszögét!

d) Számítsátok ki az (SAD) és (SBC) sík lapszögét!

6. A mellékelt ábrán az (α, β) lapszöghöz tartozó síkszög az $(a, b)\sphericalangle$, a (β, γ) lapszöghöz tartozó síkszög $(b, c)\sphericalangle$, és tudjuk, hogy $(a, b)\sphericalangle \leq 90°$ és $(b, c)\sphericalangle \leq 90°$.



a) Bizonyítsátok be, hogy az a, b és c félegyenes egy síkban található!

b) Bizonyítsátok be, hogy az (α, γ) lapszög mértéke egyenlő az (α, β) és (β, γ) lapszög mértékének összegével!

7. Az $ABCD$ szabályos tetraéder élhossza a.

a) Készítsetek ábrát, és emeljétek ki az ABC és BCD lap által alkotott lapszöget!

b) Bizonyítsátok be, hogy egy szabályos tetraéder bármely két lapjának hajlásszöge ugyanakkora.

c) Határozzátok meg az (ABC) és (BCD) sík hajlásszögének koszinuszát!

8. Az $ABCDEF$ szabályos hasáb alapéle 36 cm.

a) Bizonyítsátok be, hogy $DB = DC$

c) Számítsátok ki a hasáb magasságát, ha a (DBC) és (ABC) síkok hajlásszöge 60°!

9. Az $ABCDEF$ szabályos háromoldalú hasábban $AB = 18$ cm és $AD = 9$ cm. Számítsátok ki a (DBC) és (ABC) sík hajlásszögét!

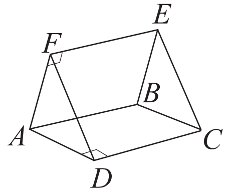
10. Az $ABCA'B'C'$ szabályos háromoldalú hasáb alapéle 16 cm, DE az ABC háromszög középvonala, ($D \in AB$, $E \in AC$), és az ($A'DE$) és (ABC) síkok hajlásszöge 60°.

a) Rajzoljátok le a hasábot, és tüntessétek fel az ($A'DE$) síkot!

b) Igazoljátok, hogy $AA' = 12$ cm!

c) Számítsátok ki az ($A'DE$) és ($B'C'ED$) síkok hajlásszögét!

11. Az $ABCD$ és $ABEF$ négyzet különböző síkokban helyezkedik el és 70°-os lapszöget alkot.



a) Jelöljétek meg a lapszöghöz tartozó valamely síkszöget!

b) Készítsetek ábrát, és jelöljétek meg az (ABC) és (DCE) síkok szögét!

c) Számítsátok ki az (ABC) és (DCE) síkok hajlásszögét!

12. Az $ABCD$ négyzet és az $ABMN$ derékszögű trapéz 30°-os lapszöget alkot; $AB \parallel MN$, $BAN\sphericalangle = 90°$. Tudjuk, hogy $AB = AN = 12$ cm. Határozzátok meg:

a) az (ABC) és (CDN) síkok hajlásszögét;

b) az (ABN) és (CDM) síkok hajlásszögét!

13. Az $ABPM$ és $ABQN$ négyzet 60°-os lapszöget határoz meg.

a) Bizonyítsátok be, hogy $AMNBPQ$ szabályos hasáb, és minden éle egyforma.

b) Számítsátok ki az (APQ) és (BPQ) síkok hajlásszögének tangensét!

14. $VABCD$ szabályos négyoldalú gúla, minden oldallapja egyenlő oldalú háromszög, és $AB = 24$ cm. Számítsátok ki:

a) az (ABC) és (VBC) síkok hajlásszögének koszinuszát;

b) a (VAC) és (VBC) síkok hajlásszögének szinuszát!

15. Rajzoljatok egy $ABCDEFGH$ kockát! Bizonyítsátok be a lapszöghöz tartozó síkszög mértéke alapján, hogy:

a) $(ABC) \perp (BCF)$;

b) $(ADH) \perp (CDG)$;

c) $(ACG) \perp (BDF)$!

16. A PAB egyenlő oldalú háromszög és a QAB egyenlő szárú, derékszögű háromszög ($AQB\sphericalangle = 90^{\circ}$) különböző síkokban helyezkedik el, és $AB = PQ = 30$ cm. Jelöljük M-mel az AB oldal felezőpontját!

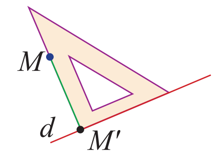
a) Számítsátok ki a PMQ szög mértékét!

b) Bizonyítsátok be, hogy $(PAB) \perp (QAB)$!

6. A három merőleges tétele

1.*l*. A három merőleges tétele, pont távolsága egyenestől

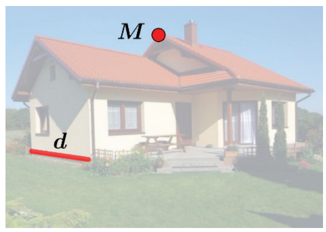
Fedezzük fel, értsük meg!



A síkban egy pontból egy egyenesre derékszögű vonalzó segítségével szerkeszthető merőleges. Ez a szerkesztés csak akkor végezhető el, ha a pont távolsága az egyenestől nem nagyobb, mint a vonalzó hosszabbik befogója.

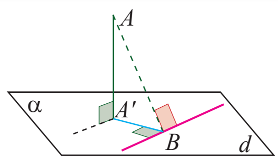
A térben ez a feladat bonyolultabb: olykor a síkot, amelyben a merőleges talppontját keressük, nehéz meghatározni, máskor a távolságok nagyok. Ha például egy építkezésnél kell meghatározni azt a merőlegest, amelyet a háztető egy pontjából az alapot határoló egyenesre bocsátunk, nem áll rendelkezésünkre elég nagyméretű eszköz.

A *három merőleges tétele* segít ilyenkor, megfelelően alkalmazva kiszámítható egy pont távolsága egy egyenestől a térben.



A három merőleges tétele. Adott az α sík, az $A \notin \alpha$ pont és a $d \subset \alpha$ egyenes. Ha $AA' \perp \alpha$, $A' \in \alpha$ *és* $A'B \perp d$, $B \in d$, akkor $AB \perp d$.

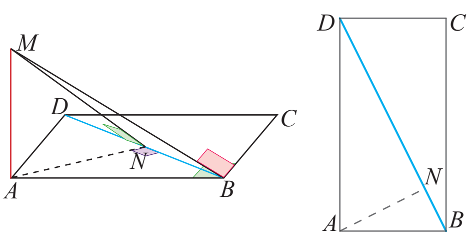
Bizonyítás. $AA' \perp \alpha$, tehát AA' merőleges az α síkban fekvő minden egyenesre. *Így* $AA' \perp d$, vagyis $d \perp AA'$. Másrészt $d \perp A'B$, tehát d merőleges az AA' és $A'B$ egyenesre, következésképpen az általuk meghatározott síkra is: $d \perp (A'AB)$. Mivel $AB \subset (A'AB)$, következik, hogy $d \perp AB$.



Alkalmazások

1. alkalmazás. Az $ABCD$ oldalai. $AB = 5$, $AD = 12$. A téglalap síkjára az A pontban AM merőlegest emelünk, $AM = 12$.

a) Számítsátok ki az M pont távolságát a BC oldaltól!
b) Szerkesszetek merőlegest az M pontból a BD átlóra!
c) Számítsátok ki az M pont távolságát a BD átlótól.



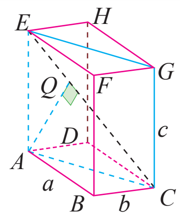
Megoldás. **a)** A feltétel szerint $MA \perp (ABCD)$, $AB \perp BC$ és $BC \subset (ABCD)$. A három merőleges tétele alapján $MB \perp BC$. Következésképpen $d(M, BC) = MB$. Az ABM derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel segítségével kiszámítható: $MB = \sqrt{AM^2 + AB^2} = 13$.
b) A-ból merőlegest szerkesztünk BD-re: $AN \perp BD$, $N \in BD$. Teljesülnek a három merőleges tételének feltételei: $MA \perp (ABCD)$, $AN \perp BD$ és $BD \subset (ABCD)$, tehát következik, hogy $MN \perp BD$.

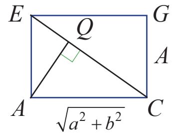
c) Az ABD derékszögű háromszögben az A-ból húzott magasság: $AN = \dfrac{AB \cdot AD}{BD}$. Pitagorasz-tétellel kiszámítható az átfogó: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 13$. Így a háromszög magassága: $AN = \dfrac{60}{13}$.

Az AMN derékszögű háromszögben $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2 +} = \dfrac{12}{13}\sqrt{194}$.

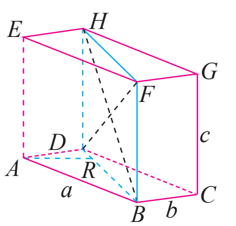
2. alkalmazás. Az $ABCDEFGH$ téglatest élei: $AB = a$, $BC = b$ *és* $AE = c$. Számítsátok ki az A csúcs távolságát a téglatest átlóitól!

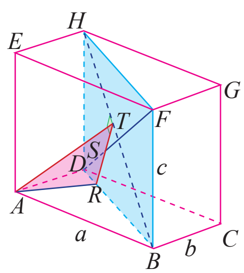
Megoldás. A téglatest átlói: AG, BH, DF és EC.
Érdekel az A csúcs távolága a BH, DF és EC átlóktól.
A téglatest EC átlója egyben az $ACGE$ téglalap átlója is. A téglalap oldalai:
$EA = c$ és $AC = \sqrt{a^2+b^2}$.
Az AEC háromszög derékszögű, és $d(A, EC) = \dfrac{c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

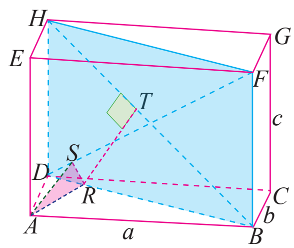


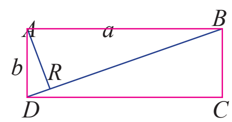


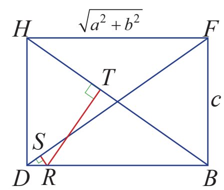
Az A pont távolsága a DF és BH egyenesektől a *három merőleges tétele* alapján számítható ki.
DF és BH a $(DBFH)$ átlós metszetben található.
$HD \perp (ABCD)$ és $HD \subset (DBFH)$, tehát $(DBFH) \perp (ABCD)$, és DB a két sík metszésvonala.
Ezért az A pontból a BD egyenesre húzott AR merőleges a $(DBFH)$ síkra is merőleges: $AR \perp (DBFH)$.
Meghúzzuk az $RT \perp BH$, $T \in BH$ egyenest. Mivel $AR \perp (DBFH)$, $BH \subset (DBFH)$ és $RT \perp BH$, a három merőleges tétele alapján következik, hogy $d(A, BH) = AT$.
Az $(ABCD)$ téglalapban $AR = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, a befogótétel alapján $DR = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ és $BR = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
BTR és BDH hasonló derékszögű háromszögek (SZ.SZ.), ebből következik: $RT = \dfrac{ca^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
Mivel $AR \perp (DBFH)$, következik, hogy $AR \perp RT$, és alkalmazva a Pitagorasz-tételt az ART derékszögű háromszögben azt kapjuk, hogy $d(A, BH) = AT = \dfrac{a\sqrt{b^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
Hasonló gondolatmenet szerint $AR \perp (DBFH)$, $FD \subset (DBFH)$ *és* $RS \perp FD$, majd a három merőleges tétele alapján: $d(A, FD) = AS$. További számítások eredményeként: $d(A, DF) = AS = \dfrac{b\sqrt{a^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.







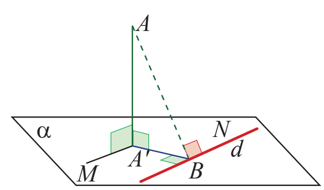




Feladat a portfólióba

Oldjátok meg a 2. alkalmazást az $a = 12$, $b = 5$, $c = 4$ sajátos esetben!

Megjegyzés. Az a mértani alakzat, amellyel szemléltetjük a három merőleges tételét, szerkesztési lehetőséget biztosít arra, hogy adott pontból merőlegest húzzunk egy térbeli egyenesre.
Magyarázat. Miért nevezik ezt a tételt a ***három*** *merőleges tételének*?
$AA' \perp \alpha$, tehát AA' derékszöget zár be az α sík legalább két metsző egyenesével:
$AA'M\sphericalangle = 90^\circ$ és $AA'M\sphericalangle = 90^\circ$. $AA' \perp d$, tehát $A'BN\sphericalangle = 90^\circ$.
Így a tétel feltevésében három derékszög szerepel, innen került a ***három merőleges*** kifejezés a tétel nevébe. Az eredmény az, hogy a negyedik szög is derékszög: $ABN\sphericalangle = 90^\circ$. Jegyezzük meg ezt a megközelítést, mert látni fogjuk, hogy a tétel fordított tételeiben a négy szög közül másik három derékszöget tekintünk adottnak, és az eredmény az lesz, hogy a negyedik szög is derékszög.



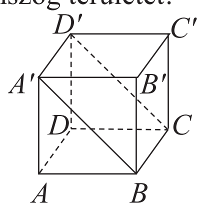
Gyakorlatok és feladatok

1. A PA egyenes merőleges az $ABCD$ négyzet síkjára. Bizonyítsátok be, hogy:
a) $PB \perp BC$ **b)** $PD \perp CD$
c) ha $AC \cap BD = \{O\}$, akkor $PO \perp BD$.

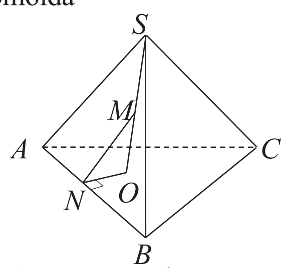
2. Az $MNPQ$ rombusz átlóinak metszéspontja O: $MP \cap NQ = \{O\}$. A rombusz síkjára az AM merőlegest emeljük. Bizonyítsátok be, hogy $AO \perp NQ$!

3. A DA egyenes merőleges az ABC egyenlő szárú háromszög síkjára: $AB \equiv AC$.
a) Tudva azt, hogy E a BC oldal felezőpontja, bizonyítsátok be, hogy $DE \perp BC$!
b) Ha $AB = 20$ cm, $BC = 32$ cm és $DA = 5$ cm, számítsátok ki a DBC háromszög területét!

4. A mellékelt ábrán az $ABCDA'B'C'D'$ kocka látható.
a) Igazoljátok, hogy $A'B \perp BC$!
b) Bizonyítsátok be, hogy $A'D'CB$ téglalap!



5. Az $SABC$ szabályos háromoldalú gúla alapéle $AB = 24$ cm és magassága $SO = 8\sqrt{3}$ cm. M és N az SO, illetve AB szakasz felezőpontja.
a) Bizonyítsátok be, hogy $MN \perp AB$!
b) Milyen hosszú az MN és az MA szakasz?



6. Az MAB derékszögű háromszögeben $AMB\sphericalangle = 90^\circ$, $MA = 16$ cm, $AB = 20$ cm. A háromszög síkjára az M csúcsban merőlegest állítunk: $MN = 7{,}2$ cm. Határozzátok meg az N távolságát az AB egyenestől!

7. A $CDEF$ négyzet oldala 9 cm, a négyzet síkjára merőlegest emelünk: $CM = 12$ cm. Számítsátok ki:
a) az M pont távolságát a négyzet oldalaitól;
b) az M pont távolságát a négyzet átlóitól!

8. Az ABC egyenlő oldalú háromszög oldala a. A PQ egyenes merőleges a háromszög síkjára, átmegy az A ponton, és $PA = QA = \dfrac{3a}{2}$. A BC oldal felezőpontja D.
a) Bizonyítsátok be, hogy $PD \perp BC$!
b) Bizonyítsátok be, hogy $BC \perp (DPQ)$!
c) Számítsátok ki a DPQ háromszög területét és kerületét!

9. Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$, $AB = 6$ cm és $AC = 8$ cm. Ha O a BC oldal felezőpontja és $OP \perp (ABC)$, $OP = 4$ cm, számítsátok ki a P pont távolságát a háromszög oldalaitól!

10. Az MA egyenes merőleges az $ABCD$ rombusz síkjára, és $MA = AB = BD = 6$ cm. Számítsátok ki:
a) az M pont távolságát a BD átlótól;
b) az M pont távolságainak összegét a rombusz oldalaitól!

11. Az $ABCDAEFGH$ kockában M, N és P rendre az EH, AD. illetve BC él felezőpontja, és O az MP szakasz felezőpontja. Bizonyítsátok be, hogy:
a) $MP \perp BC$; **b)** $MP \perp EH$;
c) $AD \perp (MNP)$; **d)** $AO \perp MP$.

12. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, $AD = BC = CD = 12$ cm és $AB = 24$ cm. Az A pontban merőlegest emelünk a trapéz síkjára: $EA = 12$ cm. Számítsátok ki az E pont távolságát a CD, illetve BC egyenestől!

13. Az $(xOy)\sphericalangle$ szögfelezőjén felvesszük az $A \neq O$ pontot és legyen $AA' \perp (xOy)$. Bizonyítsátok be, hogy az A' pont egyenlő távolságra található szög száraitól!

14 A $VABCD$ szabályos négyoldalú gúlában minden él hossza egyforma, a gúla magassága $VO = 8\sqrt{2}$ cm, és a VA él felezőpontja E. Határozzátok meg az E pont távolságát a gúla alapjának átlóitól!

15. Az ABC derékszögű háromszög ($A\sphericalangle = 90^\circ$) síkjára az AD és BE merőleges szakaszt emeljük úgy, hogy $AD \equiv BE$.
a) Bizonyítsátok be, hogy a CDE háromszög derékszögű!
b) Ha $AC = 3\sqrt{7}$ cm, $CD = 12$ cm és $EC = 1{,}5$ dm, számítsátok ki:
b$_1$) a B pont távolságát az (ADC) síktól;
b$_2$) a B pont távolságát a DC síktól.

16. Az ABC háromszögbe írt kör I középpontjába, a háromszög síkjára merőlegest állítunk, és ezen felvesszük a az M pontot, $M \notin (ABC)$. Bizonyítsátok be, hogy $d(M, AB) = d(M, BC) = d(M, AC)$!

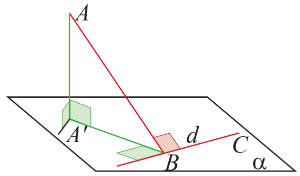
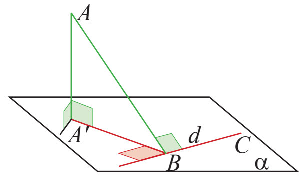
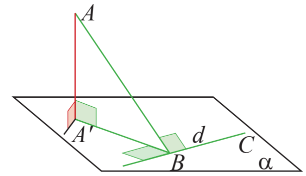
2.6. A három merőleges tételének fordított tételei

Emlékeztető

Egy tételből kiindulva újabb kijelentést fogalmazhatunk úgy, hogy a tétel feltevését (vagy annak egy részét) felcseréljük a következtetésével. Ezt a kijelentést a *tétel fordítottjának* nevezzük.
A tétel fordítottja lehet igaz vagy hamis. Ha igaz, akkor újabb tételt kaptunk, amit a tétel *fordított tételének* nevezzük. (Az adott tételt szokták *direkt tételnek* is nevezni.)

Fedezzük fel, értsük meg!

A három merőleges tételének két fordítottját fogalmazhatjuk meg, és mindkettő igaz. Tehát a három merőleges tételének két *fordított tétele* van.
Tekintsük az α síkot, az $A \notin \alpha$ pontot és a $d \subset \alpha$ egyenest. Az ábrákon használt jelölésekkel és figyelembe véve, hogy $A' \in \alpha$ és $B, C \in d$, részletezzük a három merőleges tételének fordított tételeit.

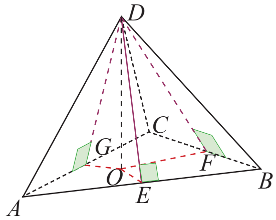
	Direkt tétel	1. fordított tétel	2. fordított tétel
ábrázolás			
feltevés	$AA' \perp \alpha$ és $A'B \perp d$	$AA' \perp \alpha$ és $AB \perp d$	$A'B \perp d$, $AB \perp d$ és $AA' \perp A'B$
következtetés	$AB \perp d$	$A'B \perp d$	$AA' \perp \alpha$

1. tétel. (A három merőleges tételének 1. fordított tétele)
Adott az α sík, a $d \subset \alpha$ egyenes és az $A \notin \alpha$ pont. Ha $AA' \perp \alpha$, $A' \in \alpha$ és $AB \perp d$, $B \in d$, akkor $A'B \perp d$.

Bizonyítás. Azt, hogy $A'B \perp d$, úgy igazoljuk, hogy keresünk egy síkot, amely tartalmazza az egyik egyenest, és merőleges a másikra.
Az $(AA'B)$ sík alkalmasnak tűnik, mivel $A'B \subset (AA'B)$. Bebizonyítjuk, hogy a d egyenes merőleges az $(AA'B)$ síkra. A feltevésből tudjuk, hogy $d \perp AB$, tehát elegendő belátni, hogy $d \perp AA'$. Mivel $AA' \perp \alpha$ *és* $d \subset \alpha$, következik, hogy $AA' \perp d$. Tehát $d \perp AB$ és $d \perp AA'$, ebből következik, hogy $d \perp (AA'B)$. Utóbbi sík tartalmazza az $A'B$, egyenest, tehát $d \perp A'B$.

1. alkalmazás. Az $DABC$ tetraéder alapja ABC és minden oldallapja egyenlő szárú háromszög. Igazoljátok, hogy a tetraéder magasságának talppontja az alap köré írható kör középpontja.

Megoldás. Legyen O a magasság talppontja, E, F és G rendre az AB, BC, illetve AC oldal felezőpontja. Az ABD egyenlő szárú háromszögben DE oldalfelező, tehát $DE \perp AB$. Ellenőrizzük, hogy teljesülnek az első fordított tétel feltevései: $DO \perp (ABC)$, $AB \subset (ABC)$, $DE \perp AB$. Az 1. fordított tétel alapján következik, hogy $OE \perp AB$. Hasonlóan igazolható, hogy $OF \perp BC$ és $OG \perp AC$, vagyis O a háromszög köré írható kör középpontja.

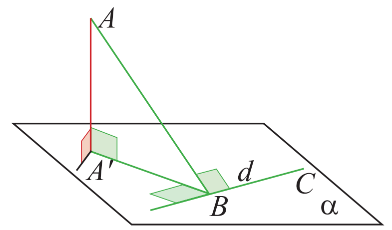


Feladatok a portfólióba

1) Fogalmazzatok meg és bizonyítsatok be egy, a fentihez hasonló alkalmazást négyoldalú gúlára, ha minden oldallapja egyenlő szárú háromszög.
2) Bizonyítsd be, hogy egy olyan tetraéder, amelynek három magassága a hozzá tartozó alapot a körülírt kör középpontjában metszi, szabályos tetraéder.

2. tétel. (A három merőleges tételének 2. fordított tétele) Adott az α sík, a $d \subset \alpha$ egyenes, az $A \notin \alpha$ pont és az $A' \in \alpha$ pont. Ha $A'B \perp d$, $B \in d$, $AB \perp d$ *és* $A'B \perp A'B$, akkor $AA' \perp \alpha$.

Bizonyítás. Be kell bizonyítani, hogy AA' merőleges az α sík két metsző egyenesére. A feltevés szerint $AA' \perp A'B$ *és* $A'B \subset \alpha$, elegendő tehát igazolni, hogy AA' merőleges az α sík még egy egyenesére.
Az ábrán szerepel az α sík még egy egyenese, *a d* egyenes, igazolni fogjuk, hogy $AA' \perp d$. Keresünk egy olyan síkot, amely tartalmazza egyik egyenest, és merőleges a másikra. Alkalmasnak tűnik az $(AA'B)$ sík, mivel $AA' \subset (AA'B)$, és igazolni fogjuk, hogy $d \perp (AA'B)$.
A feltevés szerint $d \perp A'B$, $d \perp AB$, $A'B \subset (AA'B)$, $AB \subset (AA'B)$, tehát $d \perp (AA'B)$, következésképpen $d \perp AA'$.



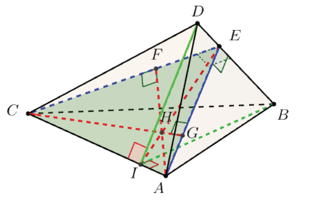
Bebizonyítottuk, hogy $AA' \perp A'B$, $A'B \subset \alpha$, $AA' \perp d$, $d \subset \alpha$, és ebből következik, hogy $AA' \perp \alpha$.

Alkalmazások

Összefoglaló
1) Az, hogy egy egyenes merőleges egy síkra, tulajdonképpen végtelenül sok feltevést rejt magában, hiszen az adott egyenes merőleges a síkban található összes egyenesre. Ezek közül mindig azt választjuk ki, amelyik a feladatunk megoldását elősegíti.
2) Ha két egyenes közül az egyik egy olyan síkban fekszik, amelyre a másik egyenes merőleges, akkor a két egyenes merőleges egymásra.
3) Annak, hogy egy egyenes merőleges legyen egy síkra, elégséges feltétele, hogy az egyenes merőleges legyen a síkban található két metsző egyenesre.

2. alkalmazás. Az $ABCD$ tetraéderben az ABD lap A-hoz tartozó magasságvonala és a CBD lap C-hez tartozó magasságvonala a BD élen metszi egymást az E pontban.
a) Igazoljátok, hogy a tetraéder A és C csúcsához tartozó magasságvonalai metszik egymást!
b) Igazoljátok, hogy a BAC lap B-hez tartozó magasságvonala és a DAC lap D-hez tartozó magasságvonala is metszi egymást az AC él egy pontjában!

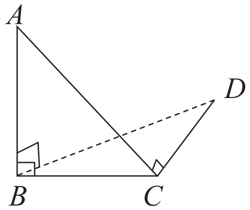
Megoldás. **a)** $AE \perp BD$ és $CE \perp BD$. Meghúzzuk az $AF \perp CE$ merőlegest, ezzel előállítjuk a 2. fordított tételben szereplő feltételeket. Következik, hogy $AF \perp (CBD)$, tehát AF a tetraéder A csúcsához tartozó magasságvonala.
Hasonlóan, meghúzzuk a $CG \perp AE$ merőlegest, és következik, hogy $CG \perp (ABD)$, vagyis CG a tertaéder C csúcsához tartozó magasságvonala.
Mivel AF és CG a CEA háromszög síkjában fekszik, metszik egymást a háromszög H magasságpontjában. Tehát a tetraéder A és C csúcsához tartozó magasságvonalai metszik egymást.



b) A $CEA\Delta$ magasságvonalai egy pontban metszik egymást, tehát EH is magasságvonal, az AC egyenesre merőleges, és azt az I-ben metszi. Igazoljuk, hogy $DI \perp AC$. Mivel $DE \perp EA$ és $DE \perp EC$, következik, hogy $DE \perp (CEA)$, továbbá $AC \subset (CEA)$ és $EI \perp AC$. A három merőleges tétele alapján $DI \perp AC$. Hasonlóan, $BE \perp (ACE)$, $AC \subset (CEA)$, $EI \perp AC$, ebből következik, hogy $BI \perp AC$, tehát a BAC lap B-hez tartozó magasságvonala és a DAC lap D-hez tartozó magasságvonala metszi egymást az AC élen található I pontban.

Gyakorlatok és feladatok

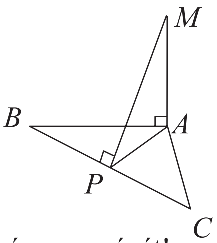
1. A, B, C, D négy, nem ugyanabban a síkban fekvő pont, $AB \perp (BCD)$ és $AC \perp CD$.



a) Bizonyítsátok be, hogy a BCD háromszög derékszögű.

b) Számítsátok ki a $d(B, CD)$ távolságot, ha $d(A, (BCD)) = 8$ cm és $d(A, CD) = 10$ cm!

2. A mellékelt ábrán $MA \perp (ABC)$ és $MP \perp BC$, $P \in BC$, $MA = a - b$, $MP = a + b$, $a > b > 0$. Számítsátok ki az ABC háromszög A csúcsához tartozó magasságát!



3. Az $ABCD$ téglalap O középpontjában merőlegest állítunk a téglalap síkjára, és felvesszük rajta az M pontot.

a) Bizonyítsátok be, hogy $d(M, AB) = d(M, CD)$ és $d(M, AD) = d(M, BC)$!

b) Ha $MO = 12$ cm és az M távolsága a téglalap oldalaitól 13 cm, illetve 15 cm, számítsátok ki a téglalap kerületét!

4. Az MA egyenes merőlege az $ABCD$ trapéz síkjára és $AB \parallel CD$. Tudjuk, hogy $d(M, CD) = MD$.

a) Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ trapéz derékszögű!

b) Ha $AB = 8$ cm, $CD = 4$ cm, $MD = 8$ cm, $MA = 4\sqrt{3}$ cm, számítsátok ki:

b$_1$) a trapéz hegyesszögét;

b$_2$) az M pont távolságát a BC egyenestől!

5. Az SA egyenes merőleges az $ABCD$ paralelogramma síkjára. Tudjuk, hogy $SA = AD = 8$ cm és $d(S, BC) = SC = 16$ cm. Számítsátok ki az S pont távolságainak összegét a paralelogramma oldalaitól!

6. Az xOy szög síkján kívül felveszünk egy P pontot, és $PA \perp (xOy)$, $A \in Int\, xOy\sphericalangle$. Bizonyítsátok be, hogy ha $d(P,Ox) = d(P,Oy)$, akkor az A pont az xOy szög szögfelezőjén található!

7. Az ABC derékszögű háromszög ($ABC\sphericalangle = 90^\circ$) és a $BCDE$ téglalap különböző síkban helyezkedik el, és $AC \perp CD$. Bizonyítsátok be, hogy $AB \perp (BCD)$.

8. S, A, B és C négy nemkomplanáris pont, az ABC háromszög egyenlő oldalú, és oldalának hossza 18 cm. Tudjuk, hogy $SB = SC = 15$ cm, $SA = 12$ cm, és M a BC szakasz felezőpontja.

a) Határozzátok meg az SM szakasz hosszát!

b) Számítsátok ki az S pont távolságát az (ABC) síktól!

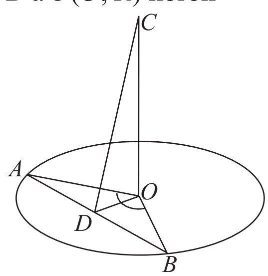
c) Bizonyítsátok be, hogy a gúla magasságvonala és az ABC háromszög A csúcsához tartozó magasságvonala metszi egymást!

9. Az OA, OB, OC félegyenesek páronként merőlegesek egymásra, $OA = OB = OC$, és M az ABC háromszög köré írható kör középpontja.

a) Bizonyítsátok be, hogy $OM \perp (ABC)$!

b) Ha $OA = 4$ cm, számítsátok ki az O pont távolságát az (ABC) síktól!

10. **10.** Az alábbi ábrán A és B a $\mathcal{C}(O, R)$ körön helyezkedik el, $\overset{\frown}{AB} = 120°$ és $AB = 10\sqrt{3}$ cm. A C pont a kör síkján kívül található, az ABC háromszög egyenlő oldalú, és $CO = 10\sqrt{2}$ cm.



a) Mekkora a kör sugara?

b) Ha D az AD szakasz felezőpontja, milyen típusú háromszög a COD?

c) Bizonyítsátok be, hogy CO merőleges az (AOB) síkra!

d) Ha az O pont vetületét a CD egyenesre M-mel jelöljük, bizonyítsátok be, hogy $OM \perp (ABC)$!

11. DA PA egyenes merőleges az ABC háromszög síkjára, és $PB = 4$ cm, $PC = 4\sqrt{2}$ cm, $BC = 4$ cm.

a) Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög derékszögű!

b) Ha $PA = 2\sqrt{2}$ cm, számítsátok ki az ABC háromszög területét!

ISMERETFELMÉRŐ *Hivatalból: 10 pont.*

I. tétel

Az $ABCA_1B_1C_1$ szabályos háromoldalú hasábban $AB = 4$ cm, $AA_1 = 6$ cm, M és N az AB, illetve A_1C_1 él felezőpontja.

Döntsd el az alábbi kijelentések logikai értékét!

5p **1.** A (C_1AB) és (ABC) sík hajlásszöge 45°.

5p **2.** Ha P tetszőleges pont a CC_1 élen, akkor a PAB háromszög egyenlő szárú.

5p **3.** Az A_1M egyenes párhuzamos a (BCN) síkkal.

5p **4.** $A_1M \cdot \sqrt{3} = BN \cdot \sqrt{2}$.

II. tétel

Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$ cm, AD magasságvonal, $AD = \sqrt{3}$ cm és G a háromszög súlypontja. Az AP egyenes merőleges a háromszög síkjára, és $AP = 1$ cm.

Rendeld hozzá az A oszlop minden sorához a neki megfelelő mennyiséget a B oszlopból úgy, hogy a kijelentések igazak legyenek!

Minden helyes hozzárendelésért jár **5 pont**.

A	B
a) $d(P, BC)$	1) $\sqrt{3}$ cm
	2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm
b) PG	3) 1 cm
	4) 2 cm
c) $d(C, (PAD))$	5) $\dfrac{5}{3}$ cm
d) $d(A, (PBC))$	6) $2\sqrt{3}$ cm

III. tétel. *Írd le az alábbi feladatok részletes megoldását!*

1. Az $ABCDEFGH$ téglatest méretei: $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6$ cm és $AE = 6\sqrt{3}$ cm.

5p **a)** Készíts a feladat adatainak megfelelő ábrát!

10p **b)** Számítsd ki AH szakasz vetületét a (BDH) síkra!

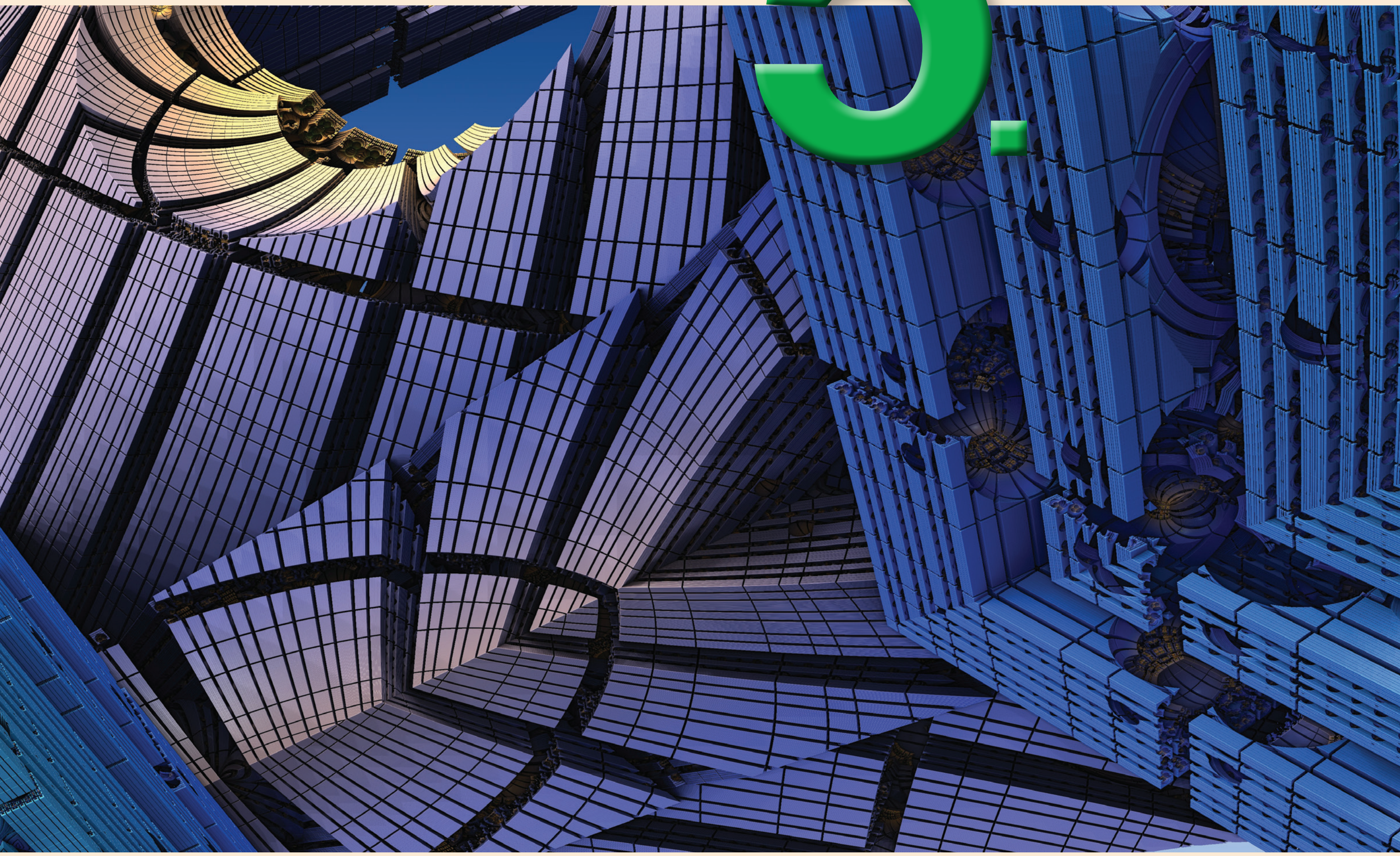
10p **c)** Határozd meg a BH egyenes és az (ACD) sík hajlásszögét!

2. Az $ABCD$ szabályos tetraéderben, az M pont az AC él felezőpontja, és az E pont a C pont szimmetrikusa a D pontra nézve.

10p **a)** Bizonyítsd be, hogy $AE \parallel (BDM)$!

15p **b)** Ha u az AD és BE egyenes hajlásszöge, mennyivel egyenlő $\sin u \cdot \cos u + \operatorname{tg} u$?

5. FEJEZET



Egyes mértani testek felszíne és térfogata

1. Távolság- és szögmérés a tanult mértani testek felszínén és belsejében
2. Poliéderek felszíne és térfogata
3. Görbe lapú testek felszíne és térfogata

Sajátos kompetenciák:

1.5. 2.5. 3.5. 4.5. 5.5. 6.5.

1. Távolság- és szögmérés a tanult mértani testek felszínén és belsejében

1.a. Távolságmérés a mértani testek felszínén és belsejében

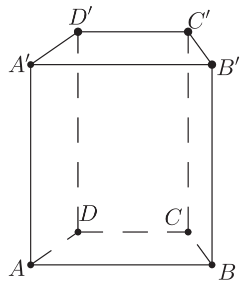
A három merőleges tétele és fordított tételei kiegészítik azokat a matematikai eszközöket, amelyek segítségével távolságot határozhatunk meg egy poliéder felszínén vagy belsejében: egy csúcs távolságát egy éltől vagy egy lap átlójától, egy csúcs távolságát egy laptól, az alaplap középpontjának távolságát egy éltől vagy egy oldallaptól stb.

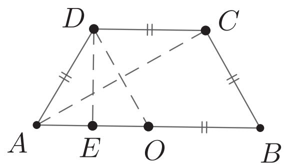
Alkalmazások

A. Távolság meghatározása egy poliéder valamely lapján

Két pont közti távolság, egy pont és egy egyenes közti távolság, ugyanazon a lapon található két egyenes közti távolság meghatározása síkmértani feladatként kezelhető.

1. alkalmazás. Az $ABCDA'B'C'D'$ egyenes hasáb alapja egyenlő szárú trapéz, $AB \parallel CD$, $AD = CD = a$, $AB = 2CD$, és $AA' = b$. Számítsátok ki az A csúcs távolságát a CD, BC, $A'B'$ és $A'D'$ éltől!



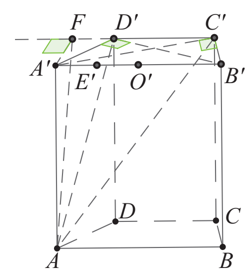


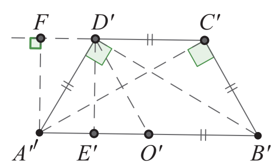
Megoldás. Jelöljük O-val az $ABCD$ trapéz AB nagyalapjának felezőpontját! Akkor $DC \equiv OB$, $DC \parallel OB$, tehát $DCBO$ paralelogramma, és $DO = BC = a$. Az ADO háromszög egyenlő oldalú, oldalának hossza a és $AO \parallel CD$. Ebből következik, hogy $d(A, DC) = d(E, DC) = DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. A BAC háromszögben $ABC\sphericalangle = 60°$, $BAC\sphericalangle = 30°$, tehát $ACB\sphericalangle = 90°$. Ebből következik, hogy $d(A, BC) = AC = a\sqrt{3}$. Az egyenes hasáb oldallapjai téglalapok, tehát $AA' \perp A'B'$, $d(A, A'B') = AA' = b$. Hasonlóan, $AA' \perp A'D'$), tehát $d(A, A'D')) = AA' = b$.

B. Távolság meghatározása a tanult mértani testek belsejében

Két olyan pont távolságának meghatározása, amelyek egy poliéder különböző lapjain fekszenek, vagy egy pont távolságának meghatározása egy olyan egyenestől, amellyel nem ugyanazon a lapon található, a térmértanra jellemző feladatai közé tartozik.

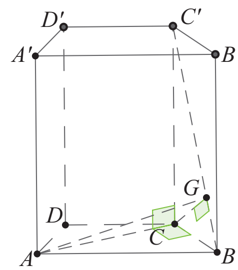
2. alkalmazás. Az $ABCDA'B'C'D'$ egyenes hasáb alapja egyenlő szárú trapéz, $AB \parallel CD$, $AD = CD = a$, $AB = 2CD$, és $AA' = b$. Számítsátok ki az A csúcs távolságát:
a) a $B'C'$ és $C'D'$ éltől; **b)** az $A'B'C'D'$ fedőlap átlóitól;
c) a $BCC'B'$ oldallap átlóitól.





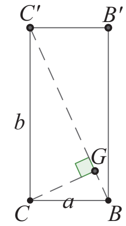
Megoldás. **a**) A három merőleges tétele alapján merőlegest szerkesztünk az A pontból a $B'C'$, majd a $C'D'$ élre, és kiszámítjuk ezek hosszát.
Az egyenes hasáb oldaléle merőleges az alaplapokra: $AA' \perp (A'B'C'D')$. Az $(A'B'C'D')$ síkban meghúzzuk az $A'C'$, $A'D'$ és $A'F$ merőlegest a $C'B'$, $D'B'$, illetve $D'C'$ egyenesre. (Az *1. alkalmazás* alapján tudjuk, hogy $A'C' \perp C'B'$ és $AA' \perp D'B'$.) Az $A'C'B'$, $A'D'B'$ és $A'FD'$ háromszög derékszögű, és az $A'D'O'$ háromszög egyenlő oldalú (O' az $A'B'$ szakasz felezőpontja). Mivel $A'F \perp D'C'$, következik, hogy $A'E'D'F$ téglalap (E' az $A'O'$ szakasz felezőpontja.)

Ebből adódóan $A'F = D'E' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'D' = a$ és $A'C' = a\sqrt{3}$.



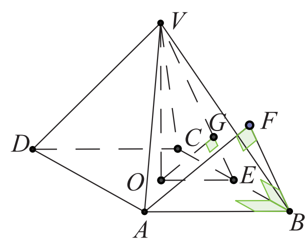
Tudjuk, hogy $AA' \perp (A'B'C'D')$, $C'B' \subset (A'B'C'D') \supset A'C'$, $A'C' \perp C'B'$.
A három merőleges tételéből következik, hogy $AC' \perp C'B'$,
tehát $d(A, C'B') = AC' = \sqrt{3a^2+b^2}$.
Hasonlóan: $AA' \perp (A'B'C'D')$, $D'C' \subset (A'B'C'D') \supset A'F$, $A'F \perp D'C'$. A három merőleges tételéből következik, hogy $AF \perp D'C'$, tehát $d(A, D'C') = AF = \dfrac{\sqrt{3a^2+4b^2}}{2}$.

b) $AA' \perp (A'B'C'D')$, $A'D'$, $D'B' \subset (A'B'C'D')$ és $A'D' \perp D'B'$. Ebből következik, hogy $AD' \perp D'B'$ és $d(A, D'B') = AD' = \sqrt{a^2+b^2}$. Másrészt nyilvánvaló, hogy $d(A, A'C') = AA' = b$.



c) A $BCC'B'$ oldallap átlói CB' és BC'.
Tudjuk, hogy $AC \perp CB$ és $AC \perp CC'$ (mivel $CC' \perp (ABCD)$ és $(ABCD) \supset AC$), tehát $AC \perp (BCC'B')$. Ebből következik, hogy $d(A, CB') = d(A, (ABCD)) = AC = a\sqrt{3}$.
Az A pontból a $(BCC'B')$ oldallapra bocsátott merőleges talppontja C. $BCC'B'$ téglalap, átlója BC'. Meghúzzuk a $CG \perp BC'$ merőlegest, $G \in BC'$.
A három merőleges tétele szerint $AG \perp C'B$ és $d(A, C'B) = AG$.
A BCC' derékszögű háromszögben CG az átfogóhoz tartozó magasság, és $CG = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Végül az ACG derékszögű háromszögben kiszámítható: $AG = a \cdot \sqrt{\dfrac{3a^2+4b^2}{a^2+b^2}}$.

3. alkalmazás. A $VABCD$ szabályos gúla alapéle *a és magassága h*. Számítsátok ki az alaplap O középpontjának távolságát az oldallapoktól, majd az A pont távolságát a (VBC) *síktól!*



Megoldás: A szabályos négyoldalú gúla alapja egy négyzet, a V csúcsból húzott magasságvonal az alapsíkot a négyzet O középpontjában metszi. Ha E-vel jelöljük a BC alapél felezőpontját, akkor $OE \perp BC$ (mint a négyzet apotémája).
Mivel $VO \perp (ABCD)$, $BC \subset (ABCD)$, teljesülnek a három merőleges tétel feltételei, és ebből következik, hogy $VE \perp BC$.
A (VBC) síkban a BC és VE egyenes merőleges egymásra. Jelöljük G-vel az O pont vetületét VE-re. Megállapítjuk, hogy $OE \perp BC$, $GE \perp BC$ és $OG \perp GE$, tehát teljesülnek a három merőleges tétel második fordított tételének feltételei. Ebből következik, hogy $OG \perp (VBC)$, tehát $d(O, (VBC)) = OG$.

A VOE derékszögű háromszögben kiszámítható $d(O, (VBC)) = OG = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2+4h^2}}$.

A B ponton keresztül párhuzamost fektetünk a VE egyeneshez: $d \parallel VE$. Az A pontból merőlegest bocsátunk d-re: $AF \perp d$, $F \in d$. A (VCB) sík tartalmazza a BF és BE egyenest, $AB \perp BE$, $BE \perp BF$, továbbá $AF \perp FB$. Teljesülnek a három merőleges tétele második fordított tételének feltételei, amiből következik, hogy $AF \perp (VCB)$, tehát $d(A, (VBC)) = AF$. Az OGE és AFB háromszög hasonló (párhuzamos oldalú háromszögek), a hasonlósági arány $\dfrac{1}{2}$. Ebből következik, hogy $d(A, (VBC)) = AF = 2OG = \dfrac{2ah}{\sqrt{a^2+4h^2}}$.

Megjegyzés. Az O pont egyenlő távolságra fekszik a szabályos gúla mind a négy oldallapjától.

MINITESZT *Válaszd ki az egyetlen helyes válasz betűjelét!*

1. Az $ABCDA'B'C'D'$ kocka éle 2 cm. Az A' pont távolsága a (BDD') síktól:

A. 2 cm	B. $\sqrt{2}$ cm	C. $2\sqrt{2}$ cm	D. 4 cm

2. Az $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ szabályos hatoldalú hasábban $AB = AA' = 12$ cm. A $d(E, (ACC'))$ távolság:

A. 18 cm	B. 16 cm	C. 24 cm	D. 12 cm

3. Az S pont az $ABCDEF$ szabályos háromoldalú hasáb BE oldalélének felezőpontja. Tudjuk, hogy $AB = 9$ cm és $AD = 18$ cm. Az ASF háromszög kerülete:

A. $9(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ cm	B. $9(2+\sqrt{5})$ cm	C. $9(2\sqrt{2}+\sqrt{5})$ cm	D. $9(\sqrt{2}+2\sqrt{5})$ cm

4. Az $SABCD$ szabályos négyoldalú gúla alapja $ABCD$, a gúla minden éle 4 cm. Az SAB szög szögfelezője AE, $E \in SB$. A DE szakasz hossza:

A. $4\sqrt{5}$ cm	B. $3\sqrt{5}$ cm	C. $2\sqrt{5}$ cm	D. $\sqrt{5}$ cm

Gyakorlatok és feladatok

1. Egészítsétek ki az alábbi mondatokat úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjatok!

a) Az $ABCDEFGH$ kocka éle 18 cm. Az F távolsága az AH egyenestől … cm.

b) $ABCMNP$ szabályos hasábban $AB = AM = 6$ cm. Egy oldallap átlója … cm

c) Egy szabályos tetraéder éle 8 cm. Az alaplap középpontjának egy oldaléltől mért távolsága … cm.

d) Az $SABCD$ szabályos négyoldalú gúla alapéle $AB = 16$ cm, magassága $SO = 8\sqrt{2}$ cm, és E az O pont vetülete az SA élre. Az AE szakasz hossza … cm.

2. Az $ABCDEFGH$ egyenes hasáb alapja az $ABCD$ négyzet, $AB = 4$ cm, $AE = 8$ cm, $AC \cap BD = \{O\}$. Számítsátok ki:

a) a H pont távolságát az AC egyenestől;

b) az F pont távolságát az OG egyenestől;

c) a G pont távolságát az (EBD) síktól!

3. Az $ABCDEFGH$ téglatestben $AB = 1$ cm, $FG = 3$ cm. Az AE él felezőpontja M, és tudjuk, hogy az MCG háromszög egyenlő szárú, derékszögű. Határozzátok meg a téglatest magasságát!

4. Az $SABC$ szabályos tetraéder élhossza a, továbbá D, E és F rendre az AB, BC, illetve SC él felezőpontja.

a) Mennyivel egyenlő $d(C, (AES))$ és $d(E, (CDS))$?

b) Igazoljátok, hogy $DF \perp SC$!

5. Egy egyenes körhenger egyik alapja a $\mathcal{C}(O, r)$ kör. Az A, B, E és F pont úgy helyezkedik el a körön, hogy $AB = 2 \cdot r = 8\sqrt{2}$ cm és EF az AB átmérőre merőleges húr, a hozzá tartozó körív mértéke 90°. A henger egyik alkotója a BC szakasz, és tudjuk, hogy a C pont távolsága az EF egyenestől $12\sqrt{3}$ cm. Mekkora a henger alkotója?

6. Egy egyenes körkúp csúcsa V, az alapja az O középpontú, AB átmérőjű kör. Az alap középpontjának távolsága a VB alkotótól 2 cm, ami éppen az alkotó fele. Mekkora a kúp sugara és magassága?

7. Az $ABCDMNPQ$ kocka éle 1 dm, az R pont az AM él felezőpontja, S a CP él felezőpontja, továbbá $\{L\} = AC \cap BD$, $\{O\} = AP \cap CM$, $\{K\} = MP \cap NQ$.

a) Számítsátok ki az RKO háromszög kerületét!

b) Milyen típusú négyszög az $LRKS$?

c) Határozzátok meg az R pont távolságát a (BDP) síktól!

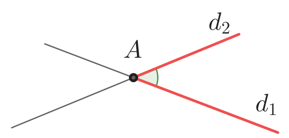
2.*l*. Hajlásszögek kiszámítása a tanult testek felszínén és belsejében

Emlékeztető

A. Két egyenes hajlásszöge

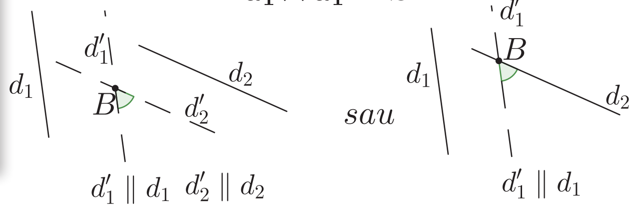
1. Ha d_1 és d_2 két metsző egyenes, $d_1 \cap d_2 = \{A\}$, akkor az általuk bezárt szöget úgy értelmezzük, mint az A kezdőpontú, d_1 és d_2 egyenesre illeszkedő félegyenesek által bezárt hegyes- vagy tompaszöget. Jelölés: $(d_1, d_2)∢$.

$$d_1 \cap d_1 = \{A\}$$



2. Ha d_1 és d_2 két kitérő egyenes, $d_1 \cap d_2 = \varnothing$, akkor a hajlásszögük az a szög, amit egy rögzített ponton át az egyenesekkel húzott párhuzamosok zárnak be egymással. A rögzített pont lehet az egyik egyenesen is, akkor csak a másikkal kell párhuzamost húzni ezen a ponton keresztül.

$$d_1 \cap d_1 = \varnothing$$



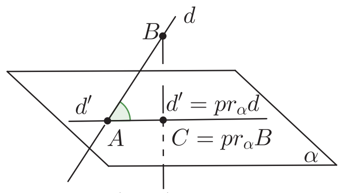
B. Egyenes és sík hajlásszöge

1. Ha $d \cap \alpha = \{A\}$, $d \not\perp \alpha$, akkor a d egyenes és az α sík hajlásszöge egyenlő a d egyenes és a síkra eső vetülete által bezárt szöggel. Jelölés: $(d_1, \alpha)∢$.

2. Ha $d \perp \alpha$, akkor az egyenes derékszöget zár be a síkkal.

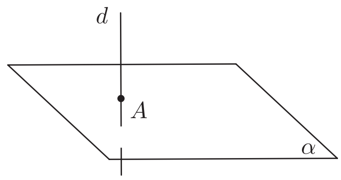
3. Ha $d \parallel \alpha$, akkor értelmezés szerint az egyenes nullszöget zár be a síkkal.

$$d \cap \alpha = \{A\}$$



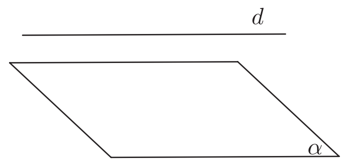
$$\sphericalangle(d,\alpha) = \sphericalangle BAC$$

$$d \perp \alpha$$



$$\sphericalangle(d,\alpha) = 90^0$$

$$d \parallel \alpha$$

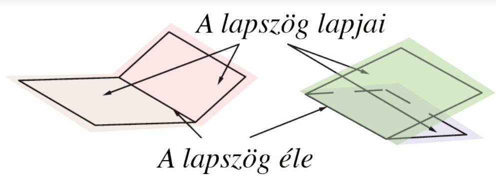


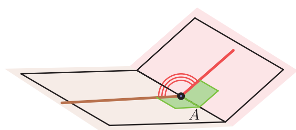
$$\sphericalangle(d,\alpha) = 0^0$$

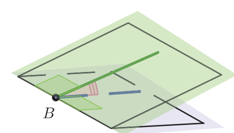
C. Két sík hajlásszöge

Közös határegyenessel rendelkező, két félsíkból álló mértani alakzatot *lapszögnek* nevezünk.

Egy *lapszöghöz tartozó síkszög* az a szög, amelyet két metsző félegyenes határoz meg, ezek a lapszöget alkotó egy-egy félsíkban helyezkednek el, és merőlegesek a lapszög élére.



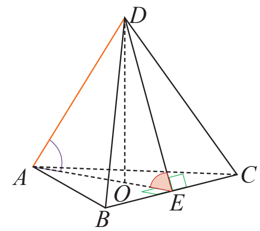




1. Ha α és β két metsző sík, $\alpha \cap \beta = d$, akkor α és β hajlásszöge egyenlő az általuk meghatározott lapszögekhez tartozó síkszögek közül a hegyesszög vagy derékszög mértékével. Jelölése: $(\alpha, \beta)∢$.
2. Ha α és β merőleges egymásra, akkor a hajlásszögük 90°, vagyis derékszög.
3. Ha α és β párhuzamos egymással, akkor hajlásszögük értelmezés szerint nullszög, mértéke 0°.

1. alkalmazás. Az $ABCD$ szabályos tetraéder élhossza a. Számítsátok ki:
a) egy oldalél és az alapsík hajlásszögének szinuszát;
b) két lap hajlásszögének szinuszát!

Megoldás. A szabályos tetraéder minden lapja egyenlő oldalú háromszög, és egy csúcsából kiinduló magasság talppontja a szemben fekvő lap köré írható kör középpontja, amely egyben súlypont is.
Ha $O = pr_{(ABC)}D$, akkor $pr_{(ABC)}AD = AO$, tehát a DA él és az (ABC) alaplap hajlásszöge a $DAO\sphericalangle = DAE\sphericalangle$.
Mivel $DO \perp (ABC)$, $OE \perp BC$ és OE, $BC \subset (ABC)$, a három merőleges tétele alapján következik, hogy $DE \perp BC$, tehát a BCD és BCA laphoz tartozó síkszög a $DEA\sphericalangle$.
Ezek szerint a feladat kérdései tulajdonképpen az ADE háromszög szögeire vonatkoznak, tehát síkmértani feladat.

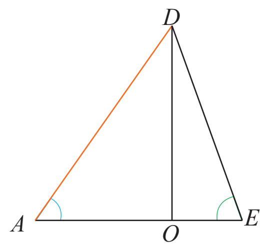


AE és DE kiszámítható, mint egy-egy egyenlő oldalú háromszög magassága, tehát $AE = DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Mivel O az ABC háromszög súlypontja, $EO = \dfrac{1}{3}AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

A DOE derékszögű háromszögben alkalmazzuk Pitagorasz-tételét: $DO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$;

az ADO derékszögű háromszögben $\sin DAE\sphericalangle = \dfrac{DO}{AD} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$;

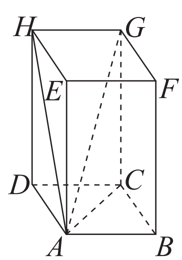
a DOE derékszögű háromszögben $\sin DEO = \dfrac{DO}{DE} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.



2. alkalmazás. Az $ABCDEFGH$ téglatest méretei: $AB = 3\sqrt{3}$ cm, $AD = 9$ cm és $AE = 12$ cm. Számítsátok ki:
a) az AC egyenes és (BCF) sík hajlásszögét;
b) az (ABC) sík és az (AGH) sík hajlásszögét!

Megoldás. **a)** Az $ABCDEFGH$ téglatestben $AB \perp (BCF)$, tehát $B = pr_{(BCF)}A$.
Mivel $C \in (BCF)$, következik, hogy $pr_{(BCF)}AC = BC$ és $(AC,(BCF))\sphericalangle = (AC,BC)\sphericalangle = (ACB)\sphericalangle$.
Az ABC háromszögben $B\sphericalangle = 90^\circ$ és $\text{tg}ACB\sphericalangle = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, tehát $(AC,(BCF)) = 30^\circ$.

b) $GH \parallel AB$, ebből következik, hogy $AB \subset (AGH)$ *és* $(ABC) \cap (AGH) = AB$.
Tudjuk, hogy $AD \perp AB$, $AD \subset (ABC)$, $AH \perp AB$, $AH \subset (AGH)$.
Az (ABC) és (AGH) sík hajlásszöge egyenlő az AD és AH egyenesek DAH szögével. Az ADH derékszögű háromszögben $ADH\sphericalangle = 90^\circ$, $AD = 9$ cm, $HD = CG = 12$ cm. Pitagorasz-tétellel kiszámítható $AH = 15$ cm, végül $\sin(DAH\sphericalangle) = \dfrac{HD}{AH} = \dfrac{4}{5}$.



Gyakorlatok és feladatok

1. Az $ABCDEFHG$ téglatest méretei: $AB = AE = 6$ cm és $BC = 8$ cm. Számítsátok ki:

a) a $BCGF$ oldallap távolságát az AG átlótól;

b) az AB és AG egyenes hajlásszögének tangensét!

2. Az $SABC$ szabályos gúla oldallapjai derékszögű háromszögek, és Q az AB él felezőpontja. Határozzátok meg a SC és SQ egyenesek hajlásszögét!

3. Az $ABCDMNPQ$ egyenes hasáb alapja az $ABCD$ négyzet. A négyzet oldala 24 cm, a BQ egyenes és az (ABM) sík hajlásszöge u. Bizonyítsátok be, hogy $u < 45^\circ$.

4. Az $ABCDEFGH$ téglatest méretei $AB = 2\sqrt{5}$ cm, $BC = \sqrt{5}$ cm és $AE = 5$ cm, továbbá $AC \cap BD = \{O\}$ és M az AB él felezőpontja.

a) Igazoljátok, hogy $OM \parallel (ADH)$!

b) Határozzátok meg a $(DF, (ABC))\sphericalangle$ mértékét !

c) Mennyivel egyenlő $\sin((CMF), (CMG))\sphericalangle$?

5. *Válasszátok ki az egyetlen helyes felelet betűjelét!*

Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest, $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm és $AA' = 24$ cm. Az M és N pont az AA', illetve DD' él felezőpontja.

a) Az $(MN, BC')\sphericalangle$ tangense:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

b) A BD' átló és (ABC) sík hajlásszögének szinusza:

A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{4}{13}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{10}{13}$

6. Az $ABCD$ szabályos tetraéder élhossza $2a$, $a > 0$, E és F a BC, illetve CD szakasz felezőpontja. Számítsátok ki:

a) a tetraéder egyik oldallapja és az alaplap hajlásszögének koszinuszát;

b) az $EAF\sphericalangle$ szinuszát!

7. Az $SABCD$ négyoldalú szabályos gúla minden élének hossza b, $b > 0$. Mennyivel egyenlő:

a) $\sin((SAD), (ABC))\sphericalangle$;

b) $\sin((SAB), (SBC))\sphericalangle$;

c) $\sin((SAD), (SBC))\sphericalangle$;

d) $\mathrm{tg}((SAC), (SCD))\sphericalangle$?

8. Egy szabályos háromoldalú csonka gúla magassága 3 cm, a nagyalap kerülete $36\sqrt{3}$ cm, egy oldallap és az alaplap hajlásszöge 45°. Számítsátok ki egy oldalél és a nagyalap síkja által bezárt szög tangensét!

9. Egy szabályos háromoldalú csonka gúla oldalélei a nagyalap síkjával 45°-os szöget zárnak be. A csonka gúla alapjai köré írható körök sugara $6\sqrt{3}$ cm, illetve $3\sqrt{3}$ cm. Határozzátok meg a csonka gúla magasságát és annak a gúlának a magasságát, amelyből a csonka gúla származik!

10. Egy egyenes körkúp alapja az O középpontú, 3 cm sugarú körlap. Az O pont távolsága a kúp egy alkotójától 2,4 cm. Számítsátok ki a kúp alkotója és magasságvonala által bezárt szög koszinuszát!

11. Egy egyenes körkúp tengelymetszete egy háromszög, melynek területe $\sqrt{3}$ cm². Tudjuk, hogy az alapkör átmérője $2\sqrt{3}$ cm. Mekkora szöget zár be a kúp egy alkotója az alapkör síkjával?

12. Egy egyenes körhenger tengelymetszetének átlói merőlegesek egymásra. Mekkora szöget zár be a tengelymetszet egyik átlója a henger alapkörének síkjával?

13. Egy egyenes körhenger alapkörei $\mathcal{C}(O, AO)$ és $\mathcal{C}(Q, QB)$, és $OA = 8$ cm. Az MN egyenes merőleges az OA sugárra, átmegy annak felezőpontján és $M, N \in \mathcal{C}(O, AO)$. Tudva azt, hogy a henger alaplapjainak távolsága 4 cm, határozzátok meg a (QMN) *sík és a* $(C(O, AO))$ alapsík hajlásszögét!

2. Poliéderek felszíne és térfogata

1.*l.* Az egyenes hasáb felszíne és térfogata

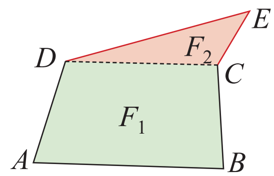
Emlékeztető

A terület alapmértékegysége a négyzetméter, vagyis az egységoldalú négyzet területe. A négyzetméter többszöröseivel és törtrészeivel különböző nagyságú területeket lehet kifejezni. Általánosabban, ha egy négyzet oldalának hossza 1 (*hossz)egység*, akkor a területe 1 területegység.

$$10^{-6}\ \text{km}^2 = 10^{-4}\ \text{hm}^2 = 10^{-2}\ \text{dkm}^2 = 1\ \text{m}^2 = 10^2\ \text{dm}^2 = 10^4\ \text{cm}^2 = 10^6\ \text{mm}^2.$$

Néhány szabályos sokszöglap és a kör területe:

Az a oldalú egyenlő oldalú háromszög területe	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	Az a oldalú szabályos hatszög területe:	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
Az a oldalú négyzet területe:	a^2	Az R sugarú kör területe:	πR^2



Ha az F felület felbontható két diszjunkt, F_1 és F_2 területre, akkor az F felület területe egyenlő az F_1 és F_2 felület területének összegével. Ha $F = F_1 \cup F_2$ és $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, akkor $T(F) = T(F_1) + T(F_2)$.

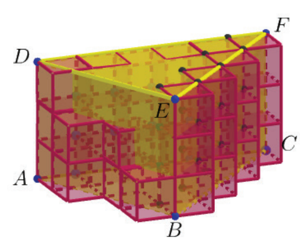
Fedezzük fel, értsük meg!

A. Általános megfontolások

Egy poliéder minden lapja sokszöglap.
Egy poliéder lefejtése egy síkba több diszjunkt sokszöglap egyesítéséből áll, mindegyik a poliéder egy-egy oldallapját vagy alaplapját képviseli.

1. értelmezés. Egy poliéder oldallapjai területének összegét oldalfelszínnek nevezzük. Jelölése: F_o.
2. értelmezés. Egy poliéder összes lapja területének összegét teljes felszínnek nevezzük. Jelölése: F_t.

Megjegyzés. A teljes felszín egyenlő az oldalfelszín és az alaplap vagy alaplapok területének összegével.
A térfogat pontos meghatározása a matematika *mértékelmélet* nevű ágának tárgyát képezi. Ez meghaladja a jelen tankönyv kereteit.
A térfogat alapmértékegysége a köbméter, vagyis annak a kockának a térfogata, amelynek éle 1 m.
A köbméter többszöröseivel és törtrészeivel különböző nagyságú térfogatokat lehet kifejezni.
$10^{-9}\ \text{km}^3 = 10^{-6}\ \text{hm}^3 = 10^{-3}\ \text{dkm}^3 = 1\ \text{m}^3 = 10^3\ \text{dm}^3 = 10^6\ \text{cm}^3 = 10^9\ \text{mm}^3$.
Általánosabban, ha egy kocka oldalának hossza 1 (*hossz)egység*, akkor a térfogata 1 *térfogategység*.
Egy T mértani test térfogatának meghatározása végett építünk a lehető legkevesebb egyforma egységkockából álló összefüggő testet, amely magában foglalja a T testet. Azt mondjuk, hogy a T test térfogata megközelítőleg n térfogategység, ha az így épített test n egységkockából áll. A megközelítés annál pontosabb, minél kisebb a mértékegység, vagyis az egységkocka élhossza.



Megjegyzés. Ha a T mértani test felbontható két diszjunkt, T_1 és T_2 mértani testre, akkor a T test térfogata egyenlő a T_1 és T_2 test térfogatának összegével.

Alkalmazások

B. A téglatest felszíne és térfogata

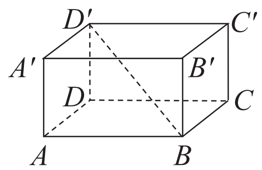
Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest méretei $AB = a$, $BC = b$ és $AA' = c$. Célunk meghatározni a téglatest oldalfelszínét, teljes felszínét és térfogatát.

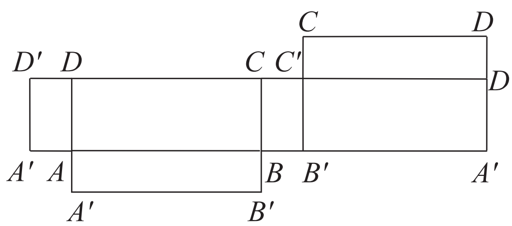
Jellemzők

A téglatest minden lapja téglalap.
Az oldalélek kongruensek és merőlegesek az alapok síkjára.
Bármely két szomszédos lap síkja merőleges egymásra.

BD', $B'D$, AC', $A'C$ a téglatest testátlói.
Bármely két szemben fekvő lap síkja párhuzamos egymással.
Bármely két szemben fekvő lap kongruens egymással.
Bármely két szemben fekvő lap tekinthető a téglatest két alapjának.

Ábrázolás, lefejtés





A téglatest itt ábrázolt testhálója (lefejtése) áll:
– egy téglalapból, amely az eredeti téglatest oldallapjainak kiterítéséből jött létre és méretei $\mathcal{K}_{alap}$ (a téglatest alaplapjának kerülete), illetve h (a téglatest magassága);
– két kongruens téglalapból, amelyek az eredeti téglatest alapjaiból származnak.

Ha a téglatest méretei a, b, c, és a testátlója d, akkor érvényes a következő összefüggés: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

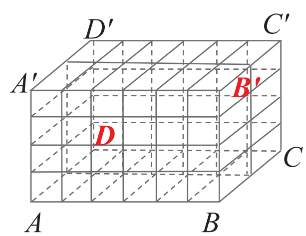
Megjegyzés. A téglatest méreteit gyakran hosszúságnak, szélességnek, illetve magasságnak nevezzük.

Következtetések.

1. Értelmezés szerint: $\mathcal{F}_o = \mathcal{T}_{ABB'A'} + \mathcal{T}_{BCC'B'} + \mathcal{T}_{CDD'A'} + \mathcal{T}_{ADD'A'}$, tehát $\mathcal{F}_o = 2ac + 2bc = (2a + 2b)c$, másképpen kifejezve $\mathcal{F}_o = \mathcal{K}_{alap} \cdot h$, ahol K_{alap} az alapkerület, h a téglatest magassága.

2. A téglatest teljes felszíne: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_o + 2\mathcal{T}_{alap}$, másképpen kifejezve $\mathcal{F}_t = 2ab + 2ac + 2bc$.

3. A téglatest térfogatképletének meghatározása céljából, kezdetben tekintsük azt az esetet, amikor a téglatest a, b és c mérete egész szám, mint az alábbi esetben.



Példa. Az mellékelt téglatest méretei: $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm és $AA' = 4$ cm.
A téglatest felbontható $6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$ egyforma kockára, melyek éle 1 cm.
Azt mondjuk, hogy a téglatest térfogata 48 cm³. Jelölés: $V = 48$ cm³.
Hasonlóan, ha egy téglatest méretei tetszőleges a, b, c természetes számok, akkor a térfogata $V = a \cdot b \cdot c$.
Ha a téglatest alapja $ABCD$, $AB = a$, $BC = b$, és a magassága $h = c$, akkor $V = T_{alap} \cdot h$.

Bebizonyítható, hogy a fenti képlet érvényes akkor is, ha a téglatest méretei tetszőleges pozitív valós számok.

C. A szabályos négyoldalú hasáb oldalfelszíne, teljes felszíne és térfogata

A szabályos négyoldalú hasáb a téglatestnek az a sajátos esete, amikor az alap négyzet, tehát $a = b$. Az oldallapok kongruens téglalapok, az ismert képletek így alakulnak:

$\mathcal{F}_o = \mathcal{K}_{alap} \cdot h$, sajátosan $\mathcal{F}_o = 4ac$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_o + 2\mathcal{T}_{alap}$, sajátosan $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_o + 2a^2$,

$V = \mathcal{T}_{alap} \cdot h$, sajátosan $V = a^2 \cdot c$.

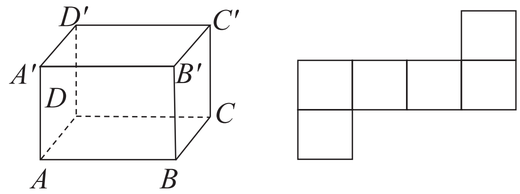
A kocka felszíne és térfogata

Az $ABCDA'B'C'D'$ kocka éle $AB = a$.

Jellemzők

A kocka a téglatest sajátos esete, $a = b = c$.
A kocka összes lapja négyzet.
Az a élű kocka testátlója $d = a\sqrt{3}$.

Ábrázolás, lefejtés



Következtetés. A felszín- és térfogatképlet a téglatestre vonatkozó képletek sajátos esetei, ha $a = b = c$.
Ha a kocka éle a, akkor $\mathcal{F}_o = 4a^2$, $\mathcal{F}_t = 6a^2$, $V = a^3$.

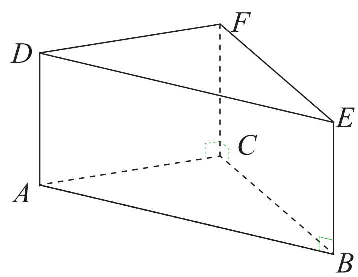
D. A háromoldalú egyenes hasáb oldalfelszíne, teljes felszíne és térfogata

Az $ABCDEF$ háromoldalú egyenes hasáb élei: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ és $AD = h$.

Jellemzők

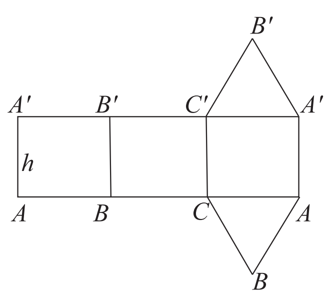
Az alaplapok kongruens háromszögek.
Az oldallapok az alapsíkokra merőlegesen elhelyezkedő téglalapok.
Az oldalélek kongruensek és az alapsíkokra merőlegesen helyezkednek el.
A *szabályos háromoldalú hasáb* alapjai egyenlő oldalú háromszögek.
A háromoldalú hasáb testhálója (lefejtése) áll:
– egy téglalapból, amely az eredeti hasáb oldallapjainak kiterítéséből jött létre és méretei $\mathcal{K}_{alap}$ (az alaplap kerülete), illetve h (a hasáb magassága);
– két kongruens háromszögből, amelyek az eredeti hasáb alaplapjaiból származnak.

Ábrázolás, lefejtés



Következtetések.

1. $\mathcal{F}_o = \mathcal{T}_{ABED} + \mathcal{T}_{BCFE} + \mathcal{T}_{CADF} = AD \cdot AB + BE \cdot BC + CF \cdot AC = AD \cdot (AB + BC + CA)$, tehát $\mathcal{F}_o = \mathcal{K}_{alap} \cdot h$, ahol $\mathcal{K}_{alap}$ az alap kerületét jelöli, h pedig a hasáb magasságát (egyenlő az oldalélekkel).



2. $\mathcal{F}_t = \mathcal{T}_{ABED} + \mathcal{T}_{BCFE} + \mathcal{T}_{CADF} + \mathcal{T}_{ABC} + \mathcal{T}_{DEF}$, másképpen: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_o + 2\mathcal{T}_{alap}$, ahol $\mathcal{T}_{alap}$ az alapterületet jelöli.

3. Ha két hasáb alapja ekvivalens (azonos területű) és magassága egyenlő, akkor a térfogatuk is egyenlő, függetlenül az alaplapok alakjától. Következésképpen:
Ha egy egyenes hasáb alapterülete $\mathcal{T}_{alap}$ és magassága h, akkor a térfogata egyenlő annak a téglatestnek a térfogatával, amelynek az alapterülete $\mathcal{T}_{alap}$ és magassága h.

Következésképpen, $V = \mathcal{T}_{alap} \cdot h$.
A *szabályos háromoldalú hasábban*, ha $AB = BC = AC = a$ és a magasság h, akkor $\mathcal{F}_o = 3ah$ és $\mathcal{F}_t = \mathcal{T}_o + 2\mathcal{T}_{alap}$,

azzal a megjegyzéssel, hogy $T_{alap} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. A szabályos háromoldalú hasáb térfogata: $V = \dfrac{a^2 h\sqrt{3}}{4}$.

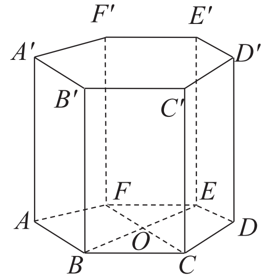
E. A szabályos hatoldalú hasáb oldalfelszíne, teljes felszíne és térfogata

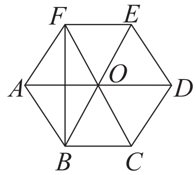
Az $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ szabályos hatoldalú hasáb alapéle $AB = a$, oldaléle $AA' = h$.

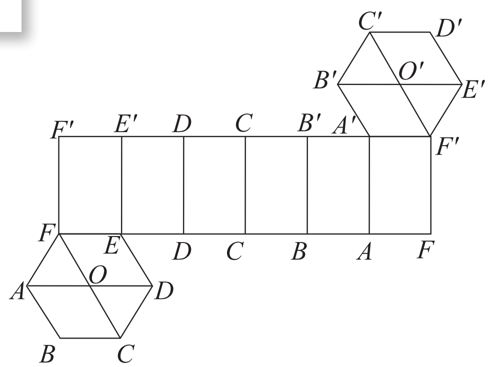
Jellemzők

Az oldalélek merőlegesek az alapsíkokra és kongruensek egymással.
A szabályos hatoldalú hasáb testhálója áll: egy téglalapból, amely az eredeti hasáb oldallapjainak kiterítéséből jött létre és méretei K_{alap} (az alaplap kerülete), illetve h (a hasáb magassága); két kongruens szabályos hatszögből, amelyek az eredeti hasáb alapjaiból származnak.
A szabályos hatoldalú hasáb felbontható 6 szabályos háromoldalú hasábra. Ezek alap- és oldaléle megegyező a hatoldalú hasáb alap-, illetve oldalélével.

Ábrázolás, lefejtés







Következtetések.

1. $T_a = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

2. $\mathcal{T}_o = \mathcal{T}_{ABB'A'} + \mathcal{T}_{BCC'B'} + \mathcal{T}_{CDD'C'} + \mathcal{T}_{DEE'D'} + \mathcal{T}_{EFF'E'} + \mathcal{T}_{FAA'F'} = 6 \cdot a \cdot h$,
tehát $\mathcal{T}_o = \mathcal{K}_{alap} \cdot h$, ahol $\mathcal{K}_{alap}$ az alap kerületét jelöli, h pedig a hasáb magassága (egyenlő az oldalélekkel).

3. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_o + 2\mathcal{T}_{alap}$, másképpen $\mathcal{F}_t = 6 \cdot a \cdot h + 3a^2\sqrt{3}$.

4. $V = T_{alap} \cdot h$, másképpen $V = \dfrac{3a^2h\sqrt{3}}{2}$.

Megjegyzés. A szabályos hatoldalú hasáb térfogata úgy is kiszámítható, mint 6 szabályos háromoldalú hasáb egyesítése: $V = 6 \cdot \dfrac{a^2h\sqrt{3}}{4}$.

Fontos észrevétel. A sajátos hasábokra vonatkozó képleteket *nem kell megjegyezni*. Könnyen levezethetők az alábbi észrevételekből kiindulva.
1. Egy hasáb oldalfelszíne egyenlő az oldallapok területének összegével. $\mathcal{F}_o = \mathcal{K}_{alap} \cdot h$
2. Egy hasáb teljes felszíne egyenlő az oldalfelszín és a két alaplap területének összegével. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_o + 2\mathcal{T}_{alap}$
3. Egy egyenes hasáb térfogata egyenlő az alapterület és a magasság szorzatával. $V = \mathcal{T}_{alap} \cdot h$

MINITESZT Egy szabályos négyoldalú hasábban a az alapél, b az oldalél, $\mathcal{T}_{alap}$, $\mathcal{F}_o$, $\mathcal{F}_t$ és V rendre a hasáb alapterülete, oldalfelszíne, teljes felszíne, illetve a térfogata. *Válasszátok ki az egyetlen helyes felelet betűjelét!*

a) Ha $a = 4$ cm és $b = 3$ cm, akkor $\mathcal{F}_o = \ldots$			
A. 48 cm²	**B.** 84 cm²	**C.** 64 cm²	**D.** 72 cm²
b) Ha $\mathcal{T}_{alap} = 36$ cm² és $b = 4{,}5$ cm, akkor $V = \ldots$			
A. 96 cm³	**B.** 126 cm³	**C.** 162 cm³	**D.** 196 cm³
c) Ha $\mathcal{F}_t = 312$ cm² és $F_o = 240$ cm², akkor $V = \ldots$			
A. 420 cm³	**B.** 360 cm³	**C.** 320 cm³	**D.** 480 cm³

Gyakorlatok és feladatok

1. Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatestben $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$, a testátló d, a téglatest oldalfelszíne és teljes felszíne F_o, illetve F_t, térfogata V. Végezzétek el a szükséges számításokat, és egészítsétek ki az alábbi táblázatot!

	a	b	c	d	F_o	F_t	V
1.1.	3 cm	4 cm	12 cm				
1.2.		12 cm	16 cm	25 cm			

2. Egy téglatest alapéleinek hossza 10 cm és 24 cm, a testátlója 60°-os szöget zár be az alap síkjával. Számítsátok ki a téglatest magasságát!

3. Az alábbi kérdések az $ABCDA'B'C'D'$ téglatestre vonatkoznak.

a) Ha BC =16 cm, AA' = 8 cm, V = 768 cm³, mennyivel egyenlő $d(D', BC)$?

b) Ha AA'= 32cm, AB = 12 cm, $d(B', CD)$ = 40 cm, mennyivel egyenlő a téglatest alapterülete?

4. Az $ABCDMNPQ$ téglatest méretei: AB = 12 cm, BC = 6 cm, AM = 9 cm. Hol kell felvenni az S pontot a CP élen ahhoz, hogy a BSQ háromszög kerülete minimális legyen?

5. Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatestben $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$, és u, v, w az AC' testátló hajlásszöge az (ABC), (ABB'), illetve (ADD') lappal. Mennyivel egyenlő $sin^2u + sin^2v + sin^2w$?

6. **a)** Egy kocka éle 2 cm. Számítsátok ki a teljes felszínét és térfogatát!

b) Egy másik kocka éle háromszor nagyobb, mint az első kockáé. Hányszorosára nőtt az első kockához képest a második kocka oldalfelszíne, teljes felszíne, illetve térfogata?

7. Egy kocka átlós metszetének területe $64\sqrt{2}$ cm². Határozzátok meg:

a) a kocka élének hosszát;

b) a kocka térfogatát!

8. Egy szabályos hasábnak összesen 18 éle van, és mind kongruensek egymással. Az élek összhossza 216 cm.

a) Hány oldalú sokszög a hasáb alapja?

b) Mennyivel egyenlő a hasáb teljes felszíne és térfogata?

9. Kis kockákból egy nagy kockát építünk. A kis kockák élhossza 1 cm, a nagy kocka térfogata 27 cm³.

a) Hány kis kockát használtunk fel a nagy kockához?

b) A nagy kockát lefestettük három színnel, a szemben fekvő lapok ugyanolyan színűek.

b1) Hány kis kockának lett három lefestett lapja?

b2) Hány kis kockának lett egyetlen lefestett lapja?

b3) Hány kis kockának nincs egyetlen lapja sem lefestve?

10. Az $ABCA'B'C'$ szabályos háromoldalú hasáb alapéle AB = 10 cm, és $BC' \perp CB'$.

a) Számítsátok ki a hasáb magasságát!

b) Határozzátok meg a hasáb teljes felszínét és térfogatát!

11. Az $ABCDEF$ szabályos hasáb alapterülete $64\sqrt{3}$ cm² és $\cos(AE, BC)\sphericalangle = 0{,}25$.

a) Mutassátok ki, hogy az alapél hossza 16 cm!

b) Határozzátok meg az AF egyenes hajlásszögét az alapsíkkal!

c) Számítsátok ki a hasáb oldalfelszínét!

12. Egy szabályos négyoldalú hasáb testátlója 9 dm, magassága 7 dm.

a) Számítsátok ki a hasáb alapélének hosszát!

b) Egy műhelyben gyártanak egy ilyen hasábot, 2,5g/cm³ sűrűségű anyagból. Mennyivel egyenlő az alkatrész tömege kilogrammban kifejezve?

13. Az $ABCDA'B'C'D'$ szabályos négyoldalú hasábban az alapél 12 cm, P a CC' él felezőpontja, és $BPD\sphericalangle = 60°$.

a) Számítsátok ki a hasáb magasságát!

b) Igazoljátok, hogy az $(A'BD)$ sík merőleges a (PBD) síkra!

14. Az $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ szabályos hatoldalú hasáb alapéle AB = 12 cm, a DD' él felezőpontja M, $AD \cap BF = \{N\}$ és $NM = 12\sqrt{3}$ cm.

a) Határozzátok meg az MN egyenes és az (ABC) sík hajlásszögét!

b) Számítsátok ki a hasáb oldalfelszínét!

2.ℓ. A szabályos gúla és a szabályos tetraéder oldalfelszíne, teljes felszíne és térfogata

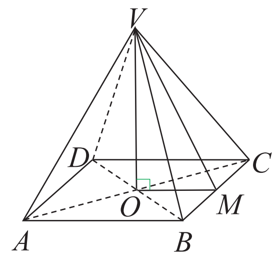
Fedezzük fel, értsük meg!

A szabályos gúla jellemzői:

1. Az alap egy szabályos sokszög, és a csúcs vetülete az alap síkjára az alap köré írható kör középpontjába esik.
2. Az oldalélek kongruensek egymással.
3. Az oldallapok egymással kongruens egyenlő szárú háromszögek.
4. A szabályos gúlának van egy sajátos eleme, *a gúla apotémája*.

Értelmezés. Ha $VA_1A_2 \dots A_n$ egy szabályos gúla, melynek alapja $A_1A_2 \dots A_n$, akkor valamely oldallap VM magasságvonalát *a gúla apotemjának* nevezzük.
Az $A_1A_2 \dots A_n$ sokszög apotémáját *az alap apotémának* nevezzük.
A gúla apotémájának jele $a_{\text{gúla}}$ vagy a_g, az alap apotémájának pedig a_{alap} vagy a.

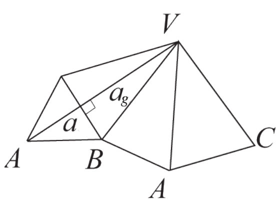
Példa. Ha $VABCD$ egy szabályos négyoldalú gúla és M a BC szakasz felezőpontja, akkor OM az alaplap apotémája, VM pedig a gúla apotémája: $OM = a_{\text{alap}}$, $VM = a_{\text{gúla}}$.
Megjegyzés. A szabályos gúlában a lapok magassága kongruens, tehát bármelyik lap apotémáját kiszámítva, az eredmény ugyanaz lesz.
Egy szabályos gúla apotémája a három merőleges tétele alapján szerkeszthető meg:
a) megszerkesztjük és O-val jelöljük a V csúcs vetületét az alap síkjára;
b) szerkesztünk egy OM merőlegest az egyik alapélre (például a BC-re, $M \in BC$);
c) a három merőleges tétele szerint: $VM \perp BC$.



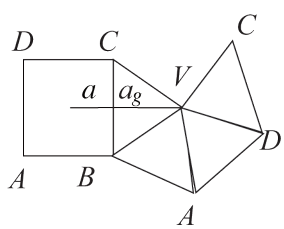
Megjegyzés. A gúla apotémája egyben az oldallapot képező háromszög oldalfelezője is.
Az MOV háromszög O-ban derékszögű, és oldalai: $VO = h$, $OM = a_{\text{alap}}$, $VM = a_{\text{gúla}}$.
Pitagorasz tétele alapján a szabályos n-oldalú gúla magassága, apotémája és az alaplap apotémája között fennáll a következő azonosság: $a_{\text{gúla}}^2 = a_{\text{alap}}^2 + h^2$. Ha m a gúla oldaléle és L_n az alapél, akkor $m^2 = a_{\text{gúla}}^2 + \frac{L_n^2}{4}$.

5. Egy szabályos gúla teszthálója egy n-oldalú szabályos sokszöglapból és n egyenlő szárú háromszögből áll. Az n-oldalú sokszög a gúla alapjának, a háromszögek a gúla oldallapjainak felelnek meg.

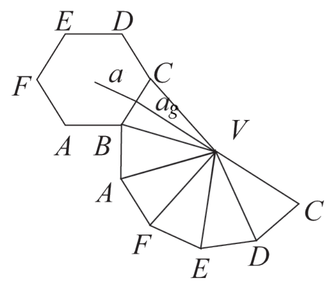
$n = 3$ szabályos háromoldalú gúla	$n = 4$ szabályos négyoldalú gúla	$n = 6$ szabályos hatoldalú gúla



$a = a_{\text{alap}}$ $a = a_{\text{gúla}}$

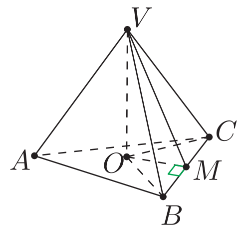


$a = a_{\text{alap}}$ $a = a_{\text{gúla}}$



$a = a_{\text{alap}}$ $a = a_{\text{gúla}}$

Sajátos gúla a szabályos tetraéder: olyan háromoldalú gúla, amelynek minden lapja (az alaplap és mindhárom oldallap) egyenlő oldalú háromszög.



A gúla *oldalfelszíne* egyenlő az oldallapok területének összegével. Jele F_o.
Egy oldallap magassága a V csúcsból az adott oldalra bocsátott merőleges, ami nem más, mint a gúla apotémája.

$T_{BCV} = \dfrac{VM \cdot BC}{2}$, és $F_o = n \cdot T_{BCV}$, ahol n az alaplap oldalainak száma.

Ha az alaplap élhossza L_n, akkor a gúla oldalfelszíne: $F_o = n \cdot \dfrac{L_n \cdot a_{\text{gúla}}}{2}$,

másképpen $F_o = \dfrac{K_{\text{alap}} \cdot a_{\text{alap}}}{2}$, ahol K_{alap} a gúla alapkerülete.

A gúla *teljes felszíne* egyenlő az oldalfelszín és az alapterület összegével. Jele: F_t.

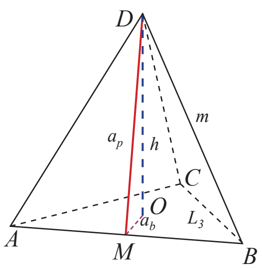
Ha a gúla alapterülete T_{alap}, akkor $F_t = F_o + T_{\text{alap}}$, másképpen kifejezve: $F_t = \dfrac{K_{alap} \cdot (a_{gúla} + a_{alap})}{2}$.

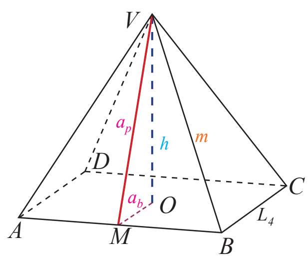
Az általános képletekből kiindulva a gúla alapjának oldalszáma szerint sajátos képleteket kapunk.

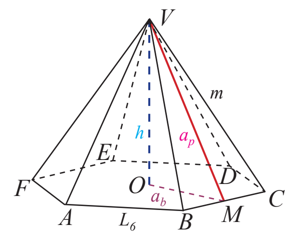
Az a élű *szabályos tetraéder* oldalfelszíne: $F_o = 3 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, teljes felszíne $F_t = 4 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Alkalmazások

$n = 3$ szabályos háromoldalú gúla	$n = 4$ szabályos négyoldalú gúla	$n = 6$ szabályos hatoldalú gúla







$a_{\text{alap}} = \dfrac{L_3\sqrt{3}}{6}$, $a_{\text{gúla}} = \sqrt{h^2 + \dfrac{L_3^2}{12}}$,

$\mathcal{F}_o = \dfrac{K_{\text{alap}} \cdot a_{\text{gúla}}}{2}$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_o + \mathcal{T}_{\text{alap}}$

$\mathcal{F}_o = \dfrac{3L_3 \cdot a_{\text{gúla}}}{2}$

$\mathcal{F}_t = \dfrac{3L_3 \cdot a_{\text{gúla}}}{2} + \dfrac{L_3^2\sqrt{3}}{6}$

$a_{\text{alap}} = \dfrac{L_4}{2}$, $a_{\text{gúla}} = \sqrt{h^2 + \dfrac{L_4^2}{4}}$,

$\mathcal{F}_o = \dfrac{K_{\text{alap}} \cdot a_{\text{gúla}}}{2}$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_o + \mathcal{T}_{\text{alap}}$

$\mathcal{F}_o = \dfrac{4L_4 \cdot a_{\text{gúla}}}{2}$

$\mathcal{F}_t = 2L_4 \cdot a_{\text{gúla}} + L_4^2$

$a_{\text{alap}} = \dfrac{L_6\sqrt{3}}{2}$, $a_{\text{gúla}} = \sqrt{h^2 + \dfrac{3L_6^2}{4}}$,

$\mathcal{F}_o = \dfrac{K_{\text{alap}} \cdot a_{\text{gúla}}}{2}$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_o + \mathcal{T}_{\text{alap}}$

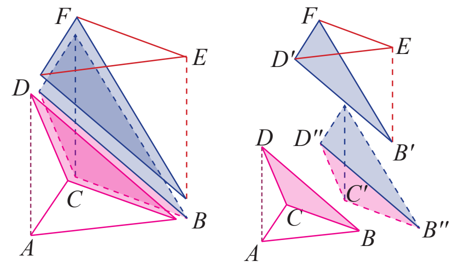
$\mathcal{F}_o = \dfrac{6L_6 \cdot a_{\text{gúla}}}{2}$

$\mathcal{F}_t = 3L_6 \cdot a_{\text{gúla}} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot L_6^2$

Akárcsak a hasábra, a gúlára is érvényes, hogy ha két gúla alapja ekvivalens (azonos területű) és magassága egyenlő, akkor a térfogatuk is egyenlő, függetlenül az alaplapok alakjától.

Kijelenés. Egy tetraéder térfogata egyenlő egy olyan egyenes hasáb térfogatának egyharmadával, amelynek az alapja és a magassága megegyezik a tetraéder alapjával, illetve magasságával.

Bizonyítás. Az $ABCDEF$ hasábot a (DCB) és (DFB) síkkal metszve három tetraéderre bontjuk. (Lásd az ábrát!)
Az $ABCD$ és $D'EFB'$ tetraéder alapja ABC, illetve $D'EF$, magassága AD, illetve EB'. Ezek megegyeznek a hasáb alapjával, illetve magasságával, tehát egymással is, így a két gúla térfogata egyenlő.
A $D'EFB'$ és $D''F'C'B''$ tetraéder alapjának az EFB', illetve $F'C'B''$ derékszögű háromszöget választjuk. Ezek kongruensek és területük egyenlő. Mindkét tetraéder magassága egyenlő a D pontnak a $BCFE$ síktól mért távolságával. Tehát ennek a két tetraédernek a térfogata is egyenlő egymással. Felbontottuk tehát a hasábot három azonos térfogatú tetraéderre.



Következtetés. A tetraéder térfogata: $V = \dfrac{T_{alap} \cdot h}{3}$.

A szabályos tetraéder egy alaplapja és oldallapjai is egyenlő oldalú háromszögek. A csúcsból kiinduló magasságvonal talppontja az alap köré írható kör középpontjába esik. $V = \dfrac{T_{alap} \cdot h}{3}$, tehát $T_{alap} = \dfrac{L_3^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $h = \dfrac{L_3 \cdot \sqrt{6}}{3}$, $V = \dfrac{L_3^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$.

Megjegyzés. Egy n-oldalú gúla $n-2$ azonos magasságú háromoldalú gúlára (tetraéderre) bontható.

A háromoldalú gúla térfogatára vonatkozó képlet tehát érvényes bármely n-oldalú gúlára: $V = \dfrac{T_{alap} \cdot h}{3}$.

Fontos észrevétel. A fenti képleteket nem kell megjegyezni. Könnyen levezethetők az alábbi észrevételekből kiindulva.

1. A gúla oldalfelszíne egyenlő az oldallapok területének összegével. Ha a gúla szabályos, akkor $F_o = \dfrac{K_{alap} \cdot a_{gúla}}{2}$.
2. A gúla teljes felszíne egyenlő az oldalfelszín és az alapterület összegével. $F_t = F_o + T_{alap}$.
3. A gúla térfogata egyenlő az alapterület és a magasság szorzatának harmadával. $V = \dfrac{T_{alap} \cdot h}{3}$

MINITESZT Válasszátok ki az egyetlen helyes felelet betűjelét!

1. Egy szabályos négyoldalú gúla oldaléle $9\sqrt{3}$ cm, alapéle 18 cm. A gúla térfogata:			
A. 948 cm³	**B.** 927 cm³	**C.** 948 cm³	**D.** 972 cm³
2. A $VABC$ szabályos háromoldalú gúla alapéle 18 cm, magassága $3\sqrt{6}$ cm. A gúla apotémája:			
A. 9 cm	**B.** 6 cm	**C.** 12 cm	**D.** 8 cm
3. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle $6\sqrt{3}$ cm, magassága 9 cm. Egy oldallap és az alaplap lapszöge:			
A. 30°	**B.** 45°	**C.** 60°	**D.** 75°
4. Egy szabályos hatoldalú gúla alapéle $8\sqrt{3}$ cm, apotémája 20 cm. Az alaplap középpontjának távolsága egy oldallaptól:			
A. 8,4 cm	**B.** 9,6 cm	**C.** 7,2 cm	**D.** 10,8 cm

Gyakorlatok és feladatok

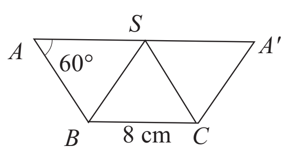
1. Egy négyoldalú szabályos gúlában l = alapél, m = oldalél, a_{alap} = az alaplap apotémája, h = a gúla magassága, T_{alap} = alapterület, F_o = oldalfelszín, F_t = teljes felszín, V = térfogat. Másoljátok le és egészítsétek ki az alábbi táblázatot!

	a)	b)	c)	d)
l	6 cm		10 cm	
m	6 cm			25 cm
a_{alap}		20 cm		
h		12 cm		
T_{alap}				900 m²
F_o				
F_t				
V			400 cm³	

2. A $VABCD$ szabályos négyoldalú gúla minden éle 18 cm. Számítsátok ki:
a) az átlós metszet területét;
b) a BVD szög mértékét!

3. Számítsátok ki az $SABCD$ szabályos négyoldalú gúla teljes felszínét, ha az SBD háromszög derékszögű és területe 288 cm²!

4. A mellékelt trapéz egy szabályos háromoldalú gúla oldalfelszínének a síkba történő lefejtését ábrázolja.



a) Bizonyítsátok be, hogy a gúla oldaléle ugyanakkora, mint az alapéle!
b) Számítsátok ki a a gúla oldalfelszínét és teljes felszínét!

5. Az $ABCD$ szabályos gúla csúcsa A, az alapélek hossza 12 cm, az oldaléleké 10 cm.
a) Mekkora a gúla magassága és apotémája?
b) Határozzátok meg a P pont helyzetét a gúla AD élén úgy, hogy a PBC háromszög kerülete minimális legyen!

6. A $VABCD$ szabályos négyoldalú gúla oldaléle 12 cm és oldalfelszíne $144\sqrt{3}$ cm².
a) Határozzátok meg az AVB szög mértékét, tudva azt, hogy hegyesszög!
b) Számítsátok ki a gúla térfogatát!

7. Egy szabályos háromoldalú gúla magassága 18 cm és az alap köré írható szög sugara 6 cm. Határozzátok meg:
a) a gúla alapélének hosszát;
b) a gúla oldalfelszínét!

8. Az $ABCD$ tetraéderben $AB \perp AC$, $AC \perp AD$ és $AD \perp AB$. Bizonyítsátok be, hogy
$T_{ABC}^2 + T_{ACD}^2 + T_{ADB}^2 = T_{BCD}^2$!

9. Az $SABCDEF$ szabályos hatoldalú gúlában az oldalél 60°-os szöget zár be az alap síkjával. Tudva azt, hogy AB = 24 mm, számítsátok ki:
a) a gúla magasságát;
b) az alap O középpontjának a távolságát az SA egyenestől!

10. A $VABCDEF$ szabályos hatoldalú gúla VAD átlós metszetének területe egyenlő a gúla alapterületével és $AB = 4\sqrt{2}$ cm. Számítsátok ki:
a) a gúla magasságát és térfogatát;
b) a VA oldalél és az (ABC) alapsík hajlásszögének tangensét!

11. Egy háromoldalú szabályos gúlában l = alapél, m = oldalél, a_{alap} = az alaplap apotémája, h = a gúla magassága, T_{alap} = alapterület, F_o = oldalfelszín, F_t = teljes felszín, V = térfogat. Másoljátok le és egészítsétek ki az alábbi táblázatot!

	a)	b)	c)	d)
l	12 cm	6 cm		
m			$6\sqrt{3}$ cm	24 dm
a_{alap}			$6\sqrt{2}$ cm	
h	6 cm			
T_{alap}				
F_o		27 cm²		
F_t				
V				576 dm³

12. Töltsétek ki a **11.** feladatban szereplő táblázatot hatoldalú szabályos gúlára!

3.ℓ. A szabályos csonka gúla felszíne és térfogata

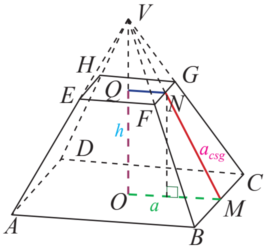
A szabályos csonka gúlát úgy kapjuk, hogy egy gúlát elmetszünk egy, az alappal párhuzamos síkkal, és az így keletkező kis gúlát eltávolítjuk.

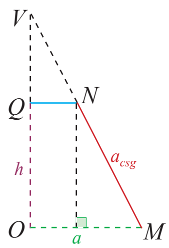
1. értelmezés. Egy csonka gúla valamely oldallapjához tartozó alapélek felezőpontját összekötő szakaszt a csonka gúla apotémájának jelöljük. Jele: a_{csg}.

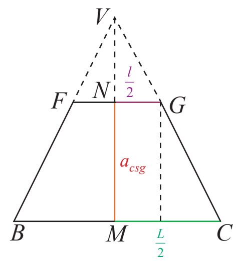
Az oldallapok egymással kongruens egyenlő szárú trapézok, tehát az apotéma hossza nem függ attól, hogy melyik oldallapot választjuk.

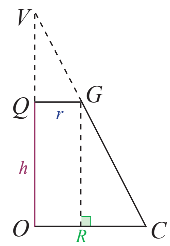
Összefüggések a csonka gúla elemei között

Egy szabályos csonka gúlában a következő jelöléseket használjuk: L = nagy alapél, l = kis alapél, a = nagyalap apotémája, a' = kisalap apotámája, a_{csg} = a csonka gúla apotémája, h = a csonka gúla magassága, m = oldalél, R a nagyalap köré írható kör sugara, r = a kisalap köré írható kör sugara.









A $QNMO$ derékszögű trapézban:

$$a_{csg} = \sqrt{h^2 + (a - a')^2}$$

Az $NMCG$ derékszögű trapézban:

$$m = \sqrt{a_{csg}^2 + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2}$$

Az $OCGQ$ derékszögű trapézban:

$$m = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$$

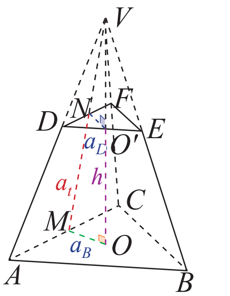
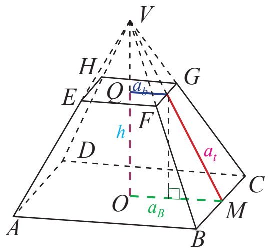
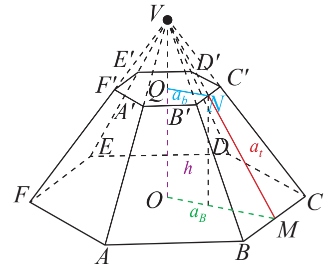
Egy szabályos csonka gúla oldallapjai egymással kongruens egyenlőszárú trapézok, amelyek alapjai egybeesnek a csonka gúla alapéleivel, szárai pedig a csonka gúla oldaléleivel.
A csonka gúla alapjai egymással hasonló szabályos sokszögek. Az eltávolított kis gúla hasonló az eredeti nagy gúlához, a hasonlósági arány egyenlő a kis alapél és a nagy alapél arányával.

2. értelmezés. A csonka gúla oldalfelszíne egyenlő az oldallapok területének összegével. Jele: F_o.
3. értelmezés. A csonka gúla teljes felszíne egyenlő az oldalfelszín és a két alapterület összegével. Jele: F_t.

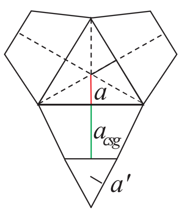
Következésképpen, $F_t = F_o + T + t$, ahol T és t a nagyalap, illetve kisalap területe.
A csonka gúla térfogata egyenlő az eredeti nagy gúla és az eltávolított kis gúla térfogatának különbségével.
A következő eredmény bizonyítása megtalálható a tankönyv digitális változatában.

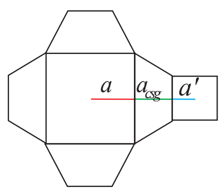
1. kijelentés. Ha egy csonka gúla nagyalapjának és kisalapjának területe T, illetve t és magassága h, akkor a térfogata: $V = \frac{h}{3}\left(T + t + \sqrt{T \cdot t}\right)$.

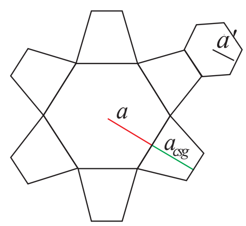
A csonka gúla nagyalapja, kisalapja és magassága rendre L, l, illetve h. További jelölések: K és k a két alaplap kerülete, T és t a két alaplap területe

Szabályos háromoldalú csonka gúla	Szabályos háromoldalú csonka gúla	Szabályos háromoldalú csonka gúla
		
$K = 3L,\ k = 3l$	$K = 4L,\ k = 4l$	$K = 6L,\ k = 6l$
$T = \frac{L^2\sqrt{3}}{4},\ t = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$T = L^2,\ t = l^2$	$T = 6\cdot\frac{L^2\sqrt{3}}{4},\ t = 6\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

A szabályos négyoldalú csonka gúla alapjai párhuzamos síkokban elhelyezkedő szabályos sokszögek.
Az oldalélek kongruensek és az alapsíkokkal mind ugyanakkora szöget zárnak be.
Az oldallapok egymással kongruens egyenlő szárú trapézok.
Egy n-oldalú szabályos csonka gúla testhálója (lefejtése) n egyenlő szárú trapézból és két n-oldalú szabályos sokszögből áll.







$$F_o = \frac{(K+k)\cdot a_{csg}}{2}, \quad F_t = F_o + T + t, \quad V = \frac{h}{3}\left(T + T + \sqrt{T\cdot t}\right).$$

A csonka gúla oldalfelszíne egyenlő az oldallapok területének összegével.
A csonka gúla teljes felszíne egyenlő az oldalfelszín és a két alapterület összegével.
A csonka gúla térfogata egyenlő az eredeti nagy gúla és az eltávolított kis gúla térfogatának különbségével.

Miniteszt *Válasszátok ki az egyetlen helyes felelet betűjelét!*

1. Egy szabályos tetraédert az alappal párhuzamos síkkal metszünk, amely átmegy a magasság felezőpontján. A tetraéder térfogatának és a belőle származó csonka gúla térfogatának aránya:			
A. $\frac{1}{8}$	**B.** $\frac{7}{8}$	**C.** $\frac{8}{7}$	**D.** $\frac{8}{1}$
2. Egy szabályos négyoldalú csonka gúla nagyalapjának éle 15 cm, kisalapjának éle 3 cm, apotémája pedig 8 cm. A csonka gúla oldaléle:			
A. 12 cm	**B.** 10 cm	**C.** 9 cm	**D.** 15 cm
3. Egy szabályos hatoldalú csonka gúla apotémája 12 cm, oldaléle 13 cm és kisalapjának éle 8 cm. A nagyalap köré írható kör sugara:			
A. 9 cm	**B.** 18 cm	**C.** 12 cm	**D.** 15 cm

Gyakorlatok és feladatok

1. Egy négyoldalú szabályos csonka gúlában L a nagyalap éle, l a kisalap éle, h a magasság, a_{csg} a csonka gúla apotémája, m az oldalél, F_o az oldalfelszín, F_t a teljes felszín, V a térfogat. Másoljátok le és egészítsétek ki az alábbi táblázatot!

L	l	h	a_{csg}	m	F_o	F_t	V
18	10	3					
16	6		13				
	8	6					1664
10			3		96		

2. Az $ABCDA'B'C'D'$ szabályos négyoldalú csonka gúlában $AB = 12$ cm, $A'B' = 4$ cm és $AA' = 4\sqrt{5}$ cm. Számítsátok ki:
a) a csonka gúla teljes felszínét;
b) az (ABC) és (BCB') sík hajlásszögét!

3. Egy víztartály alakja szabályos négyoldalú csonka gúla. A nagyalap $12\sqrt{2}$ dm, a kisalap $8\sqrt{2}$ dm, az oldalfeszín $160\sqrt{3}$ dm^2. Határozzátok meg:
a) a tartály magasságát;
b) a tartály literben kifejezett űrtartalmát!

4. Egy szabályos négyoldalú gúla magassága 3 cm, térfogata 208 cm^3 és a nagyalap területe 9-szerese a kisalap területének.
a) Határozzátok meg az alapélek hosszát!
b) Számítsátok ki a csonka gúla testátlója és a nagyalap síkja által bezárt szög tangensét!

5. Egy szabályos háromoldalú hasáb térfogata $\dfrac{1053\sqrt{3}}{2}$ cm^3, magassága 6 cm és kisalapjának éle 9 cm. Határozzátok meg:
a) a nagyalap élének hosszát;
b) a csonka gúla oldalfelszínét;
c) hány százaléka az eredeti gúla térfogatának a csonka gúla térfogata?

6. Egy szabályos háromoldalú csonka gúla két alapjának apotémája $4\sqrt{3}$ cm, illetve $\sqrt{3}$ cm, magassága pedig 3 cm. Számítsátok ki:
a) a csonka gúla térfogatát;
b) annak a gúlának a térfogatát, amelyből a csonka gúla származik;
c) az oldalél és az alap síkja által bezárt szög tangensét!

7. Egy szabályos háromoldalú gúla alapéle 12 cm, oldaléle $8\sqrt{3}$ cm. A gúlát az alap síkjával párhuzamos sík metszi, amelynek távolsága az alap síkjától 4 cm. Mennyivel egyenlő az így keletkezett csonka gúla térfogata?

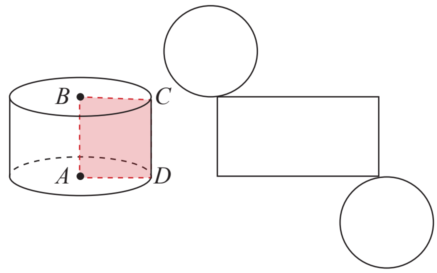
8. Az $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ egy szabályos hatoldalú csonka gúlában $AB = AA' = 20$ cm, és az AD' testátló az (ABC) síkkal 30°-os szöget zár be.
a) Igazoljátok, hogy $A'B' = 10$ cm!
b) Számítsátok ki a csonka gúla oldalfelszínét!
c) Határozzátok meg annak a gúlának a magasságát, amelyből a csonka gúla származik!

9. Az $ABCDEFMNPQRS$ szabályos hatoldalú csonka gúlában O az $ABCDEF$ nagyalap középpontja, $AB = 12$ cm, $MO \perp OQ$, és az oldalél az (ABC) síkkal 45°-os szöget zár be. Számítsátok ki:
a) a csonka gúla oldalélét;
b) az $ADQM$ átlós metszet területét;
c) egy oldallap és a nagy alaplap hajlásszögének szinuszát;
d) a csonka gúla teljes felszínét és térfogatát!

3. Görbe lapú testek felülete és térfogata

1.ℓ. Az egyenes körhenger oldalfelszíne, teljes felszíne és térfogata

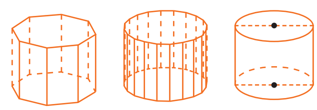
Fedezzük fel, értsük meg!



Az egyenes körhenger az a forgástest, amit az *ABCD* téglalap egyik oldala körüli teljes megforgatásával kapunk. Ha ez az oldal az *AB*, akkor *AD* és *BC* a henger két alapkörének a sugara, a *CD* oldal pedig a henger alkotója. Az alkotó által a forgatás során súrolt felületet a henger *palástjának* nevezzük.
Egy egyenes körhenger testhálója egy téglalapból és a téglalapot érintő két egyenlő sugarú körlapból áll. A téglalap a henger palástjából származik, méretei: a henger alapkörének kerülete, illetve a henger alkotója. A két kör a henger alapköreinek felel meg.

1. értelmezés. Az egyenes körhenger *oldalfelszíne* egyenlő a henger palástjának területével. Jele F_o.
2. értelmezés. Az egyenes körhenger *teljes felszíne* egyenlő az oldalfelszín és a két alapkör területének összegével. Jele F_t.

A henger alapkörének területét T_{alap}-pal jelölve: $F_t = F_o + 2 \cdot T_{alap}$. Ezt a képletet ismerjük, mivel segítségével a hasáb teljes felszíne is kiszámítható.Az egyenes körhenger testhálója (lefejtése) alapján, ha *R* az alapkör sugara és *G* a henger alkotója, akkor $F_o = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot G$, majd
$F_{t\,=}\, 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (G + R)$.



Egy kör területének közelítő értéke egyenlő a körbe írható szabályos sokszög területével; a közelítés annál pontosabb, minél több oldala van a sokszögnek. A henger térfogatának közelítő értéke egyenlő annak az egyenes hasábnak a térfogatával, amelynek az alapja a körbe írható sokszög, magassága pedig egyenlő a henger alkotójával. Tudjuk, hogy a szabályos hasáb térfogata egyenlő az alapsokszög területe és a magasság szorzatával, és ez érvényes a hasáb térfogatára is. Figyelembe véve, hogy az egyenes körhenger magassága egyenlő az alkotójával, az *R* sugarú, *G* alkotójú henger térfogata: $V = T_{alap} \cdot h$, másképpen $V = \pi \cdot R^2 \cdot G$.

Alkalmazások

1. alkalmazás. Egy pók elindul az *R* sugarú és $\pi \cdot R$ magasságú egyenes körhenger egyik alapkörén található *A* pontból, a henger palástján körbe felfelé, 10%-os emelkedőn, amíg felér a másik alapkör azon pontjába, amely szintén az *A*-t tartalmazó alkotón található.
a) Hányszor járta körbe a pók a henger palástját?
b) Ha a pók által megtett út $2 \cdot \pi \cdot \sqrt{101}$ m, mekkora a henger sugara, oldalfelszíne és térfogata?

Megoldás. **a)** A henger palástjának lefejtése egy téglalap, melynek méretei $2 \cdot \pi \cdot R$, illetve $\pi \cdot R$. A pók spirális pályán halad felfelé, és miközben megtesz egy kört, a függőleges mentén is emelkedik a $2 \cdot \pi \cdot R$ hosszúságú kerület 10%-ával, ami $\frac{\pi R}{5}$. A két alapkör közti távolság $\pi \cdot R$, tehát a pók ötször járja körbe a henger palástját, amíg felér.
b) A palást lefejtését 5-ször egymás mellé helyezzük úgy, hogy a téglalapok közös oldalai a henger alkotói legyenek. Az így kapott téglalap méretei $5 \cdot 2\pi R$, illetve πR, és átlója *d*, egybeesik a pók útvonalával. Pitagorasz-tétellel számolva $d = \pi R\sqrt{101}$. A feltevés szerint, $d = 2\pi\sqrt{101}$ m, tehát $R = 2$ m, $G = h = 2\pi$ m, $\mathcal{F}_o = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot G = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 2\pi = 8\pi^2$ m² és $V = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 2\pi = 8\pi^2$ m³.

Gyakorlatok és feladatok

1. Egy egyenes körhengerben R, G, Talap, $\mathcal{F}_o$, $\mathcal{F}_t$ és V rendre a henger sugarát, alkotóját, alapterületét, oldalfelszínét, teljes feszínét, illetve térfogatát jelöli. Másoljátok le és egészítsétek ki a táblázatot!

	R	G	$\mathcal{T}_{alap}$ (cm²)	$\mathcal{F}_o$ (cm²)	$\mathcal{F}_t$ (cm²)	V (cm³)
a)	5 cm	10 cm				
b)	8 cm			80π		
c)		40 mm	9π			
d)				108π	270π	
e)		1,6 dm				256π

2. Számítsátok ki egy egyenes körhenger oldalfelszínét, ha az alap átmérője 20 cm és magassága egyenlő az alap sugarának felével.

3. Egy egyenes körhenger sugara 15 cm és alkotója a sugár $\frac{3}{5}$-e. Számítsátok ki az alkotó hosszát és a henger térfogatát!

4. Egy egyenes körhenger tengelymetszete egy 20 cm oldalhosszúságú négyzet. Határozzátok meg a henger sugarát, alkotóját, oldalfelszínét és térfogatát!

5. Egy egyenes körhenger alapkörének átmérője 16 cm. Ha az alapkör középpontjának távolsága egy alkotó felezőpontjától 10 cm, számítsátok ki a henger alkotójának hosszát, teljes felszínét és térfogatát!

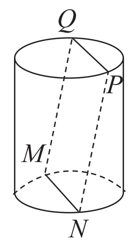
6. Egy egyenes körhenger sugarának és alkotójának aránya $\frac{4}{3}$. Az alkotó és az alapkör átmérőjének összege 33 cm. Határozzátok meg a tengelymetszet területét és a henger térfogatát!

7. Egy egyenes körhenger oldalfelszíne 90π cm² és térfogata 225π cm³. Számítsátok ki a henger sugarát, alkotóját és teljes felszínét!

8. Egy egyenes körhenger teljes felszíne 72π cm²-rel nagyobb, mint az oldalfelszíne, és a henger alkotója 16 cm. Számítsátok ki a henger sugarát, térfogatát és a tengelymetszet átlóját!

9. Egy egyenes körhenger tengelymetszete $ABCD$ és $BC = G = 20$ cm. Az AB átmérőt tartalmazó alapkörbe írt AEF egyenlő oldalú háromszög területe $75\sqrt{3}$ cm².
a) Határozzátok meg a henger sugarát és térfogatát!
b) Számítsátok ki a D pont távolságát az EF egyenestől!

10. A mellékelt ábrán egy egyenes körhenger látható, az MN és PQ húrok párhuzamosak és kongruensek egymással.



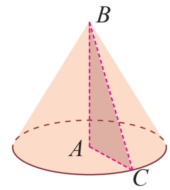
a) Bizonyítsátok be, hogy $MNPQ$ téglalap!
b) A henger alapkörének sugara és az MN húr egyaránt 6 cm, és $MQ = 12$ cm. Számítsátok ki a henger magasságát!

11. Egy autópálya mentén 24 hirdető oszlopot helyeznek el. Az oszlopok henger alakúak, magasságuk 3 méter, átmérőjük 40 cm. Tudjuk, hogy 1 dm² oszlopfelület 10 g festékkel festhető le. Mennyi festékre van szükség az összes oszlop felestéséhez? ($\pi \approx 3,15$)

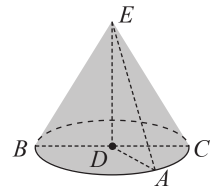
12. Egy cső belső átmérője 36 mm, külső átmérője 48 mm, hossza 4,5 m és $\rho = 5$g/cm³ sűrűségű anyagból készült. Számítsatok ki a cső tömegét! (Használjatok $\pi \approx 3,1$ közelítő értéket!)

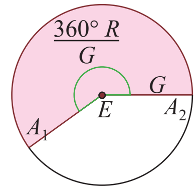
2.*l*. A kúp oldalfelszíne, teljes felszíne és térfogata. A csonka kúp oldalfelszíne, teljes felszíne és térfogata

Fedezzük fel, értsük meg!



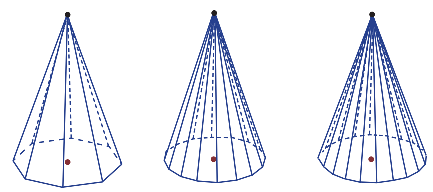
A kúp egy forgástest, amely úgy keletkezik, hogy egy derékszögű háromszöget megforgatunk az egyik befogója körül.
Az a befogó, amelynek a tartóegyenese a forgástengely, a kúp magassága, a másik befogó a kúp alapkörének sugara, az átfogó pedig a kúp alkotója.
Az R sugarú, G alkotójú kúp palástjának lefejtése a síkba egy G sugarú körcikk.
A körcikkhez tartozó körív hossza egyenlő a kúp alapkörének kerületével, tehát $2\pi R$.
Következmény: a kúp oldalfelszíne egy G sugarú, $\dfrac{360^\circ R}{G}$ mértékű középponti szöghöz tartozó körcikk.





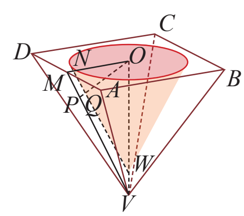
Az egyenes körkúp *oldalfelszíne* egyenlő a G sugarú, $2\pi R$ *ívhosszú* körcikk területével. $F_o = \pi RG$.
A *teljes felszín* egyenlő az oldalfelszín és az alapterület összegével. $F_t = \pi RG + \pi R^2$ vagy $F_t = \pi R(G + R)$.

A térfogat meghatározásához a kúp alapkörét közelítjük egyre több oldalú szabályos sokszögek sorozatával. Az így keletkező gúlák térfogata egyre pontosabban közelíti a kúp térfogatát. A gúla térfogata egyenlő az alapterület és a magasság szorzatának egyharmadával, és ez érvényes a kúp térfogatára is.



$V = \dfrac{1}{3} T_{\text{alap}} \cdot h$, másképpen $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$.

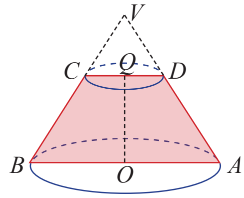
2. alkalmazás. Egy megmunkálandó fémalkatrész alakja kezdetben szabályos négyoldalú gúla, alapéle 16 cm, magassága 6 cm. Eltávolítanak belőle egy akkora kúpot, hogy a megmaradt alkatrész minimális falvastagsága 1 cm lesz. Határozzátok meg az így kapott alkatrész térfogatát!

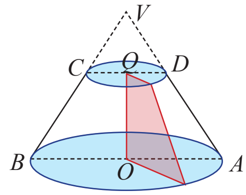


Megoldás. Jelölje $VABCD$ a gúlát, M az AD él felezőpontját, ON a kúp sugarát és OW a magasságát! A megmunkálás utáni minimális falvastagság egyenlő az NW és MV párhuzamos egyenesek távolságával. Az OMV háromszög síkjában merőlegest húzunk az O pontból az MV egyenesre. Ez Q-ban és P-ben metszi az NW, illetve MV egyenest. A feltevés szerint $PQ = 1$ cm. Az OMV derékszögű háromszög O-ból húzott magassága: $PO = \dfrac{OM \cdot OV}{MV} = \dfrac{24}{5}$, ebből $OQ = OP - PQ = \dfrac{19}{5}$. Másrészt $ONW\Delta \sim OMV\Delta$, a hasonlósági arány $\dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{19}{24}$, tehát $ON = \dfrac{19}{3}$ és $OW = \dfrac{19}{4}$. A kúp térfogata $V_{kúp} = \dfrac{\pi ON^2 \cdot OW}{3} = \dfrac{6859\pi}{108}$cm, a gúláé $V_{\text{gúla}} = \dfrac{AB^2 \cdot OV}{3} = 512$ cm³. A végtermék térfogata: $V = V_{\text{gúla}} - V_{\text{kúp}}$.

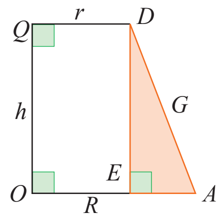
Alkalmazások

Az egyenes csonka körkúpot (röviden csonka kúpot) úgy kapjuk, hogy egy egyenes körkúpot metszünk az alappal párhuzamos síkkal, és a keletkező kisebb kúpot eltávolítjuk. Alternatív eljárás az, hogy egy derékszögű trapézt megforgatunk az alapjaira merőleges szára körül. A trapéz alapjai lesznek a csonka kúp alapköreinek sugarai, a nempárhuzamos szár pedig a csonka kúp alkotója.





A csonka kúp tengelymetszete $ABCD$, O és Q az alapkörök középpontja. Jelölések: $OA = R$, $QD = r$, $OQ = h$ és $AD = G$.
Az $OADC$ derékszögű trapézban elvégezzük a számításokat: $G^2 = h^2 + (R - r)^2$.
A csonka kúp alapjai az OA és QD sugarú körök által határol körlapok, a csonka kúp magassága pedig OQ.
A csonka kúp *oldalfelszíne* egyenlő a forgatás során az alkotó által súrolt felülettel, és jele F_o.
A csonka kúp *teljes felszíne* egyenlő az oldalfelszín és a két alaplap egyesítésével, és jele F_t.



1. kijelentés. Ha egy csonka kúp két alapkörének sugara R, illetve r, és alkotja G, akkor $F_o = \pi G(R + r)$ és $F_t = F_o + T + t$, ahol a két alapterület: $T = \pi R^2$, illetve $t = \pi r^2$.

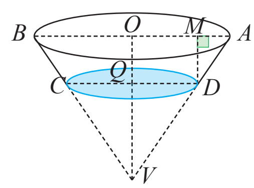
2. kijelentés. Ha egy csonka kúpban az alapkörök sugara R és r, a magasság h, akkor $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r)$.

Bizonyítás. A csonka kúp térfogata egyenlő két kúp térfogatának különbségével. A két kúp alapkörének sugara R, illetve r, magassága h_1, illetve h_2. A magasságokra érvényes a $h = h_1 - h_2$ összefüggés.
$V = \frac{\pi R^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi r^2 \cdot h_2}{3}$. A $VQD\Delta \sim VOA\Delta$ hasonló háromszögekből következik, hogy $\frac{r}{R} = \frac{h_2}{h_1}$, és származtatott aránypárok segítségével: $h_2 = \frac{r \cdot h}{R - r}$ és $h_1 = \frac{R \cdot h}{R - r}$. Visszahelyettesítve a térfogat képletébe, a számítások elvégzése után megkapjuk a végeredményt: $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r)$.

Megjegyzés. A csonka gúla térfogatképlete $V = \frac{h}{3}\left(T + t + \sqrt{T \cdot t}\right)$. Ez is érvényes a csonka kúp térfogatának kiszámítására. Elég észrevenni, hogy $T = \pi R^2$ és $t = \pi r^2$, ahol R és r a két alapkör sugara.

1. alkalmazás. Egy csonka kúp alakú edény alapköreinek sugara 80 cm, illetve 50 cm, alkotója 25 cm. Határozzátok meg az edény térfogatát!

Megoldás. $AB = 80$ cm, $CD = 50$ cm és $AD = 20$ cm. Vizsgáljuk az $(ABCD)$ tengelymetszetet! Ha $M = pr_{AB}D$, akkor DM a csonka kúp magassága.
Az AMD derékszögű háromszögben $h = DM = \sqrt{AD^2 - MA^2} = 20$ cm. A csonka kúp térfogata: $V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right) = 21\,500\pi$ cm³.



MINITESZT *Válasszátok ki az egyetlen helyes felelet betűjelét!*

1. Egy egyenes körkúpot az alappal párhuzamos síkkal metszünk, amely átmegy a kúp magasságának felezőpontján. Az így keletkező kisebb kúp és csonka kúp térfogatának aránya:			
A. $\frac{1}{8}$	**B.** $\frac{1}{7}$	**C.** $\frac{7}{1}$	**D.** $\frac{2}{3}$
2. Egy egyenes körkúp sugara 9 cm és alkotója 15 cm. A kúp oldalfelszíne:			
A. 200π cm^2	**B.** 225π cm^2	**C.** 180π cm^2	**D.** 135π cm^2
3. Egy csonka kúp térfogata 732 cm^3. A nagyobb alapkör sugara 15 cm, a kisebbiké 12 cm, az alkotó 5 cm. A csonkakúp magassága:			
A. 9 cm	**B.** 10 cm	**C.** 4 cm	**D.** 5 cm

Gyakorlatok és feladatok

1. Az ABC derékszögű háromszög AB és AC befogója körüli megforgatásával egyenes körkúpokat kapunk.

a) Rajzoljátok le a két forgástestet!

b) Nevezzétek meg a kúpok sugarát, magasságát és alkotóját!

c) Ha $AB = a$ cm, $AC = b$ cm és $a > b$, töltsétek ki az alábbi táblázatot, és hasonlítsátok össze az eredményeket! A táblázatban R, H, G, F_o, F_t és V a kúp sugara, magassága, alkotója, oldalfelszíne, teljes felszíne, illetve térfogata.

	R	H	G	F_o	F_t	V
1. kúp	a	b				
2. kúp	b	a				

d) Készítsetek hasonló táblázatot, ha $AB = 15$ cm és $AC = 7$ cm!

2. Egy egyenes körkúp alkotója 5 cm és alapkörének sugara 3 cm. Mennyivel egyenlő a magassága, az oldalfelszíne és a teljes felszíne?

3. Egy egyenes körkúp alkotója $18\sqrt{2}$ cm és az alap síkjával bezárt szögének mértéke u. Számítsátok ki a kúp sugarát, magasságát és térfogatát, ha $u \in \{30°, 45°, 60°\}$!

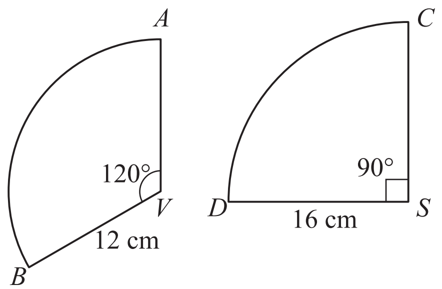
4. Egy egyenes körkúp alapkörének átmérője 18 cm, magasságának és alkotójának aránya $\frac{4}{5}$. Határozzátok meg:

a) a kúp sugarát, alkotóját és magasságát;

b) a tengelymetszet területét;

c) a kúp alapterületének és az oldalfelszínének hányadosát! Írjátok fel ezt a hányadost százalékos arányként is!

5. Egy kúp oldalfelszíne úgy is létrejöhet, hogy egy körcikket „feltekerünk". Az alábbi ábrán látható két körcikk különböző körökből származik.



a) Határozzátok meg a körcikkekből létrehozható kúpok alapkörének sugarát és magasságát!

b) Számítsátok ki a két kúp teljes felszínét és térfogatát!

6. Egy egyenes körkúp tengelymetszete egyenlő oldalú háromszög, a kúp alapkörének középpontja és az alkotó felezőpontja közti távolság pedig 4 cm.

a) Határozzátok meg a kúp sugarát, alkotóját és magasságát!

b) Számítsátok ki a kúp teljes felszínét és térfogatát!

7. Egy egyenes körkúp alapkörének átmérője 64 cm és magassága 24 cm.

a) Számítsátok ki a kúp sugarát, alkotóját és térfogatát!

b) A csúcstól mekkora távolságra kell fektetni az alappal párhuzamos síkot ahhoz, hogy a metszet egy 144 cm^2 területű kör legyen?

8. Egy egyenes körkúp oldalfelszínének lefejtése a síkba egy 12 cm átmérőjű félkör.

a) Határozzátok meg a kúp alkotóját és magasságát!

b) Számítsátok ki a kúp térfogatát!

9. Egy egyenes körkúp alakú sátor felállítva 3 m magas és 16π m^2 területet foglal el. Hány négyzetméter a sátor teljes felszíne? (vegyük számításba a sátor alapfelületét is!)

10. Egy egyenes körkúp magassága 20 cm. A kúp alapjától milyen távolságra kell fektetni egy vele párhuzamos síkot ahhoz, hogy a kúpot két egyenlő oldalfelszínű testre bontsuk?

11. Egy egyenes körkúp sugara 18 cm, és alkotója 3 dm. Határozzátok meg:

a) a kúp magasságát, oldalfelszínét és térfogatát;

b) a kúp oldalfelszínének kiterítéséből (lefejtéséből) származó körcikk középponti szögét!

12. Egy V csúcsú egyenes körkúp alapkörébe $ABCD$ négyzetet írunk (a négyzet csúcsai a körön vannak).

a) Igazoljátok, hogy $VABCD$ egy szabályos gúla!

b) Ha $VA = 8\sqrt{3}$ cm, $AB = 16$ cm, számítsátok ki a kúp magasságát és a két test térfogatának arányát!

13. Egy körcikk alakú lemezből kúp alakú tartályt készítünk. A körcikk középponti szöge 120°, a hozzá tartozó körív hossza 60 π cm.

a) Számítsátok ki a tartály magasságát!

b) Határozzátok meg a tartály űrtartalmát literben kifejezve, két tizedesnyi pontossággal! (Számoljatok $\pi = 3{,}14$ és $\sqrt{2} = 1{,}41$ közelítő értékkel!)

14. Egy egyenes csonka körkúp alapköreinek sugara 5 cm, illetve 2 cm, magassága 4 cm. Mekkora a csonka kúp alkotója?

15. Egy egyenes csonka körkúp térfogata 84π cm^3, magassága 4 cm és az alapkörök sugarának aránya 0,5. Számítsátok ki:

a) a két alapkör sugarát;

b) a csonka kúp teljes felszínét;

c) annak a kúpnak a magasságát, amelyből a csonka kúp származik!

16. Egy egyenes csonka körkúp magassága 15 cm, alkotója 25 cm és tengelymetszetének középvonala 30 cm. Számítsátok ki:

a) a csonka kúp oldalfelszínét!

b) az alapkörök sugarát és a csonka kúp térfogatát!

17. Egy csonka kúp alakú tartály magassága 40 cm és az alapkörök átmérője 140 cm, illetve 80 cm. Hány liter víz fér a tartályba? (Az eredmény közelítő értékét számítsátok ki, egységekre kerekítve.)

18. Egy egyenes körkúp sugara 6 cm és magassága az alapkör átmérőjének 0,(6)-szorosa.

a) Mekkora a kúp magassága és alkotója?

b) A kúp alapjával párhuzamos metszet területe 9π cm^2. Számítsátok ki a keletkezett csonka kúp térfogatát!

19. Egy egyenes csonka körkúp alakú sátor magassága 3 m, az alapok kerülete 1600π cm, illetve 800π cm. Hány négyzetméter vászonra van szükség a sátor előállításához?

20. Egy egyenes csonka körkúp tengelymetszete az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz, $ABC\sphericalangle = 60°$, $AB = 8$ cm és $CD = 4$ cm. Számítsátok ki:

a) a csonka kúp oldalfelszínét;

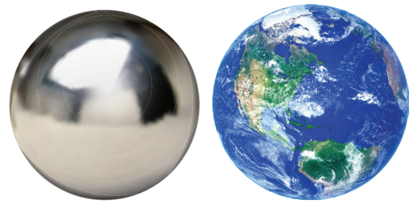
b) a csonka kúp térfogatát;

c) a legrövidebb utat az A és B pont között, a csonka kúp felületén!

3.6. A gömb. Felszíne és térfogata

Fedezzük fel, értsük meg!

A gömbre már az ókorba úgy tekintettek, mint *„a legtökéletesebb formára”.* (Platón). Végtelen sok forgástengelye és végtelen sok szimmetriatengelye van. A gömb tér minden pontjából ugyanolyannak látszik.

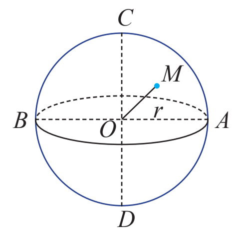


Lépten-nyomon találkozunk gömb alakú tárgyakkal, vagy olyanokkal, amelyek részben gömb alakúak.

Rögzítsünk egy O pontot a térben és egy $r > 0$ számot!

1. értelmezés. A tér mindazon pontjainak halmazát, amelyek az O ponttól r távolságra helyezkednek el, O középpontú, r sugarú gömbnek nevezzük. Jele $S(O, r)$.

Azt mondjuk, hogy az M pont a gömbön található, ha a rögzített O ponttól mért távolsága r. Matematikai jelekkel: $M \in S(O, r) \Leftrightarrow d(M, O) = r$.



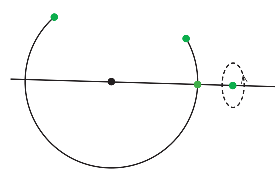
A gömb a tér pontjait két részre bontja:

1) a gömb *belsejében* található pontok azok az N pontok, amelyek távolsága a gömb középpontjától kisebb, mint a sugár: $d(N, O) < r$.
2) a gömb *külsejében* található pontok azok a P pontok, amelyeknek távolsága a gömb középpontjától nagyobb, mint a sugár: $d(P, O) > r$.

Megjegyzések.
1. A gömb nem tartalmazza a belsejében található pontokat.
2. A gömb és a gömb belsejének egyesített halmazát *gömbtestnek* nevezzük.
Jele: $B(O, r)$, tehát $B(O, r) = \{P \mid d(P, O) \leq r\}$.
A gömb fogalmának kiterjesztése a gömbtestre azért szükségszerű, hogy értelmezhető legyen az adott mértani test térfogata.
3. A gömb (ill. a gömbtest) forgástestként is értelmezhető: ha egy kört megforgatunk az átmérője körül, akkor egy gömböt ír le, a körlap pedig egy gömbtestet. A gömb középpontja egybeesik a kör középpontjával és sugara egyenlő a kör sugarával.

Gyakorlati tevékenység

Szemléltessétek alkalmas geometriai oktatóprogram (például Geogebra) segítségével a következő kijelentés érvényességét! Ha egy félkörnél nagyobb körívet megforgatunk egy olyan egyenes körül, amely átmegy a körív tartókörének középpontján, és a körívet két pontban metszi, akkor az így kapott forgástest egy gömb lesz.



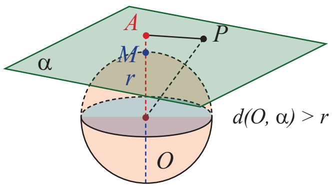
Egy α sík és egy $S(O, r)$ gömb metszete függ a sík és a gömb középpontja közti távolságtól.

Kijelentés. A következő esetek lehetségesek:

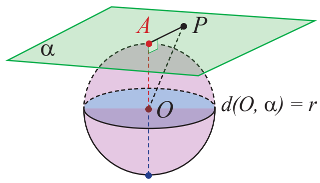
a) ha $d(O, \alpha) > r$, akkor $\alpha \cap S(O, r) = \varnothing$, (az α sík *nem metszi* a gömböt);
b) ha $d(O, \alpha) = r$, akkor $\alpha \cap S(O, r)$ egyetlen pontot tartalmaz (az α *sík* érinti a gömböt);
c) ha $d(O, \alpha) > r$, akkor $\alpha \cap S(O, r)$ egy kör, ennek középpontja az O vetülete az α síkra (α *metszi* a kört).

Bizonyítás. Jelöljük A-val az O pont vetületét α-ra és M-mel az OA félegyenes metszéspontját a gömbbel. Tehát $d(O, \alpha) = OA$ és $OM = r$.

a) $OM < OA$, tehát M az OA szakaszon található, és az α sík bármely P pontjára igaz, hogy $d(O, P) > d(O, \alpha) > r$. Ebből következik, hogy $\alpha \cap S(O, r) = \emptyset$.

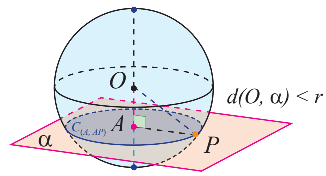


b) Bármely $P \in \alpha \setminus \{A\}$ esetén az $OAP\Delta$ derékszögű, tehát $OP > OA = r$ *és* $P \notin S(O, r)$. Ebből k*övetkezik*, hogy $\alpha \cap S(O, r) = \{A\}$.



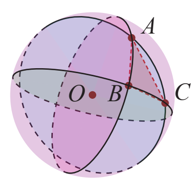
c) Ha $P \in \alpha \cap S(O, r)$, akkor az $OAP\Delta$ derékszögű.

$AP = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{r^2 - OA^2}$, tehát állandó. Ebből következik, hogy $\alpha \cap S(O, r) = C(O, AP)$.



Sajátos esetben, ha $d(O, \alpha) = 0$, akkor a metsző sík tartalmazza a gömb O középpontját, és a metszet egy r sugarú kör. Ebben az esetben az α síkot *átmérősíknak*, a metszetként kapott kört a gömb *nagy körének* nevezzük.
A gömböt a síkban (*két dimenzióban*) egy körrel szoktuk ábrázolni. Azt, hogy egy térbeli testről van szó, és nem egy síkidomról, úgy sugalljuk, hogy megjelenítjük egyik nagy körét, rendszerint a vízszintes helyzetűt, egy ellipszis (lapított kör) segítségével.

Ha A és B egy gömb két különböző pontja, akkor létezik egyetlen nagykör, amely mindkettőt tartalmazza.
Ha A, B, C három pont egy gömbön, akkor az páronként meghatároznak egy-egy nagykört, és mind a három nagykörön két-két körívet. A kiskörívek *gömbi háromszöget* vagy *gömbháromszöget* képeznek. Ugyanakkor létrejön a közönséges ABC háromszög is. Ösztönösen érezzük, hogy ha az A, B és C pont egymáshoz közel helyezkedik el, akkor az ABC gömbháromszög területe megközelítőleg egyenlő az ABC közönséges háromszög területével. Ha a gömb felületét sok kis gömbháromszöggel borítjuk be, akkor ezek területének összegét, vagyis a gömb felszínét jól közelíti a nekik megfelelő közönséges háromszögek összege.
A digitális tankönyvben megtalálható, hogyan lehet hasonló eljárással a gömb térfogatképletét is megsejteni.

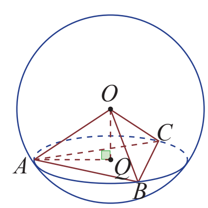


Megjegyzés. A gömb nem fejthető le a síkra.
Elfogadjuk a következő képleteket, bizonyításuk meghaladja a tankönyv kereteit:
az r sugarú gömb felszíne: $F_{\text{gömb}} = 4\pi r^2$; térfogata: $V_{\text{gömb}} = \dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Alkalmazások

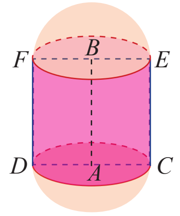
1. alkalmazás. A, B és C három pont az $S(O, r)$ gömb felszínén, és $AB = BC = CA = 9$ cm. A gömb középpontjának távolsága az (ABC) síktól 3 cm. Mennyivel egyenlő a gömb sugara, felszíne és térfogata?

Megoldás. $A, B, C \in S(O, r)$, tehát $AO = BO = CO = r$. Az $OABC$ gúla szabályos és $Q = pr_{(ABC)}O$ az ABC háromszög köré írható kör középpontja. $AQ = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$ cm.
Az AOQ háromszögben alkalmazzuk Pitagorasz tételét, és azt kapjuk, hogy $AO^2 = AQ^2 + OQ^2$, $AO = r = 6$ cm.
A képletek alapján: $F_{\text{gömb}} = 4\pi r^2 = 144\pi$ cm² és $V = \dfrac{4\pi r^3}{3} = 288\pi$ cm³.



2. alkalmazás. Egy r sugarú gömböt egy átmérősík mentén kettévágtunk, és „betoldottunk" a keletkező félgömbök közé egy hengert. Ezáltal a test térfogata megkétszereződött. Határozzátok meg a betoldott henger magasságát!

Megoldás. A gömb sugara egyenlő a henger sugarával. A gömb térfogata $V_{\text{gömb}} = \dfrac{4\pi r^3}{3}$, az r sugarú, h magasságú henger térfogata $V_{\text{henger}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$.
A térfogat megkétszereződött, tehát $V_{\text{gömb}} = V_{\text{kúp}}$, ebből következik, hogy $h = \dfrac{4r}{3}$.



Gyakorlatok és feladatok

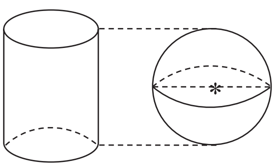
1. **a)** Milyen mértani alakzatot írnak le az $\overset{\frown}{AB}$ félkör pontjai, miközben megforgatjuk az AB egyenes körül?
b) Milyen mértani testet súrol az $\overset{\frown}{AB}$ félkör, miközben teljesen megforgatjuk az AB egyenes körül?

2. Másoljátok le és töltsétek ki a táblázatot! Az adatok egy gömbre vonatkoznak.

	R	$F_{\text{gömb}}$ (cm²)	$V_{\text{gömb}}$ (cm³)
a)	4 cm		
b)		144π	
c)			36π
d)	0,06 m		

3. Súlylökésben a versenyzők egy gömb alakú fémgolyót használnak. Mekkora a gömb átmérője, ha a középpontot tartalmazó metszet területe 49π cm²?

4. A mellékelt ábrán egy egyenes körhenger és egy gömb látható.



a) Milyen összefüggés írható fel a henger magassága és a gömb sugara között?
b) A henger oldalfelszíne egyenlő a gömb felszínével. Hasonlítsátok össze a henger alapkörének sugarát a gömb sugarával!
c) Hasonlítsátok össze a henger alapkörének sugarát a gömb sugarával, ha a két test felszíne egyenlő!

5. Egy gömb felszíne 144π cm². Egy sík metszi a gömböt, a metsző kör kerülete 4π cm. Számítsátok ki:
a) a gömb sugarát és térfogatát;
b) a gömb középpontja és a metsző sík közötti távolságot!

6. Egy 20 cm sugarú gömböt metsz egy sík, amely a gömb középpontjától 12 cm távolságra található. Határozzátok meg:
a) a gömb térfogatát;
b) a metsző kör sugarát!

7. Az A, B és C pont egy gömbön található, $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm, $CA = 15$ cm, az (ABC) sík tartalmazza a gömb középpontját. Határozzátok meg a gömb sugarát és térfogatát!

8. Az A, B és C pont az O középpontú, $R = 8$ cm sugarú gömbön helyezkedik el, és $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$. Számítsátok ki:
a) a gömb felszínét és térfogatát;
b) az ABC háromszög területét;
c) a gömb középpontjának távolságát az (ABC) síktól!

9. Egy félgömb alakú akvárium egy 15 cm sugarú gömbből származik.
a) Számítsátok ki az akvárium felszínét és térfogatát!
b) Lehet-e az akváriumban 6 liter víz, figyelembe véve, hogy a használati útmutatás szerint akváriumot csak az űrtartalmának 90%-ával szabad vízzel feltölteni?

ISMERETFELMÉRŐ *Hivatalból: 10 pont*

I. tétel (40 pont) *Válaszd ki az egyetlen helyes felelet betűjelét!*

5p **1.** Az $ABCDEFGH$ téglatestben $AB = 5$ cm, $AD = 24$ cm, $AE = 10$ cm.
Az $ABGH$ négyszög területe:
A. 110 cm² B. 120 cm² C. 130 cm² D. 140 cm²

5p **2.** Egy szabályos négyoldalú gúla oldaléle 12 cm, és 60°-os szöget zár be az alap síkjával. A gúla apotémája:
A. 4 cm B. $\sqrt{14}$ cm C. $2\sqrt{14}$ cm D. $3\sqrt{14}$ cm

5p **3.** Egy szabályos háromoldalú csonka gúla két alapéle a cm, illetve b cm, apotémája c cm. A csonka gúla oldalfelszíne:
A. $2a \cdot (b + c)$ cm² B. $2b \cdot (a + c)$ cm² C. $2c \cdot (a + b)$ cm² D. $2abc$ cm²

5p **4.** Egy szabályos tetraédert metszettünk az egyik lapjával párhuzamos síkkal. Az így származott csonka gúla térfogata egyenlő a tetraéder térfogatának 0,936-od részével. A csonka gúla alapéleinek aránya:
A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{3}$

5p **5.** Egy egyenes körhenger térfogata 12π cm³, és tudjuk, hogy $3 \cdot R = 2 \cdot G$. A henger alapkörének sugara:
A. 4 cm B. 6 cm C. 2 cm D. 3 cm

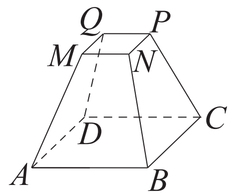
5p **6.** Egy egyenes csonka körkúp alkotója $G = 26$ cm, nagy alapkörének sugara $R = 15$ cm és magassága $h = 24$ cm. A csonka kúp térfogata:
A. 2400π cm³ B. 2450π cm³ C. 2500π cm³ D. 2600π cm³

5p **7.** Ha egy gömb térfogata $2304\,\pi$ cm³, akkor felszíne:
A. 480π cm² B. 536π cm² C. 596π cm² D. 576π cm²

5p **8.** Egy egyenes körkúp tengelymetszete egy derékszögű háromszög, melynek területe 32 cm².
A kúp palástfelszíne:
A. $32\sqrt{2}\,\pi$ cm² B. $16\sqrt{2}\pi$ cm² C. 32π cm² D. 16π cm²

II. tétel (50 pont) *Írd le az alábbi feladatok részletes megoldását!*

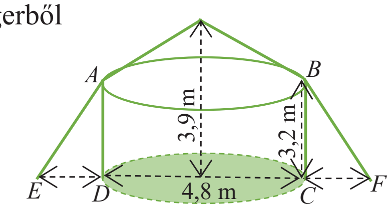
1. Egy völgyzáró gátat az $ABCDMNPQ$ szabályos négyoldalú csonka gúla betonvázára építenek.
A betonváz méretei: $AB = 180$ m, $MN = 60$ m, mélysége h, és tudjuk, hogy a csonka gúla térfogata $1248 \cdot 10^3$ m³.



10p **a)** Számítsátok ki a csonka gúla h magasságát!

10p **b)** A gát végső kivitelezésekor a betonvázat sziklatörmelékkel veszik körül, a törmelék térfogata a csonka gúla térfogatának 175%-át teszi ki.
Fejezzétek ki köbméterben a teljes gát térfogatát!

2. Az ábrán egy sátor vázlata látható. A sátor két részből áll: egy hengerből és egy kúpból. A méretek az ábrán méterben vannak kifejezve.



10p a) Számítsátok ki a sátor térfogatát!

10p b) A sátrat az AE és BF szakasznak megfelelő kötél segítségével kifeszítették. E és F az alapkör középpontjától 4,8 m távolságra található.
Számítsátok ki a rögzítéséhez szükséges kötél hosszát!

10p **3. 3.** Egy munkás három golyót kell lefessen. Az első két golyó átmérője 18 cm, illetve 24 cm. Miután végzett a festéssel, a munkás megállapítja, hogy a harmadik golyó pontosan annyi festéket vett fel, mint a két első együtt. Határozzátok meg a harmadik golyó sugarát!

Ismétlés.
Összefoglaló feladatok

1. Adott az $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{4}{x-3} \in \mathbb{Z}\}$ és P a prímszámok halmaza. Határozd meg az A és $A \cap P$ halmazt!

2. Adott az $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ és a $b = 1 + \sqrt{6}$ szám, valamint az $I = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{5}}{2}\}$ halmaz. Mutasd ki, hogy $(a^2 - b^2 + 1)^{10} \in I$.

3. Adott az $a = 2\sqrt{7} + 3$ és a $b = 5 + 2\sqrt{3}$ szám, valamint az $M = \{a^2, |-50 - \sqrt{101}|, b^2\}$ halmaz. Határozd meg az M halmaz legkisebb elemét!

4. Mutasd ki, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén az $m = (2n - 3)^2 + (4n - 6)(3n + 4) + (3n + 4)^2$ szám egy valós szám négyzete!

5. Adott a $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12}, \sqrt{20}, \ldots$ valós számok végtelen sorozata.

a) Határozd meg a sorozat felírásának szabályát, majd írd le a sorozat következő három tagját!

b) Tanulmányozd, hogy van-e a sorozatnak olyan tagja, amely két szomszédos tagjának mértani közepe!

6. Adott az $E_1(x) = x^3 - 9x$ és $E_2(x) = x^2 + 9x + 6x$ kifejezés.

a) Bontsd tényezők szorzatára a két kifejezést!

b) Számold ki az $E_2(x)$ kifejezés értékét $x = 2 - \sqrt{5}$ esetén!

c) Oldd meg a valós számok halmazán az $E_1(x) = x(x-4)^2 - x$ egyenletet!

7. Az x és y valós számok esetén határozd meg:

a) a $4x^2 + 12x + 11$ kifejezés minimumát;

b) a $-x^2 - 6x + 3$ kifejezés maximumát!

c) az olyan (x,y) számpárokat, amelyekre igaz az $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 17 = 0$ egyenlőség!

8. Végezd el:

a) $\left(\frac{3a}{1-3a} + \frac{2a}{3a+1}\right) : \frac{6a^2 + 10a}{1 - 6a + 9a^2}$, $a \in \mathbb{R} - \{-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\}$

b) $\left(\frac{ab^2 + a^2b}{a^2 + 2ab + b^2} - 2b + \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}\right) : \frac{b^2 - a^2}{-ab}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b, a \neq -b$

9. Mutasd ki, hogy az $E(x) = \left[1 - \frac{(x-3)^2}{x^2+9}\right] : \frac{2x}{x^2+9}$ kifejezés egy természetes szám, bármely x nullától különböző valós szám esetén!

10. Adott az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$

a) Számold ki: $\frac{f(\sqrt{3}) - f(1)}{\sqrt{3} - 1}$.

b) Ábrázold grafikusan az f függvényt!

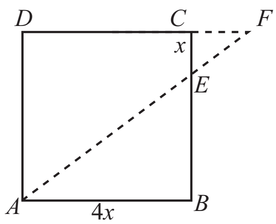
c) Határozd meg az f és a $g:[-2, +\infty)$, $g(x) = -x + 3$ függvény grafikus képének metszéspontját!

11. Határozd meg az a számot tudva, hogy az $A(a, 2a+1)$ pont az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a^2$ függvény grafikus képének eleme!

12. **a)** Adott az $f\colon \mathbb{R}\to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ függvény. Mutasd, ki, hogy $f(a) < f(b)$, bármely $a,b\in\mathbb{R}$, $a < b$ esetén.
b) Adott a $g\colon \mathbb{R}\to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 3$ függvény. Mutasd ki, hogy $g(a) > g(b)$, bármely $a,b\in\mathbb{R}$, $a < b$ esetén.

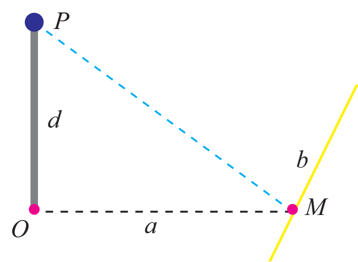
13. Oldd meg az egyenleteket!
a) $2(x + 4)^2 - (x - 1)(x + 1) = x^2 + 1$;
b) $\dfrac{2x-1}{3x+2} = \dfrac{4x-3}{5x+6}$.

14. Adott az x ismeretlent tartalmazó $x^2 - x = a^2 - a$ egyenlet, ahol $a\in\mathbb{R}$.
a) Oldd meg az egyenletet $a = 1$ esetén!
b) Határozd meg az a számot tudva, hogy $x = 2$ az egyenlet megoldása!
c) Mutasd ki, hogy az egyenletnek vannak valós megoldásai bármely $a\in\mathbb{R}$ esetén.



15. Határozd meg a 10-es számrendszerben felírt $\overline{ab}$ alakú számot tudva, hogy $\overline{ab}^{\,2} + 3\cdot\left(\overline{2ab} - 20\right) = 2020$.

16. Az $ABCD$ négyszög négyzet. Használva a mellékelt ábrán feltüntetett adatokat számold ki az $ABEFD$ ötszög kerületét és területét az x pozitív valós szám függvényében! .



17. A park megvilágítását 5 m magasságú oszlopokra szerelt világítótestekkel végzik. Az oszlopok merőlegesek a talaj síkjára. Az egyik oszlop 12 m távolságra helyezkedik el a „b” utcától (mellékelt ábra). Számold ki az oszlop csúcsától az utcáig terjedő távolságot!

18. Az ABC derékszögű háromszög síkjára, a BC átfogó M felezőpontjában olyan merőlegest emelünk, melyen felvesszük az N pontot úgy, hogy $MN = 8$ cm. Tudva, hogy $AB = AC = 6\sqrt{2}$ cm számold ki:
a) az NB egyenes és a háromszög síkja által bezárt szög koszinuszát;
b) az AB egyenes és az (AMN) sík által bezárt szög mértékét;
c) az AC egyenesnek az (AMN) síkra eső vetületének hosszát!

19. Adott az $AOB\sphericalangle$ szögfelezőjének egy C pontja, $AO \equiv OB$ és $DC \perp (AOB)$. Igazold, hogy a DOA és DOB háromszög területe egyenlő!

20. Az $ABCD$ és $ABEF$ négyzetek különböző síkokban helyezkednek el, $AB = a$.
a) Ha M a CE szakasz felezőpontja, akkor igazold, hogy $AM \perp CE$
b) Tudva, hogy $EC = AB\cdot\sqrt{3}$, számold ki a függvényében a B pontnak DF egyenestől mért távolságát!

21. Adott az $ABCDA'B'C'D'$ kocka. Igazold, hogy:
a) $A'B \perp BC$;
b) $A'BCD'$ estéglalap;
c) $T_{A'BCD'} = 2\cdot T_{ABC'}$

22. Ha d egy kocka testátlójának hossza, számold ki a kocka térfogatát!

23. Egy szabályos négyoldalú gúla alapélének hossza 6 cm, térfogata pedig $36\sqrt{3}$ cm^3. Határozd meg:
a) az oldallapok és alap síkja által bezárt szög mértékét;
b) a gúla oldalfelszínét!

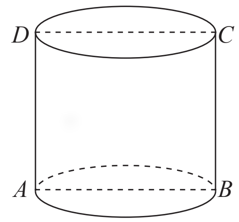
24. Adott az $ABCDA'B'C'D'$ szabályos négyoldalú csonkagúla, $AB = 18$ cm és $A'B' = 6$ cm. Tudva, hogy a csonkagúla magassága $6\sqrt{3}$ cm, számold ki egyik oldallap magasságának hosszát!

25. Az $ABCDA'B'C'D'$ szabályos négyoldalú csonkagúlában M és M , az AB illetve $A'B'$ él felezőpontja, valamint O és O' az alapok középpontja. Tudva, hogy $AB = a$, $A'B' = b$, $a > b$ és $MM' = c$, számold ki OO' hosszát!

26. Az $SABC$ szabályos háromoldalú gúla magassága SO =18 cm és oldaléle SA = 3 dm. A gúlát egy, az alappal párhuzamos α síkkal metszik, úgy, hogy a metszett kerülete az alap kerületének egyharmada. Számold ki:
a) a metszősík és alapsík közötti távolságot;
b) a gúla metszése során keletkezett csonkagúla oldalélének hosszát;
c) a csonkagúla térfogatát!

27. Az $ABCDEFGH$ kocka esetén AB=4 dm és a P az EH él felezőpontja.
a) Számold ki a $BCHP$ négyszög kerületét!
b) Határozd meg a P pontnak az AC egyenestől mért távolságát!
c) Határozd meg a PC egyenes és a (BCD) sík által bezárt szög szinuszát!

28. Az $ABCDMNPQ$ téglatestben AB=12 cm, DQ=15 cm és a téglatest összes élének összege 144 cm.
a) Határozd meg a téglatest testátlójának hosszát!
b) Határozd meg az (ABQ) és (MNP) síkok által bezárt szög koszinuszát!



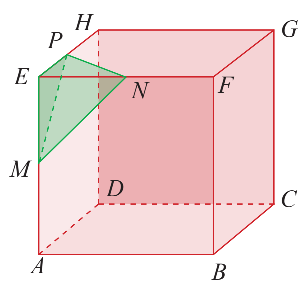
29. A $BCDEFGHI$ szabályos négyoldalú hasáb alapja $BCDE$, BD = 24 cm, az egyik oldallap átlójának hossza pedig 26 cm. Határozd meg:
a) a hasáb magasságának hosszát;
b) az EF és CH egyenesek által bezárt szög szinuszát!

30. Egy egyenes körhenger alapjának területe 64π cm² és teljes felszíne 144π cm². Számold ki a kúp térfogatát!

31. Egy egyenes körhenger alapkörének sugara r cm, magassága pedig az alapkör hosszának fele. Számold ki a henger oldalfelszínét és térfogatát!

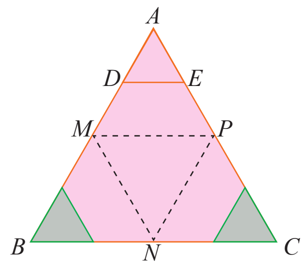
32. Adott egy $ABCD$ tengelymetszetű egyenes körhenger, és az E a $\overset{\frown}{CD}$ körív felezőpontja. Határozd meg az A és E pontnak a henger felszínén mért távolságát (mellékelt ábra), tudva, hogy az alapkör hossza 32 dm és a henger magassága 7 dm.

33. Egy vastárgy olyan egyenes körkúp alakú, melyben az alapkör sugara 18 cm és magassága 10 cm. A vastárgyat beolvasztják és egy új gömb alakú tárgyat alkotnak belőle. Tudva, hogy a munka során a veszteség a térfogat 10%-a, számold ki a gömb alakú tárgy sugarát!



34. Az $ABCDEFGH$ kocka alakú fadarab éle 24 cm, az M, N és P pont pedig az EA, EF illetve EH felezőpontja.
a) Mutasd ki, hogy az $EMNP$ szabályos gúla!
b) Ha az $EMNP$ gúlát eltávolítják, számold ki a maradt test térfogatát!

35. Az ABC egyenlő oldalú háromszög alakú kartonlap felszíne 6
4 $\sqrt{3}$ cm². A háromszög oldalait négy egyenlő részre osztjuk, és legyen M, N és P az AB, BC illetve AC oldalak felezőpontja, majd eltávolítjuk a B *és* C csúcsú kis háromszögeket.
a) Mutasd ki, hogy a megmaradt felület egy olyan szabályos háromoldalú csonkagúla hálózata lehet, amelynek nagyalapja az MNP háromszög.
b) A megmaradt kartonlapot az MN, NP, PM és DE egyenes mentén behajtjuk úgy, hogy egy szabályos háromoldalú csonkagúla alakú doboz keletkezzen. Határozd meg a doboz magasságát!



36. Egy 15 cm sugarú félgömb alakú tálban levő vizet egy olyan üres hengerbe töltünk, melynek méretei R = 10 cm, G = 25 cm. Tudva, hogy a víz a félgömb térfogatának 75%-át töltötte ki, és a hengerbe a mennyiség felét töltjük át, számold ki a hengerben levő vízmennyiség magasságát!

1. ÉV VÉGI FELMÉRŐ

Hivatalból 10 pont.

I. tétel (40 pont)

Az alábbi feladatokban válaszd ki az egyetlen helyes válasznak megfelelő betűt!

5 p **1.** Melyik intervallum eleme a $\dfrac{\left|\sqrt{3}-2\right|}{2+\sqrt{3}}$ szám?

A. $(-1; 0)$ B. $(0; 1)$ C. $(1; 2)$ D. $(1; +\infty)$

5 p **2.** Ha $E(x) = (1-x)(2+x)+x$, akkor $E\left(\sqrt{2}\right)$ értéke:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

5 p **3.** Adott $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$. A $\dfrac{4x^2+6x}{4x^2-9}$ arány egyszerűsített alakja:

A. $-\dfrac{2}{2x-3}$ B. $-\dfrac{2}{2x+3}$ C. $-\dfrac{2x}{2x+3}$ D. $\dfrac{2x}{2x-3}$

5 p **4.** Ha $x \neq 3$, akkor az $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{3}{3-x}$ számítás eredménye:

A. 1 B. -1 C. x D. $-x$

5 p **5.** *ABCDEFGH* kocka élének hossza 9 cm. Az *A* pontnak távolsága a *BH* egyenestől egyenlő:

A. $6\sqrt{3}$ cm B. $3\sqrt{6}$ cm C. $4\sqrt{3}$ cm D. $4\sqrt{6}$ cm

5 p **6.** Egy szabályos tetraéder élei hosszának összege 60 cm. A tetraéder teljes felszíne:

A. $100\sqrt{3}$ cm² B. $100\sqrt{3}$ cm² C. $100\sqrt{3}$ cm² D. $100\sqrt{3}$ cm²

5 p **7.** Egy egyenes körhenger és egy gömb sugara egyenlők, valamint térfogatuk 36π cm³ . A henger magasságának hossza:

A. 4 cm B. 6 cm C. 8 cm D. 12 cm

5 p **8.** Az egyenes körkúp tengelymetszete egy 81 cm² területű derékszögű háromszög. A kúp térfogata:

A. 252π cm³ B. 243π cm³ C. 216π cm³ D. 324π cm³

II. tétel (30 pont)

1. Adott az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=3x+a$ függvény, ahol $a \in \mathbb{R}$.

5 p **a)** $a = 2$ esetén ábrázold grafikusan az f függvényt!

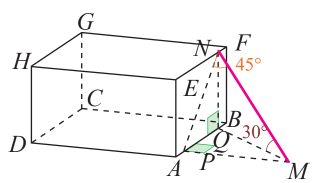
5 p **b)** Határozd meg az a számot tudva, hogy az $A(a,8)$ pont az f függvény grafikus képének eleme!

5 p **c)** Számold ki: $a\cdot f(2)+(a-1)\cdot f(-2)$

10 p **2.** Adott az $E(x)=\dfrac{(x+3)^2-2(x+1)-4}{x^2+3x}$ kifejezés, $x \in \mathbb{R}-\{-3,-1,0\}$. Mutasd ki, hogy $E(x)$ racionális szám, bármely $x \in \mathbb{R}-\{-3,-1,0\}$ esetén!

III. tétel (30 pont)

1. Ahhoz, hogy a tűzoltók felmásszanak az *ABCDEFGH* téglatest alakú épületre azon az *MN* rögzített létrán haladnak, melynek hossza 24 méter. Tudjuk, hogy az *MN* egyenes és talaj α síkja által bezárt szög 30°, és az épület (*ABFE*) síkjával bezárt szöge 45°, valamint az α és (*ABFE*) merőleges síkok. Határozd meg:



5 p **a)** a létra *M* végének távolságát az épülettől;

10 p **b)** az épület magasságát;

10 p **c)** ha $P = pr_{(ABE)}M$ és $Q = pr_{\alpha}N$, akkor számold ki a *PQ* szakasz hosszát!

2. ÉV VÉGI FELMÉRŐ *Hivatalból 10 pont.*

I. tétel (40 pont)

Az alábbi feladatokban válaszd ki az egyetlen helyes válasznak megfelelő betűt!

5 p **1.** Az $\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(2x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]:4^{-1}$ számítás eredménye:

A. $2x-3$ B. $2x+3$ C. $3x-2$ D. $3-2x$

5 p **2.** Az $6x^2-x-1=0$ és $3x^2+a=0$ egyenletnek egyetlen közös megoldása, ha:

A. $a\in\left\{-\frac{3}{4};-\frac{1}{3}\right\}$ *B.* $a\in\left\{-\frac{4}{3};-3\right\}$ *C.* $a\in\left\{-\frac{3}{4};-3\right\}$ D. $a\in\left\{-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right\}$

5 p **3.** Az $-2x+\frac{1}{3}\leq\frac{x}{-3}+\frac{1}{2}$ egyenlőtlenség legkisebb egész megoldása:

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

5 p **4.** Az $f\colon[-2;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x-3$ függvény grafikus képe egy A kezdőpontú zárt félegyenes. Az A pont koordinátái:

A. $(-1,-2)$ B. $(-2,-1)$ C. $(-1,2)$ D. $(-2,1)$

5 p **5.** Egy négyzet csúcsai és a négyzet síkján kívüli pont által meghatározott síkok száma:

A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

5 p **6.** *ABCDEFGH* egy kocka. Az $\frac{AG}{CH}$ arány értéke:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

5 p **7.** Egy csonka gúla térfogata 93,6% a származtató gúla térfogatának. A két test magasságának aránya:

A. 0,4 B. 0,2 C. 0,6 D. 0,8

5 p **8.** Ha egy egyenes körhenger magasságának hossza az alapkör átmérőjének egyharmada és a tengelymetszet átlója $2\sqrt{10}$ cm, akkor a henger térfogata:

A. 12π cm³ B. 18π cm³ C. 24π cm³ D. 16π cm³

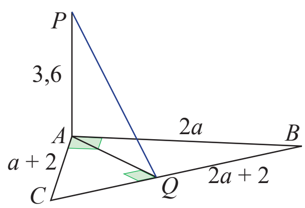
II. tétel (25 pont)

Az alábbi ábrákon a szakaszok hosszát centiméterben fejeztük ki. Oldd meg a feladatokat!

1. $PA\perp(ABC)$, $PA=3{,}6$ cm, $BAC\sphericalangle=90^\circ$, $AB=2a$, $BC=2a+2$, $AC=a+2$.

a) Határozd meg az a számot! **(5p)**

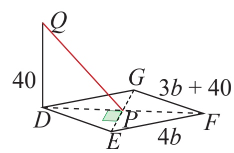
b) Határozd meg a P pontnak a BC egyenestől mért távolságát! **(10p)**



2. *DEFG* négyzet $QD\perp(DEG)$, $QD=40$ cm, $EF=4b$, $FG=3b+40$.

a) Határozd meg a b számot! **(5p)**

b) Határozd meg a Q pontnak az EG egyenestől mért távolságát! **(5p)**



III. tétel (25 pont)

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{3}{2}x+4$ és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-3$ függvény.

a) Határozd meg a következő kijelentések logikai értékét:

5 p p_1: A $P(4,-2)$ pont az f függvény grafikus képének eleme.

5 p p_2: A $Q(-\frac{1}{2},3)$ pont a g függvény grafikus képének eleme.

5 p p_3: Az f és g függvény grafikus képeinek metszéspontja az $M(2,1)$ pont.

10 p **b)** Ábrázold grafikusan ugyanabban a derékszögű koordináta-rendszerben az f és g függvényt!

ÚTMUTATÁSOK ÉS MEGOLDÁSOK

1. ismeretfelmérő (9. oldal)

I. 1. I; **2.** H; **3.** I; **4.** I; **5.** H; **6.** H; **7.** H; **8.** I. **II. 1.** Ha p az eredeti ár, akkor $\frac{90}{100}\cdot(p-10)=27$. Tehát $p = 40$ (lej). **2.** $DE \parallel BC$ $BD \parallel CE$, vagyis $BCED$ paralelogramma és DE = BC = 9 cm. A CDE háromszögben $CDE\sphericalangle = 90°$, $CD = AB$ =12 cm, DE = 9 cm, ahonnan CE =15 cm. **III. 1. a)** $a = 1$.
Az egyenlet $\frac{x+2}{3}-\frac{x-1}{4}=1$ alakú lesz és $M=\{1\}$. **b)** $x = 2$ megoldás, tehát $\frac{4}{3}-\frac{2-1}{4}=1$, vagyis $a=\frac{2}{3}$.
2. a) $AO = BO$, tehát O az AB szakasz felezőmerőlegesének egy pontja. A TO szakasz metszi az AB egyenest C-ben a kört pedig D-ben. Akkor $d(O, AB) = OC = \frac{r}{2}$. Azt kapjuk, hogy $AOC\sphericalangle = 60°$.
Mivel $AOD\Delta$ és $BOD\Delta$ egyenlő oldalú, azt kapjuk, hogy $\overset{\frown}{AB} = AOB\sphericalangle = 120°$; **b)** Az AOT háromszögben $AC\perp OT$, $C\in OT$ és $OA^2 = r^2$, valamint $OC\cdot OT=\frac{r}{2}\cdot 2r=r^2$. Következik, hogy $OAT\sphericalangle = 90°$ és az AOT derékszögű háromszögben azt kapjuk, hogy $AT = r\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ (cm). Mivel $AOT\Delta \equiv BOT\Delta$ (O.SZ.O), az következik, hogy $OBT\sphericalangle = 90°$, tehát $d(O, BT) = OB = r$, a BT pedig a kör érintője.

2. ismeretfelmérő (10. oldal)

I. 1. 2; **2.** 150; **3.** 3; **4.** –3 és 3; **5.** 4,2 cm; **6.** 8 cm2; **7.** 20 cm; **8.** 18 cm. **II. 1. a)** $\sqrt{n}\in M$ és $n = 10\cdot m + 4$, $m\in\mathbb{N}$. $4=10\cdot 0 + 4$ és $394 = 10\cdot 39 + 4$. Az M halmaznak 40 eleme van. **b)** $\sqrt{n}\in\mathbb{N}\Rightarrow n = k^2$, $k\in\mathbb{N}$. De $u(n) = 4 \Rightarrow u(k)\in\{2,8\}$. A feltétel igaz a 22, 82, 122, 182 számok esetén, valamint $M \cap \mathbb{N} = \{2, 8, 12, 18\}$. **c)** A 4, 14, 24, …, 394 természetes számok sorozatában csak négy négyzetszám, tehát az $M \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ halmaznak 40–4=36 eleme van. **2.** $AC = 2n$ és $BD = 2n + 2$, $n\in\mathbb{N}$. Legyen $AC\cap BD=\{O\}$. Következik, hogy $AO = n$, $BO = n + 1$ és $AOB\sphericalangle = 90°$. Az AOB háromszögben $\mathrm{tg}(ABD\sphericalangle)=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{n}{n+1}=\frac{3}{4}$, vagyis $n = 3$.
Akkor AO = 3 cm, BO = 4 cm és AB = 5 cm. **III. 1. a)** A kijelentés alapján:
$|\sqrt{2}-a|+|b-\sqrt{3}|=0 \Leftrightarrow |\sqrt{2}-a|=|b-\sqrt{3}|=0 \Rightarrow a=\sqrt{2}$ és $b=\sqrt{3}$. **b)** $x = 2$ és $|y| = 7$.
$M=\{(2,-7),(2,7)\}$. **2. a)** Legyen $EF \perp CD$, $F\in CD$. A CEF háromszögben azt kapjuk, hogy $CF = a\sqrt{10}$.
b) $T_{BCE} = T_{AECD} \Leftrightarrow \frac{AE+CD}{2}\cdot AD=\frac{BE\cdot AD}{2}$. Következik, hogy $BE = AE + CD$ vagy $b = 3\cdot a$.
c) Legyen $BM \perp CE$, $M \in CE$. Mivel $CE\cdot BM = BE\cdot AD$ azt kapjuk, hogy $BM = 3\sqrt{10}$ cm, majd $CM = 3\sqrt{10}$ cm. Következik, hogy $BCE\sphericalangle = 45°$.

Ismeretfelmérő INTERVALLUMOK. EGYENLŐTLENSÉGEK $\mathbb{R}$-BEN (40. oldal)
I. tétel 1. D; **2.** C; **3.** D; **4.** A; **5.** D; **6.** B; **7.** C; **8.** A.
II. tétel 1. $|r-3| < 10 < r+3 \Rightarrow r\in\{8; 9; 10; 11; 12\}$. **2.** $M=\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ és $M \cap I$ csak olyan egymás utáni számokat tartalmaz, melyek összege 5. Az esetek: $2 + 3 = 5$, tehát $M \cap (a; b) = \{2; 3\}$, vagyis $a = 1$, $b = 4$ vagy $-1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$. Tehát $M \cap (a; b) = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$, azaz $a = -2$, $b = 4$.
III. tétel 1. a) $B = [-3; -2)$; **b).** $A\cup B=[-3; -\frac{3}{2})$, $A \cap B = (-3; -2)$, $A\setminus B=[-2; -\frac{3}{2})$, $B\setminus A = \{-3\}$.
2. a) $M_1 = (-\infty; \frac{1}{4})$, $M_2=(\frac{1}{6}; +\infty)$; **b)** $M_1\cap M_2=(\frac{1}{6}; \frac{1}{4})$, $n\in\mathbb{N}$ és $\frac{1}{6}<\frac{1}{n}<\frac{1}{4}$. Következik, hogy $n = 5$.

Ismeretfelmérő ALGEBRAI SZÁMÍTÁSOK ℝ-BEN (82. oldal)
I. tétel 1. A; **2.** B; **3.** D; **4.** A; **5.** C; **6.** C; **7.** B; **8.** C. **II. tétel 1.a)** $x = 2$; **b)** $x = 2,\ y = -\frac{3}{2}$.

2. a) $F(a,b) = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{a+b}{a+b+1}$; **b)** $a + b = \sqrt{3} - 1$ és $F = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

2. a) $-\frac{3x^2}{1-x^2} = \frac{3x^2}{-(1-x^2)} = \frac{3x^2}{x^2-1}$; **b)** $E(x) = \frac{2x+1}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{4x^2-1} = \frac{x-1}{2x-1}$; **c)** $2 \cdot \frac{n-1}{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2n-1} \in \mathbb{Z}$.
Azt kapjuk, hogy $n = 0$ és $n = 1$. Csak az $n = 0$ a megfelelő.

Ismeretfelmérő FÜGGVÉNYEK (112. oldal)
I. tétel 1. C; **2.** B; **3.** C; **4.** A; **5.** D; **6.** A; **7.** B; **8.** A. **II. *tétel* 1. a)** $u = 4$; **b)** $v = -1$;
c) $O\ (0, 0)$; **d)** $A(2, 4) \in d$, $B(2, -1) \in d'$; $OB^2 + OA^2 = AB^2 \Rightarrow OA \perp OB \Leftrightarrow d \perp d'$. **2. a)** Az üres helyeket 240 000; 264 600; 277 830 értékekkel egészítjük ki. **b)** 1 034 430 személygépkocsi.

Ismeretfelmérő A TÉRMÉRTAN ELEMEI (188. oldal)
I. tétel 1. H**; 2.** I**; 3.** I**; 4.** H. **II. tétel 1.** a. 4; b. 5; c. 3; d. 2.
III. tétel 1. a) ábra; **b)** Legyen $P = pr_{BD}A$. Azt kapjuk, hogy $pr_{(BDH)}AH = PH = 2\sqrt{30}$ cm;
c) $pr_{(ACD)}BH = BD$, $BDH\Delta$ derékszögű egyenlő szárú háromszög és $(BH,(ACD))\sphericalangle = 45°$; **2. a)** MD az ACE háromszög középvonala, tehát $AE \parallel MD$; **b)** Ha P a BC él felezőpontja, akkor azt kapjuk, hogy $BE \parallel DP$ és $(AD; BE)\sphericalangle = (AD; DP)\sphericalangle = u$; $\sin u \cdot \cos u + \operatorname{tg} u = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Ismeretfelmérő MÉRTANI TESTEK FELSZÍNE ÉS TÉRFORGATA (217. oldal)
I. tétel 1. C; **2.** D; **3.** C; **4.** B; **5.** A; **6.** D; **7.** D; **8.** A
II. tétel 1. a) $h = 80$ m; **b)** $V_{gát} = 3\,432 \cdot 103$ m³. **2. a)** $H_{kúp} = 3{,}9 - 3{,}2 = 0{,}7$ m.
$V_{sátor} = V_{henger} + V_{kúp} = \pi \cdot 2{,}42 \cdot 3{,}2 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}42 \cdot 0{,}7 = 19{,}776\,\pi = 62{,}09$ (m³); **b)** Legyen O a henger alapjának középpontja. $d(E, O) = 4{,}8 = ED + DO = ED + 2{,}4$, tehát $ED = 2{,}4$ (m). Hasonlóan $FC = 2{,}4$ (m). $ADE\Delta \equiv BCF\Delta$ (B.B.). Azt kapjuk, hogy $AE = BF = 4$. A használt kötél hossza $2 \cdot 4$ m $= 8$ m. **3.** $R_1 = 9$ cm, $R_2 = 12$ cm és $F_1 + F_2 = F_3$. A $4\pi R_1^2 + 4\pi R_2^2 = 4\pi R_3^2$ egyenlőségből azt kapjuk, hogy $R_3 = 15$ cm.

1. év végi felmérő
I. tétel. 1. B; **2.** A; **3.** D; **4.** A; **5.** B; **6.** C; **7.** A; **8.** D. **II. tétel. 1. a)** grafikon; **b)** $a = 2$; **c)** 3.
III. tétel. a) $pr(ABE)\ M = P$, következik $d(M, (ABE)) = MP$. $pr(ABE)\ MN = PN$ és $MNP\sphericalangle = 45°$.
Tovább $MP = MN : \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ (cm); **b)** $pr\alpha\ MN = MQ$ és $NMQ\sphericalangle = 30°$. Az épület magassága 12 m.
c) Az NQP háromszögben $NQP\sphericalangle = 90°$, $NQ = 12$ m, és Pitagorasz-tétel segítségével $PQ = 12$ m.

2. év végi felmérő
I. tétel. 1. D; **2.** A; **3.** B; **4.** B; **5.** A; **6.** D; **7.** A; **8.** B. **II. tétel. 1. a)** $a = 4$; **b)** $AQ = 4{,}8$ cm, $d(P, BC) = PQ = 6$ cm. **2. a)** $EF = FG$ és $b = 40$ cm; **b)** $DP = 20$ cm, $d(Q, EG) = QP = 10$ cm.
III. tétel. 1. a) p_1: IGAZ, p_2: HAMIS, p_3: IGAZ. **b)** grafikus kép.

Programa școlară poate fi accesată la adresa:
http://programe.ise.ro.

A tankönyv nyomtatott és digitális változattal is rendelkezik. A nyomtatott és digitális változat tartalma azonos, azonban az utóbbit interaktív tanulást lehetővé tevő multimédiás tevékenységek egészítik ki (interaktív gyakorlatok, oktató játékok, animációk, filmek, szimulációk).

A helyes gondolkodás mindig matematika, legalábbis matematikailag kifejezhető. Aki matematikát tanul, gondolkodni tanul.

Grigore Moisil

Tradiţie din 1989
www.litera.ro
ISBN 978-606-33-7089-2
9 786063 370892

LITERA