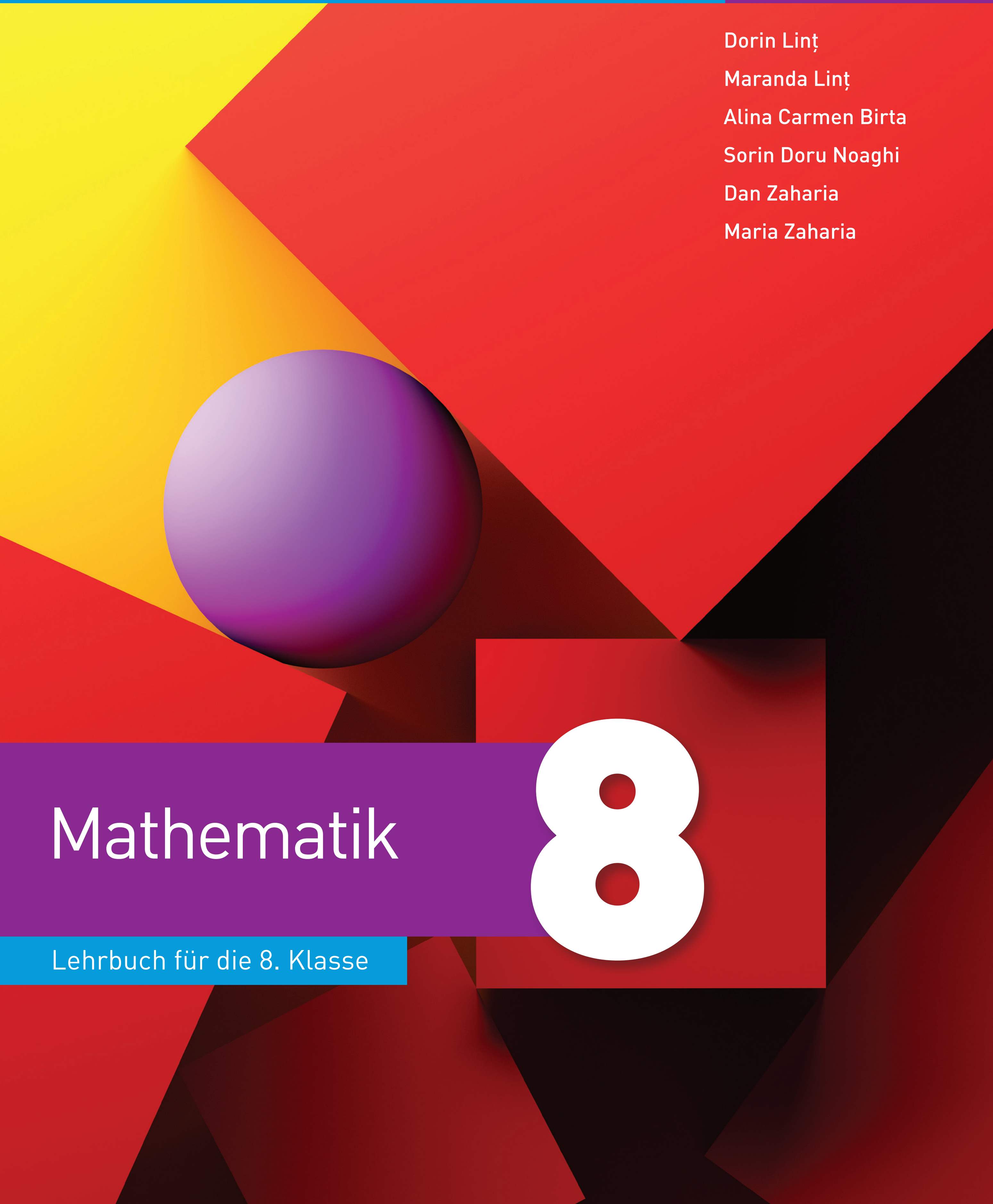
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

LITERA

Dorin Linț
Maranda Linț
Alina Carmen Birta
Sorin Doru Noaghi
Dan Zaharia
Maria Zaharia



Mathematik 8

Lehrbuch für die 8. Klasse

Acest manual școlar este proprietatea Ministerului Educației și Cercetării.
Acest manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară
aprobată prin OM nr. 3393 din 28.02.2017.

116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

LITERA

Dorin Linț

Maranda Linț

Alina Carmen Birta

Sorin Doru Noaghi

Dan Zaharia

Maria Zaharia

Mathematik 8

Lehrbuch für die 8. Klasse

Dieses Lehrbuch ist durch den Ministererlass Nr. 5523/07.09.2020 genehmigt worden.

Das Lehrbuch in gedruckter Form wird den Schülerinnen und Schülern kostenlos zur Verfügung gestellt und ist ab dem Schuljahr 2020/21 für die Dauer von vier Schuljahren übertragbar.

Schulamt ....

Schule/Kolleg/Lyzeum..

DIESES LEHRBUCH WURDE VERWENDET VON:

Jahr	Name des Schülers/der Schülerin	Klasse	Schuljahr	Zustand des Lehrbuchs* in gedruckter Form	
				bei Empfangnahme	bei Rückgabe
1					
2					
3					
4					

* *Der Zustand des Buches wird beschrieben als: neu, gut, gepflegt, unbefriedigend, beschädigt.*
- Die Lehrkräfte überprüfen die in der Tabelle eingetragenen Informationen.
- Die Schülerinnen und Schüler sind angehalten, keinerlei Eintragungen ins Lehrbuch vorzunehmen.

Matematică. Manual pentru clasa a VIII-a
Dorin Linţ, Maranda Linţ, Alina Carmen Birta, Sorin Doru Noaghi, Dan Zaharia, Maria Zaharia

Referenţi ştiinţifici: lector univ. dr., Marius-Nicolae Heljiu, Departamentul de Matematică-Informatică, Facultatea de Ştiinţe, Universitatea din Petroşani
prof. dr. Dan-Ştefan Marinescu, Colegiul Naţional „Iancu de Hunedoara", Hunedoara

Traducere în limba germană:
prof. Carmen Reich-Sander, Colegiul Naţional „Samuel von Brukenthal" Sibiu
prof. Mihaela Hadăr, Colegiul Naţional „Samuel von Brukenthal" Sibiu
conf. dr. Radu George Creţulescu, Universitatea „Lucian Blaga" Sibiu

LITERA®
Editura Litera
tel.: 0374 82 66 35; 021 319 63 90; 031 425 16 19
Mobil: 0770 408 924
e-mail: contact@litera.ro

Ne puteţi vizita pe
www.litera.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Mathematik : Lehrbuch für die 8. Klasse /
Dorin Linţ, Maranda Linţ, Alina Carmen Birta, … –
Bucureşti : Litera, 2021
ISBN 978-606-33-7092-2
I. Linţ, Dorin
II. Linţ, Maranda
III. Birta, Alina Carmen
51

Editor: Vidraşcu şi fiii
Redactori: Carmen Birta, Gabriela Niţă
Corector: Carmen Bîtlan
Credite foto: Dreamstime, Shutterstock
Copertă: Vlad Panfilov
Tehnoredactare şi prepress: Banu Gheorghe

INHALT

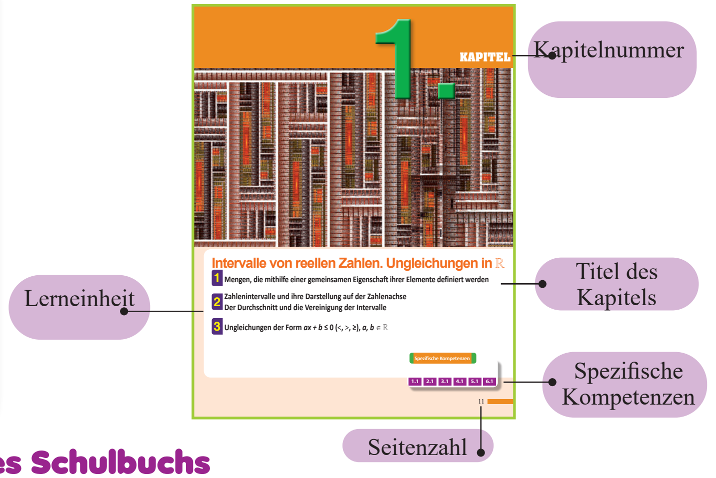
Wiederholungsaufgaben / 7
Selbstbewertungstest / 9
1.Kapitel. Intervalle von reellen Zahlen. Ungleichungen in $\mathbb{R}$ / 11
1. Mengen, die mithilfe einer gemeinsamen Eigenschaft definiert werden / 12
L1. Mengen / 12
L2. Beziehungen zwischen Mengen. Operationen mit Mengen / 14
2. Zahlenintervalle und ihre Darstellung auf der Zahlenachse. Der Durchschnitt und die Vereinigung der Intervalle / 17
L1. Die Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlenachse. Teilmengen einer Geraden / 17
L2. Intervalle von reellen Zahlen und ihre Darstellung auf der Zahlenachse / 19
L3. Operationen mit Intervallen von reellen Zahlen / 24
3. Ungleichungen der Form $ax + b \leq 0$ $(<, >, \geq)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ / 26
L1. Die Ungleichungsbeziehungen: $\leq, \geq, <, >$ in der Menge der reellen Zahlen. Eigenschaften / 26
L2. Ungleichungen der Form $ax + b \leq 0$ $(<, >, \geq)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ / 29
L3. Ungleichungen, die auf die Form $ax + b \leq 0$ $(<, >, \geq)$, $a, b \in \mathbb{R}$, zurückgeführt werden können / 35
Selbstbewertungstest / 40
2.Kapitel. Algebraisches Rechnen in $\mathbb{R}$ / 41
1. Operationen mit reellen Zahlen / 42
L1. Operationen mit reellen Zahlen / 42
L2. Rechnen mit reellen Zahlen, die durch Buchstaben vertreten werden / 44
2. Formeln zum schnellen Rechnen / 50
L1. Das Quadrat eines Binoms. Das Produkt von Summe und Differenz zweier Terme / 50
L2. Anwenden der Formeln zum schnellen Rechnen beim Rationalisieren der Nenner einiger Brüche / 53
3. Faktorzerlegung mithilfe der Rechenregeln / 55
L1. Faktorzerlegung mithilfe des gemeinsamen Faktors / 55
L2. Faktorzerlegung mithilfe der Formeln zum schnellen Rechnen / 57
L3. Andere Methoden für die Faktorzerlegung / 59
L4. Praktische Anwendungen / 63
4. Algebraische Brüche. Operationen mit algebraischen Brüchen / 65
L1. Algebraische Brüche. Der Definitionsbereich eines algebraischen Bruchs. Der Wert eines algebraischen Bruchs/ 65
L2. Erweitern und Kürzen eines Verhältnisses von reellen Zahlen, das mithilfe von Buchstaben gegeben ist / 68
L3. Operationen mit algebraischen Brüchen / 71
5. Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ / 75
L1. Die Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten / 75
L2. Aufgaben, die mithilfe von Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelöst werden / 79
Selbstbewertungstest / 82
3. Kapitel. Funktionen / 83
1. Funktionen, die auf endlichen Mengen definiert sind. Der Graf einer Funktion. Die geometrische Darstellung der Grafen einiger numerischer Funktionen / 84
L1. Der Begriff Funktion. Möglichkeiten, eine Funktion zu definieren / 84
L2. Der Graf einer Funktion. Die geometrische Darstellung des Grafen einer numerischen Funktion / 88
2. Funktionen der Form $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Die geometrische Deutung. Grafen lesen / 91
L1. Funktionen der Form $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ / 91
L2. Die grafische Darstellung der Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und D ein Intervall ist. Grafen lesen / 95
3. Elemente der Statistik / 100
L1. Sortieren und Organisieren von Daten nach funktionalen Abhängigkeitskriterien, absolute Häufigkeit / 100
L2. Geometrische Darstellung statistischer Reihen / 104
L3. Zentrale Trendindikatoren / 107
Selbstbewertungstest / 112
4. Kapitel. Elemente der Raumgeometrie / 113
1. Punkte, Geraden, Ebenen / 114
L1. Punkte, Geraden, Ebenen: Bezeichnungen, Darstellungen. Bestimmen einer Geraden / 114
L2. Bestimmen der Ebene, Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen / 117
L3. Die gegenseitige Lage zweier Geraden im Raum / 119
L4. Die Lage einer Geraden in Bezug auf eine Ebene / 121
L5. Gegenseitige Lage zweier Ebenen. Parallele Ebenen: Beschreibung und Darstellung / 123
2. Geometrische Körper / 125
L1. Die Pyramide: Darstellung, charakteristische Elemente / 125
L2. Die Abwicklung einer Pyramide (das Netz der Pyramide) / 128
L3. Das gerade Prisma: Darstellung, charakteristische Elemente / 130
L4. Das gerade Prisma: seine Abwicklung / 134
L5. Der gerade Kreiszylinder: Darstellung, charakteristische Elemente, Abwicklung / 136
L6. Der gerade Kreiskegel: Darstellung, charakteristische Elemente, Abwicklung / 140
3. Parallelität im Raum / 143
L1. Parallele Geraden, der Winkel zweier Geraden im Raum / 143
L2. Die Gerade, die parallel zu einer Ebene ist / 147
L3. Parallele Ebenen / 149
L4. Schnitte der geometrischen Körper mit Ebenen parallel zur Grundfläche / 152
4. Orthogonalität / 157
L1. Senkrechte Geraden; die Gerade senkrecht auf eine Ebene; der Abstand von einem Punkt zu einer Ebene / 157
L2. Der Abstand zwischen zwei parallelen Ebenen, die Höhe des geraden Prismas, des Quaders, des geraden Kreiskegels, des Pyramidenstumpfes und des geraden Kreiskegelstumpfes / 162
L3. Senkrechte Ebenen, Diagonalschnitte, Achsenschnitte / 166
5. Orthogonale Projektionen im Raum / 172
L1. Projektionen von Punkten, Strecken und Geraden auf eine Ebene / 172
L2. Der Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene, die Länge der Projektion einer Strecke auf eine Ebene / 175
L3. Flächenwinkel, ebener Winkel eines Flächenwinkels, Winkel zweier Ebenen, senkrechte Ebenen / 178
6. Der Lehrsatz der drei Senkrechten / 182
L1. Der Lehrsatz der drei Senkrechten. Berechnen des Abstandes von einem Punkt zu einer Geraden / 182
L2. Die Kehrsätze des Lehrsatzes der drei Senkrechten. Berechnen des Abstandes zwischen zwei parallelen Ebenen / 185
Selbstbewertungstest / 188
5. Kapitel. Flächen und Volumen von geometrischen Körpern / 189
1. Abstände und Winkelmaße auf den Flächen und im Inneren der gelernten geometrischen Körper / 190
L1. Berechnen der Abstände auf den Flächen oder im Inneren der gelernten geometrischen Körper / 190
L2. Berechnen von Winkelmaßen auf Seitenflächen oder innerhalb der bekannten geometrischen Körper / 193
2. Flächen und Volumen von Polyedern / 196
L1. Fläche und Volumen eines geraden Prismas / 196
L2. Mantelfläche, Oberfläche und Volumen der regelmäßigen Pyramide und des regelmäßigen Tetraeders / 201
L3. Flächen und Volumen des regelmäßigen Pyramidenstumpfes / 205
3. Flächen und Volumen der runden geometrischen Körper / 208
L1. Mantelfläche, Oberfläche und Volumen des geraden Kreiszylinders / 208
L2. Mantelfläche, Oberfläche und Volumen des geraden Kegels und des geraden Kegelstumpfes / 210
L3. Die Kugel. Oberfläche und Volumen/ 214
Selbstbewertungstest / 217
Jahreswiederholung. Syntheseaufgaben / 218
Abschlusstests / 221

Aufbau des Lehrbuchs

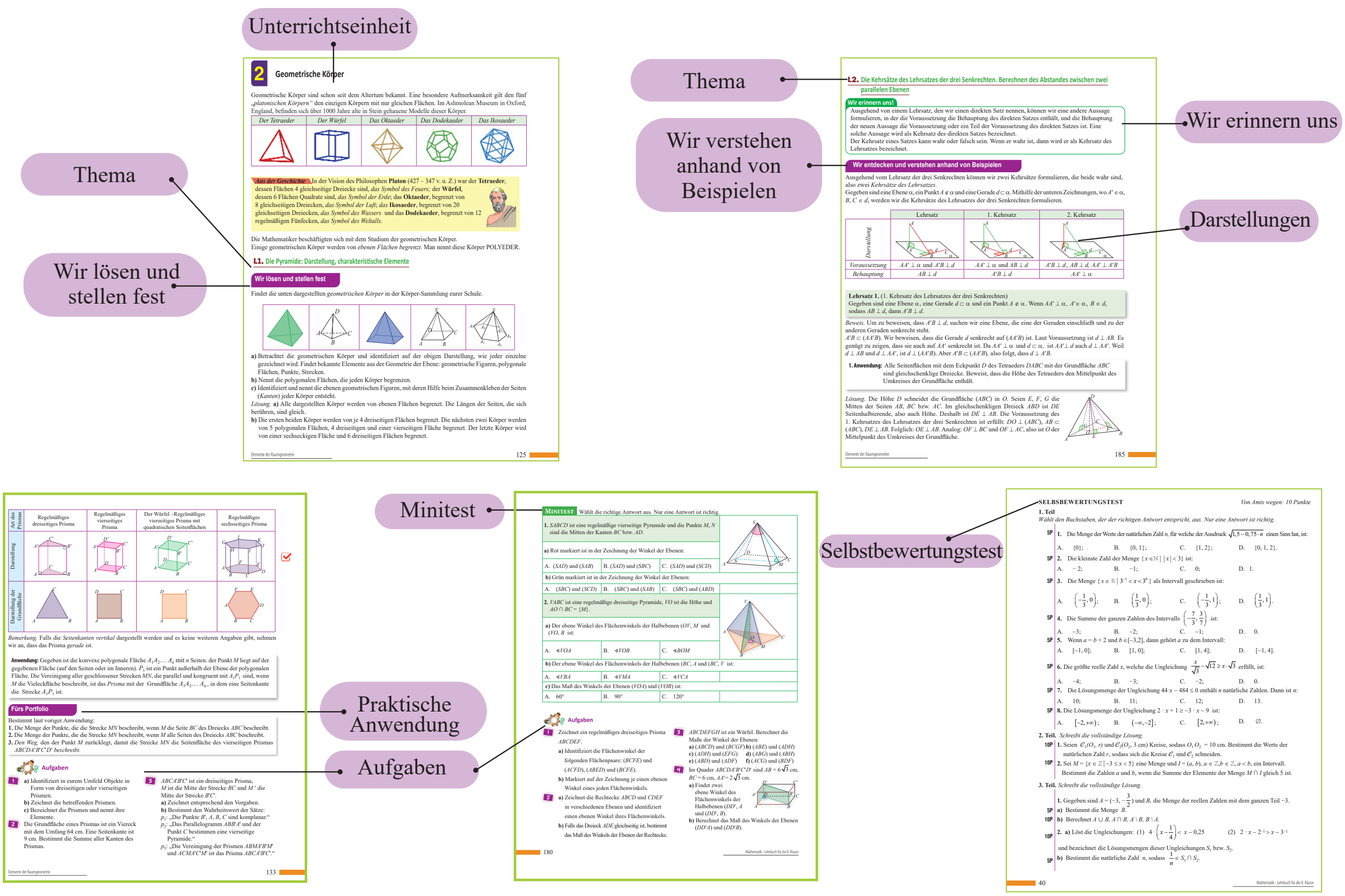
Druckvariante

Das Schulbuch *Mathematik für die 8. Klasse* umfasst 5 Kapitel, 20 Unterrichtseinheiten und entspricht den Forderungen des Lehrplans. Der Unterricht wird durch interaktive Lerneinheiten begleitet, die einen praktischen, anwendbaren Charakter haben und die Aneignung der spezifischen Kompetenzen ermöglichen. Die Lerneinheiten sind in verschiedene Lektionen unterteilt und können in 2–6 Unterrichtsstunden durchgenommen werden.

Kapitelseite



Seiten des Schulbuchs



Erklärung der verwendeten Abkürzungen

SA – Selbständige Arbeit **PA** – Partnerarbeit **FU** – Frontalunterricht **GA** – Gruppenarbeit

Rubriken

Wir erinnern uns!	Konzepte, Wissen, die die Schüler in den vorherigen Lektionen erworben haben, die notwendig sind, um die neuen Inhalte zu verstehen
Wir lösen und stellen fest	Relevante Übungen/Aufgaben zum Festigen der neuen Begriffe
Wir verstehen anhand von Beispielen	Gelöste Beispiele zu den neuen Begriffen
Anwendungen	Gelöste Aufgaben in fachübergreifenden Kontexten
Praktische Anwendung	Gruppenarbeit
Fürs Portfolio	Aufträge zum Erstellen des Portfolios
Achtung!	Vorsicht beim Verwenden der Eigenschaften
Aufgaben	Übungen und Aufgaben
Minitest/ Selbstbewertungstest	Aufgaben zur Evaluation

Digitale Variante

Die digitale Variante gibt es in deutscher Übersetzung nicht.

Allgemeine und spezifische Kompetenzen gemäß OMEN 3393/28.02.2017

1. **Erkennen von Daten, Größen und mathematischen Beziehungen in gegebenen Kontexten**
   - **1.1.** Die Zugehörigkeit einer reellen Zahl zu einer Zahlenmenge erkennen.
   - **1.2.** Die Elemente eines algebraischen Ausdruckes erkennen.
   - **1.3.** Funktionale Abhängigkeiten in verschiedenen gegebenen Situationen erkennen.
   - **1.4.** Ebene Figuren oder ihre charakteristischen Elemente in räumlichen Konfigurationen identifizieren.
   - **1.5.** Die geometrischen Körper und ihre Elemente, die für die Berechnung ihrer Fläche oder ihres Volumens erforderlich sind, erkennen.
2. **Quantitative, qualitative oder strukturelle mathematische Daten aus verschiedenen Informationsquellen bearbeiten**
   - **2.1.** Verschiedene Operationen mit Intervallen auf der Zahlenachse oder mit Zahlenmengen durchführen.
   - **2.2.** Anwenden der Rechenregeln für reelle Zahlen in algebraischen Ausdrücken.
   - **2.3.** Eine funktionale Abhängigkeit mithilfe von Diagrammen, Tabellen oder Formeln beschreiben.
   - **2.4.** Eine räumliche Konfiguration mithilfe von Zeichnungen oder Modellen darstellen.
   - **2.5.** Verschiedene Daten für die Berechnung der Elemente der geometrischen Körper anwenden.
3. **Verwenden von mathematischen Begriffen und Algorithmen in verschieden Kontexten**
   - **3.1.** Methoden für Operationen mit Intervallen und Lösen von Ungleichungen in R verwenden.
   - **3.2.** Verwenden von Formeln und Algorithmen zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen.
   - **3.3.** Darstellen von Funktionen.
   - **3.4.** Eigenschaften der Parallelität und Orthogonalität anwenden.
   - **3.5.** Auswählen der passenden Methoden zum Berechnen der Elemente geometrischer Körper.
4. **Anwenden der Fachsprache in verschiedenen Kontexten**
   - **4.1.** Fachbegriffe für Mengen, Zahlenintervalle und Ungleichungen verwenden.
   - **4.2.** Algebraisches Rechnen in konkreten Situationen anwenden.
   - **4.3.** Funktionale Abhängigkeiten mithilfe von Fachbegriffen ausdrücken.
   - **4.4.** Geometrische Konstruktionen mithilfe von Fachbegriffen beschreiben.
   - **4.5.** Eigenschaften geometrischer Figuren und Körper mithilfe von Fachbegriffen erklären.
5. **Mathematische Eigenschaften in gegebenen Situationen erkennen**
   - **5.1.** Interpretieren einer gegebenen Situation mithilfe von Intervallen und Ungleichungen.
   - **5.2.** Interpretieren einer gegebenen Situation mithilfe des algebraischen Rechnens.
   - **5.3.** Funktionen fachübergreifend anwenden.
   - **5.4.** Auswählen der passenden geometrischen Darstellung zum Berechnen von Größen im Raum.
   - **5.5.** Erkennen der notwendigen Bedingungen für eine geometrische Konstruktion.
6. **Mathematisches Modellieren einer gegebenen Situation**
   - **6.1.** Lösen einer gegebenen Situation mithilfe von Intervallen und Ungleichungen.
   - **6.2.** Interpretieren einer praktischen Situation mithilfe des algebraischen Rechnens.
   - **6.3.** Funktionen im Alltag anwenden.
   - **6.4.** Auswählen der passenden geometrischen Darstellung bei praktischen Anwendungen.
   - **6.5.** Berechnen von Abständen, Flächen und Volumen in reellen Situationen.

Wiederholungsaufgaben

1 Gegeben sind die Zahlen:

$a = \frac{12}{\sqrt{6}} + \sqrt{(1-\sqrt{6})^2} + |-1|$ und

$b = |2-\sqrt{12}| + 2 \cdot \sqrt{(-1+\sqrt{3}-3\sqrt{6})^2}$.

a) Führt die Rechnungen aus und bestimmt die kleinere von den Zahlen a und b, also $m = min\{a; b\}$, danach die größere von den Zahlen a und b, also $M = max\{a; b\}$.

b) Man bezeichnet mit m_a das arithmetische Mittel und mit m_g das geometrische Mittel der Zahlen a und b. Berechnet die beiden Mittel für die Zahlen a und b mithilfe der Formeln $m_a = \frac{a+b}{2}$, $m_g = \sqrt{a \cdot b}$.

c) Prüft die Ungleichungen $m \le m_g \le m_a \le M$ mithilfe der Ergebnisse von Punkt b).

2 Zeigt, dass:

a) $\sqrt{225^2 - 224 \cdot 225}$ und $\sqrt{1+3+5+7+....+35+37}$ rationale Zahlen sind.

b) $\sqrt{499 \cdot 500}$ und $\sqrt{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 35 \cdot 37}$ irrationale Zahlen sind.

c) für jedes $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{4^n + 2^{2n+3}}$ eine rationale und $\sqrt{5 \cdot n + 7}$ eine irrationale Zahl ist.

3 Gegeben sind die Zahlen $x = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$, $y = \sqrt{98} - \sqrt{128} + \sqrt{50}$ und $z = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}$.

a) Berechnet die Zahlen und schreibt sie in steigender Reihenfolge.

b) Bestimmt die Zahl $x \cdot \sqrt{3} + |z| - y \cdot \sqrt{2}$.

4 Wenn $a = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ und $b = \sqrt{4} + \sqrt{8} - \sqrt{12}$, berechnet $2 \cdot a - b$.

5 Schreibt die Zahlen in fallender Reihenfolge:

$\left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)^{-1}$, $3\sqrt{27}$, $|-\sqrt{75}|$.

6 Bestimmt die Zahl a, sodass

$$\frac{a}{3} = \frac{a+5}{4}.$$

7 Bestimmt die Zahl b, wenn $b \ge 0$ und $\sqrt{4b^2} + 3 = b + \sqrt{(-5)^2}$.

8 Bestimmt die Zahl c, wenn $c < 0$ und $\sqrt{\frac{9c^2}{16}} + 0{,}25 = c + 2$.

9 Wenn $a = \sqrt{52} + \sqrt{208}$, zeigt, dass $a - 19 > 0$.

10 Berechnet das arithmetische Mittel von neun natürlichen von null verschiedenen Zahlen a_1, a_2, ..., a_9, wenn das arithmetische Mittel der Zahlen a_1 und a_2 gleich 1,5 ist, das arithmetische Mittel der Zahlen a_3, a_4, a_5 gleich 4 ist und das arithmetische Mittel der Zahlen a_6, a_7, a_8, a_9 gleich 7,5 ist.

11 Nach einer Ermäßigung um 8 % kostet ein Fernseher 1288 Lei.

a) Bestimmt den Preis vor der Ermäßigung.

b) Bestimmt die kleinste natürliche Zahl p, sodass bei einer Ermäßigung um p % der Fernseher weniger als 1000 Lei gekostet hätte.

12 52 % der gesamten Anzahl der Bücher einer Schulbibliothek sind für die Fachrichtung Human, 44 % davon sind für die Fachrichtung Real und der Rest, d. h. 864, sind Alben und Wörterbücher.

a) Bestimmt die Anzahl der Bücher der Schulbibliothek.

b) Bestimmt die kleinste Anzahl von Büchern, die gekauft werden sollen, damit es für beide Fachrichtungen gleich viele Bücher gibt.

13 Sei $A = 2^n \cdot 25^{n+1} - 9 \cdot 5^n \cdot 20^n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmt die Zahl A, wenn $n \in \{0, 1\}$.

b) Bestimmt die Werte von n, sodass $A < 10^6$.

14 Löst die Gleichungssysteme:

a) $\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 10 \\ \frac{x}{2} + y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 \cdot \left(x + \sqrt{2}\right) + 3 \cdot \left(y - \sqrt{2}\right) = 10\sqrt{2} \\ \frac{x}{y} = 0{,}(3) \end{cases}$

15 Auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ABC werden die Punkte $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in AC$ gezeichnet, sodass $DE \parallel AC$, $EF \parallel AB$. P ist der Schnittpunkt der Geraden AE und DF. Zeigt, dass:

a) $ADEF$ ein Parallelogramm ist.

b) $CD = 2 \cdot PA$.

c) $BC = AD + FU$.

d) $\sphericalangle AEB - \sphericalangle CAE = 60°$.

16 In dem Dreieck ABC ist $\sphericalangle BAC = 90°$, $BC = 13$ cm und $\text{tg}\sphericalangle ACB = \frac{5}{12}$. Berechnet:

a) die Länge der Projektion der Kathete AC auf die Hypotenuse.

b) die Länge des Radius des Umkreises des Dreiecks ABC.

c) die Länge des Inkreises des Dreiecks ABC.

17 Im Äußeren des Dreiecks ABC werden die rechtwinkligen Dreiecke ABD und ACE konstruiert, sodass $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACE = 90°$ und $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAD$. Zeigt, dass:

a) die Dreiecke ABD und ACE ähnlich sind.

b) wenn $AD = AE$, das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

18 Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit $AB = AC$. AD ist die Winkelhalbierende des Winkels BAC, $D \in BC$ und E ist der Mittelpunkt der Seite AB. Die Gerade DE schneidet die Parallele durch A zu der Geraden BC in F. G ist der symmetrische Punkt von F in Bezug auf A.

a) Zeichnet entsprechend den Angaben.

b) Zeigt, dass: b_1) $ADBF$ ein Rechteck ist; b_2) $ABDG$ ein Parallelogramm ist.

c) Findet eine Beziehung zwischen $AB = a$ und $BC = b$, sodass $BCGF$ ein regelmäßiges Vieleck ist.

19 Auf den Seiten AB und BC des Quadrates $ABCD$ werden die Punkte E bzw. F angenommen, sodass $\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC}$.
Berechnet das Maß des Winkels (DE, FU).

20 Gegeben wird ein gleichschenkliges Trapez mit orthogonalen Diagonalen (sie stehen senkrecht aufeinander). B ist die Länge der großen Grundlinie, b die Länge der kleinen Grundlinie, h ist die Höhe des Trapezes und d die Länge der Diagonale des Trapezes. Zeigt, dass $h = \frac{B+b}{2}$ und $h = \frac{d\sqrt{2}}{2}$.

21 Im Trapez $ABCD$ ist $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $AB = 8$ cm, $CD = 2$ cm, $AD = 4$ cm. Die Parallele durch D zu BC schneidet AB in E, $AC \cap DE = \{F\}$, P ist die Projektion des Punktes F auf die Gerade AD.

a) Berechnet das Verhältnis zwischen dem Flächeninhalt des Vierecks $BCDE$ und dem Flächeninhalt des Trapezes.

b) Berechnet die Länge der Strecke PA.

c) Zeigt, dass die Geraden BD und EP parallel sind.

22 Im rechtwinkligen Dreieck ABC, $\sphericalangle C = 90°$, ist D ein Punkt auf der Seite AB, sodass $AD = 10$ cm und $BD = 20$ cm.

a) Berechnet das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke ACD und BCD.

b) Wenn $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$, berechnet die Längen der Strecken AC, BC und DC.

23 Eine Sehne eines Kreises hat die Länge 48 cm und liegt im Abstand von 18 cm zu dem Mittelpunkt des Kreises. Berechnet die Länge des Kreises und den Flächeninhalt des Diskus.

24 Auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$, $r = 6$ cm werden die Punkte A, B angenommen, sodass $\sphericalangle AOB = 120°$. Der Punkt D liegt auf der Tangente in B an den Kreis, im Inneren des Winkels AOB, sodass $BD = 6$ cm. Der Kreis mit dem Mittelpunkt in D und dem Radius DB schneidet den Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ ein zweites Mal in P. Berechnet die Maße der kleinen Bögen $\overset{\frown}{AP}$ und $\overset{\frown}{BP}$.

25 In dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ ist die Sehne AB parallel zu dem Durchmesser CD und sie bestimmen das Viereck $ABCD$ mit $BO \parallel AD$. Wenn $AB = 4$ cm, berechnet den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ und die Längen der Bögen $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{BC}$.

26 In dem Dreieck MNP, $MP = 8$ cm, $PN = 6$ cm, $\sphericalangle MPN = 60°$ ist MA Höhe, $A \in NP$. Konstruiert das Rechteck $AMBN$. Berechnet:

a) den Umfang des Rechtecks $AMBN$;

b) den Sinus des Winkels BPM;

c) den Wert des Verhältnisses $\frac{AQ}{QM}$, wobei Q der Schnittpunkt der Geraden AM und BP ist.

27 Sei B ein Punkt auf der Strecke AC. Auf derselben Seite der Geraden AC werden die Quadrate $ABMN$ und $BCEF$ konstruiert. Zeigt, dass: **a)** $AF = MC$; **b)** $AM \perp FC$.

28 $ABCD$ ist ein Trapez, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD = CD = BC$, $\sphericalangle B = 60°$ und $CD = 4$ cm.

a) Berechnet die Länge der großen Grundlinie AB.

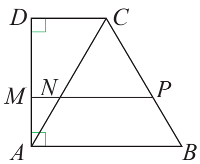
b) Wenn $AD \cap BC = \{P\}$, berechnet den Wert des Verhältnisses $\frac{PD}{PA}$.

29 Die Halbgerade AA' ist die Winkelhalbierende des Winkels BAC, $A' \in BC$, $A'D \parallel AC$ und $A'E \parallel AB$, $D \in AB$, $E \in AC$. $AB = 24$ cm, $AC = 36$ cm, $BC = 30$ cm.

a) Bestimmt die Art des Vierecks $ADA'E$.

b) Berechnet den Umfang der Vierecke $ADA'E$ und $ADA'C$.

30 $ABCD$ ist ein rechtwinkliges Trapez, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$ und $AB \parallel CD \parallel MN$.



a) Betrachtet die Zeichnung und schreibt eine Reihe gleicher Verhältnisse. Begründet eure Antwort.

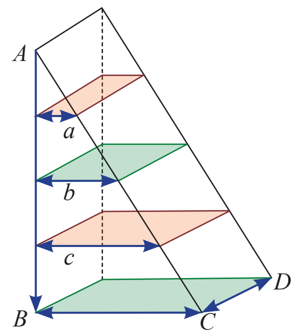
b) Falls das Dreieck CNP gleichseitig ist und $AD = 7\sqrt{3}$ cm, berechnet den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

31 Auf den Seiten MN und MP des Dreiecks MNP werden die Punkte A bzw. B angenommen, sodass $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MPN$.

a) Zeigt, dass $\Delta MAB \sim \Delta MPN$.

b) Wenn $MN = 10$ cm, $NP = 15$ cm, $MP = 12$ cm und $AB = 9$ cm, berechnet den Umfang des Vierecks $ABPN$.

32 Vier rechteckige Bücherregale sind im gleichen Abstand voneinander entfernt, wie in der Zeichnung nebenan. Wenn $AB = 1{,}80$ m, $BC = 0{,}80$ m und $CD = 0{,}30$ m, berechnet die Dimensionen der anderen Regale.



33 In dem Rhombus $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$ ist der Punkt M die Projektion des Punktes O auf die Gerade AB. $AM = 1{,}8$ cm und $MB = 3{,}2$ cm. Berechnet:

a) die Länge der Strecke OM.

b) den Flächeninhalt des Rhombus.

SELBSTBEWERTUNGSTEST NR. 1

Von Amts wegen: 10 Punkte.

1. Teil. *Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze.*

5P **1.** Wenn $\frac{1}{x} = 0{,}(3)$, dann $x = 3$.

5P **2.** Wenn $(3 - y)^2 \leq 0$, dann $y = -3$.

5P **3.** Die Zahl $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^3} \cdot \sqrt{2^4}$ ist rational.

5P **4.** Die Zahl $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10}$ ist irrational.

5P **5.** Von den Zahlen $-4\sqrt{3}$ und $-5\sqrt{2}$ ist $-4\sqrt{3}$ die kleinere.

5P **6.** Ein Quadrat mit der Diagonale 6 cm hat den Umfang $12\sqrt{3}$ cm.

5P **7.** Die Strecke MN ist Mittellinie in dem Dreieck ABC, $M \in AB$, $N \in AC$. Das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke AMN und ABC ist $\frac{1}{6}$.

5P **8.** Wenn $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck ist und $AD = 20$ cm, dann ist $AB = 10$ cm.

2. Teil.

10P **1.** Der Preis einer Füllfeder wurde zweimal reduziert. Das erste Mal um 10 Lei, das zweite Mal um 10 %. Der Endpreis der Füllfeder ist 27 Lei. Berechnet den ursprünglichen Preis der Füllfeder.

10P **2.** $ABCD$ ist ein Rechteck, $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm. Die Parallele durch C zu der Geraden BD schneidet AD in dem Punkt E. Berechnet die Länge der Strecke CE.

3. Teil.

1. Gegeben ist die Gleichung $\frac{x+2}{3}-\frac{x-a}{4}=1$, $a \in \mathbb{R}$.

5P **a)** Löst die Gleichung für $a = 1$.

5P **b)** Bestimmt den Wert von a, sodass die Zahl 2 eine Lösung der Gleichung ist.

2. Die Punkte A und B gehören zu dem Kreis $\mathcal{C}(O,r)$, der Abstand von dem Mittelpunkt des Kreises zur Geraden AB ist $\frac{r}{2}$, T liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB, im Inneren des Winkels AOB, sodass $TO = 2 \cdot r$.

5P **a)** Berechnet das Maß des Bogens $\overset{\frown}{AB}$.

5P **b)** Wenn $r = 8$ cm, berechnet die Länge der Strecke TA und den Abstand von T zu der Geraden AB.

10P **c)** Zeigt, dass TB eine Tangente des Kreises $\mathcal{C}(O, r)$ ist.

SELBSTBWERTUNGSTEST NR. 2

Von Amts wegen: 10 Punkte

1. Teil. *Ergänzt die Lücken:*

5P **1.** Die Zahl $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2^2}}}$ ist … .

5P **2.** Die Quadratwurzel der Zahl $2^2 \cdot (-3)^2 \cdot 5^4$ ist … .

5P **3.** Wenn $n \in \mathbb{N}$ und $\sqrt{7-2\cdot n}$ eine rationale Zahl ist, dann ist n … .

5P **4.** Die Zahlen, die die Gleichung $-2 = 7 - x^2$ erfüllen, sind … .

5P **5.** Der Radius des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse 8,4 cm ist … cm.

5P **6.** Im Rechteck $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, ist $AB = 10$ cm und $BC = 3{,}2$ cm.
Der Flächeninhalt des Dreiecks AOD ist … cm².

5P **7.** Ein Rhombus hat den Flächeninhalt 24 cm² und eine Diagonale 6 cm, der Umfang beträgt … cm.

5P **8.** Wenn $ADCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck ist, $AB = 12$ cm und $AE \cap CF = \{T\}$, dann ist $CT = \ldots$ cm.

2. Teil.

10P **1.** Gegeben ist die Menge $M = \left\{\sqrt{4}, \sqrt{14}, \sqrt{24}, \sqrt{34}, ..., \sqrt{384}, \sqrt{394}\right\}$.

a) Nennt die Anzahl der Elemente der Menge M.

b) Bestimmt die Menge $M \cap \mathbb{N}$.

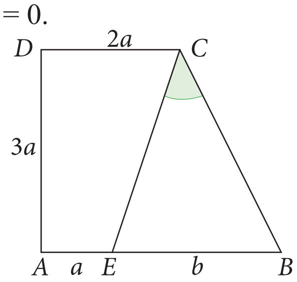
c) Bestimmt die Anzahl der Elemente der Menge $M \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

10P **2.** Die Diagonalen eines Rhombus $ABCD$ sind aufeinanderfolgende gerade Zahlen und werden in Zentimeter ausgedrückt. $AC < BD$ und $\operatorname{tg}\sphericalangle ABD = 0{,}75$. Berechnet die Seite des Rhombus.

3. Teil.

5P **1. a)** Bestimmt die reellen Zahlen a und b, wenn $\sqrt{(\sqrt{2}-a)^2}+\sqrt{(b-\sqrt{3})^2}=0$.

10P **b)** Löst das System in der Menge der reellen Zahlen $\begin{cases} x+|y|=9 \\ 3\cdot x-(2+|y|)=-3 \end{cases}$



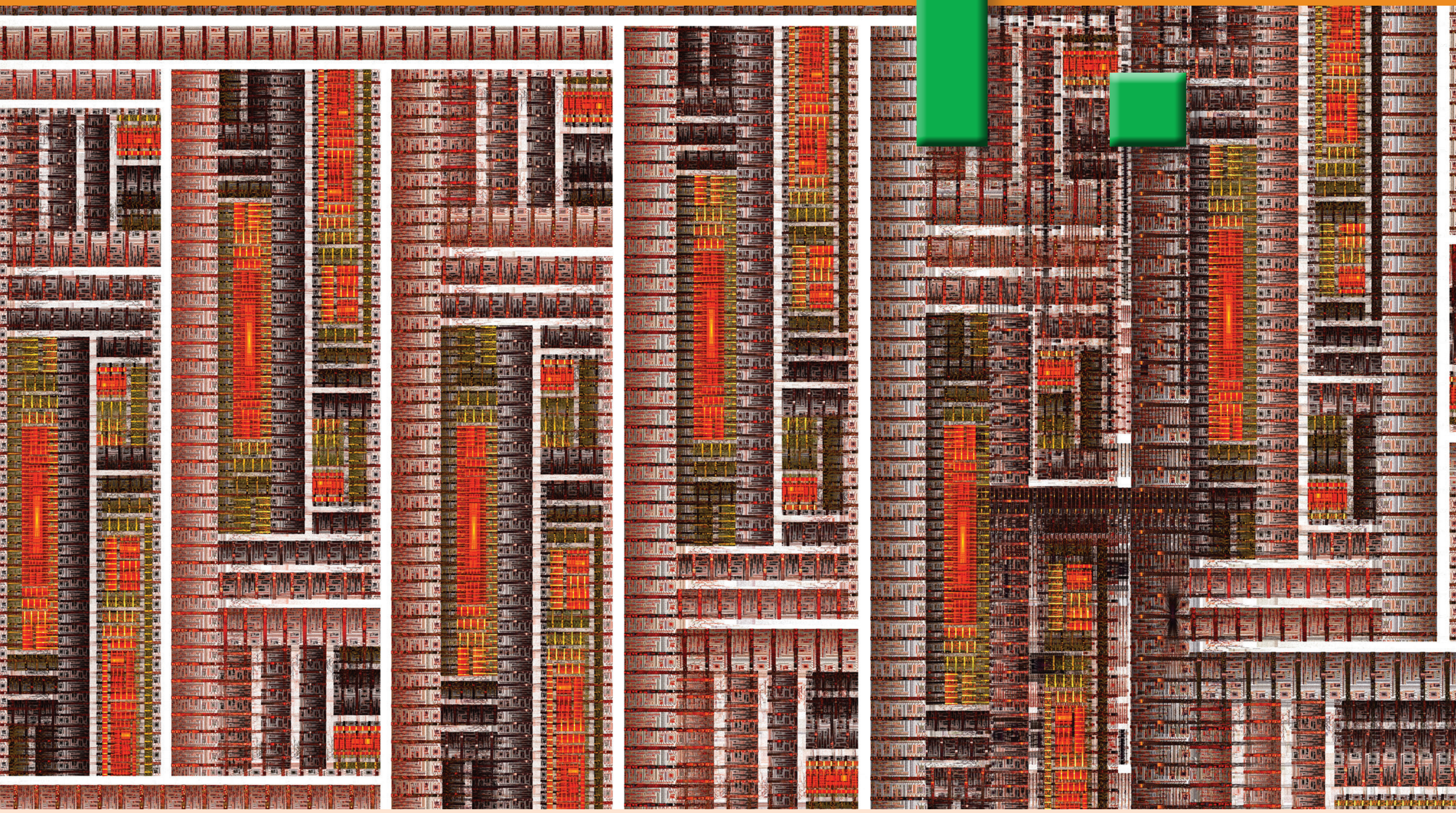
2. $ABCD$ ist ein rechtwinkliges Trapez und $E \in AB$ (siehe Zeichnung).

5P **a)** Berechnet die Länge der Strecke CE in Funktion von a.

5P **b)** Findet eine Beziehung zwischen a und b, sodass $A_{BCE} = A_{AECD}$.

5P **c)** Wenn $a = 4$ cm und $b = 10$ cm, berechnet das Maß des Winkels BCE.

1. KAPITEL



Intervalle von reellen Zahlen. Ungleichungen in $\mathbb{R}$

1 Mengen, die mithilfe einer gemeinsamen Eigenschaft ihrer Elemente definiert werden

2 Zahlenintervalle und ihre Darstellung auf der Zahlenachse
Der Durchschnitt und die Vereinigung der Intervalle

3 Ungleichungen der Form $ax + b \leq 0$ ($<$, $>$, $\geq$), $a, b \in \mathbb{R}$

Spezifische Kompetenzen

1.1 | 2.1 | 3.1 | 4.1 | 5.1 | 6.1

1 Mengen, die mithilfe einer gemeinsamen Eigenschaft definiert werden

L1. Mengen

Aus der Geschichte Das Studium der Mengen hat zu der **Mengenlehre** geführt, die ein wichtiges Teilgebiet der Mathematik wurde. Sie dient als Grundlage vieler Bereiche der Mathematik. Die Mengenlehre bietet in Kombination mit logischer Argumentation Methoden für mathematische Argumentation.
Gründer der **Mengenlehre** ist der deutsche Mathematiker ***Georg Cantor*** (1845 – 1918).

Wir erinnern uns

Eine Menge ist eine Sammlung von verschiedenen, bestimmten Objekten, auch Elemente der Menge genannt.

Wenn A eine Menge und x ein Element dieser Menge ist, sagen wir, *x ist ein Element der Menge A* (manchmal auch: *x gehört zu A*) und schreiben $x \in A$. Falls *x nicht Element der Menge A ist*, dann wird $x \notin A$ geschrieben.

Falls $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, schreiben wir:
$1 \in A, 3 \in A, 5 \in A, 7 \in A, 9 \in A$.
$0 \notin A, 2 \notin A$.

Die Menge, die keine Elemente enthält, wird mit dem Symbol $\varnothing$ bezeichnet und heißt *leere Menge.*

Die Menge der Schüler der 8. Klasse, die die 7. Klasse nicht beendet haben, enthält keine Elemente, folglich ist sie eine leere Menge.

Eine Menge, die eine endliche Anzahl von Elementen hat, heißt *endliche Menge.* Die Anzahl ihrer Elemente ist die *Kardinalzahl der Menge.*

A = {Anna, Alexandra, Adrian} ist eine endliche Menge, ihre Kardinalzahl ist 3. Wir schreiben card $A = 3$.

Eine *numerische Menge* oder *Zahlenmenge* ist eine Menge, deren Elemente Zahlen sind.

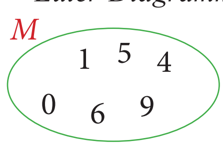
$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ist eine numerische Menge, C = {gelb, blau, golden, silbern} ist keine *numerische Menge.*

Eine Menge kann auf drei Arten beschrieben werden:

1) *durch Aufzählen ihrer Elemente*

$M = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$

2) *mithilfe eines Venn-Euler-Diagramms*



3) *mithilfe einer gemeinsamen Eigenschaft aller Elemente der Menge.*

$M = \{x \mid x$ ist die letzte Ziffer einer Quadratzahl$\}$

Wir lösen und stellen fest

1 Man bezeichnet mit M die Menge der Buchstaben des Wortes „*alle*“.

SA

a) Entscheidet, welche der folgenden Sätze wahr sind. $l \in M$; $a \in M$; $e \in M$; $m \in M$.
b) Beschreibt die Menge M, indem ihr ihre Elemente aufzählt.
c) Stellt die Menge M mithilfe eines Venn-Euler-Diagramms dar.
d) Ausgehend von der Aussage **wenn *x* ein Element der Menge *M*** ist, **dann ist *x* ein Buchstabe des Wortes „alle“**, beschreibt die Menge M mithilfe einer gemeinsamen Eigenschaft aller Elemente der Menge.

2 Seien $A = \{x \mid x$ ist ein Buchstabe des Wortes „Mittel“$\}$ und $B = \{x \mid x$ ist eine ungerade Ziffer$\}$ Mengen.

PA

a) Findet die Elemente der Mengen A und B, schreibt sie durch Aufzählen der Elemente.
b) Entscheidet, welche der beiden Menge eine Zahlenmenge ist.

Anwendungen

1. Anwendung. Gegeben sind die Mengen:

$A = \{a \in \mathbb{Z} \mid -10 < a \leq 30\}$,

$B = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = \sqrt{a}\ , a \in A\}$.

a) Bestimmt die Kardinalzahl der Menge A.

b) Schreibt die Menge B durch Aufzählen der Elemente.

Lösung. **a)** Die Menge A enthält 9 negative ganze Zahlen, die Zahl Null und 30 positive ganze Zahlen. Folglich ist card $A = 40$. **b)** Weil $b \in \mathbb{Z}$ und $b = \sqrt{a}$, folgt, dass a ein vollständiges Quadrat ist. Aus $a \in A$ erhält man $a \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$, folglich $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. Anwendung Entscheidet, ob folgende Mengen endlich oder unendlich sind.

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ ist ein Teiler von $50\}$;

$D = \{y \in \mathbb{N} \mid 50$ ist ein Teiler der Zahl $y\}$;

$E = \{t \in \mathbb{N} \mid t = 7n + 1, n \in \mathbb{N}\}$.

Lösung. $C = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$ ist eine endliche Menge.
$D = \{0, 50, 100, 150, ...\}$ ist eine unendliche Menge. Für jede natürliche Zahl n erhält man ein einziges t. Weil $\mathbb{N}$ unendlich ist, folgt, dass E eine unendliche Menge ist.

Aufgaben

1 Gegeben werden die Mengen: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$; $C = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$. Schreibt jede Menge mithilfe einer charakteristischen Eigenschaft ihrer Elemente.

2 Schreibt die Mengen, indem ihr die Elemente jeder Menge aufzählt:
$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ und $2 \leq x < 7\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ und $-3 \leq x < 2\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ und $-3 \leq x < 2\}$;
$D = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ und $11 < x^2 \leq 50\}$;
$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ und $12 \leq x^2 \leq 47\}$;
$F = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ und $14 \leq 3x^2 < 122\}$.

3 Gegeben wird die Menge

$$M = \left\{-7; -\frac{1}{3}; -\sqrt{4}; 0; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 0,5; 7\right\}.$$

Schreibt die folgenden Mengen, indem ihr ihre Elemente aufzählt:
$A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$;
$C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}\}$; $D = \{x \in M \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.

4 Gegeben werden die Mengen $A = \{2, 3, 4\}$ und $B = \{1, 2, 3, 6\}$. Bestimmt die Menge

$$C = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in A, b \in B\right\}.$$

5 Denkt euch eine Menge mit der Kardinalzahl 5 aus und schreibt sie auf alle drei gelernten Arten: durch Aufzählen der Elemente, mithilfe eines Venn-Euler-Diagramms und mithilfe einer gemeinsamen Eigenschaft aller Elemente der Menge.

6 Sei $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 13 < 31\}$ eine Menge. Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze nach dem gegebenen Muster:

Satz	*Begründung und Antwort*
$13 \in M$	$13 \in \mathbb{N}$, $13 - 13 = 0$ und $0 < 31$, folglich ist der Satz wahr.
$31 \notin M$	
$44 \in M$	
$3^3 \notin M$	
$-13 \in M$	

7 Sei $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 4 < 25$ und $2x > 10\}$ eine Menge.
a) Bestimmt die Elemente der Menge.
b) Bestimmt, welche der Zahlen 2; 4; 5; 11; 25; 30 Elemente der Menge A sind.

8 Sei $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5x^2 < 225\}$ eine Menge.
a) Bestimmt die Elemente der Menge B.
b) Nennt die Elemente der Menge B, die vollständige Kuben sind.

9 Sei $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x^3 < 600\}$ eine Menge.
a) Bestimmt die Elemente der Menge C.
b) Nennt die Elemente aus der Menge C, die vollständige Quadrate sind.
c) Nennt die Elemente der Menge D.
$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3a + 2, a \in C\}$.

L2. Beziehungen zwischen Mengen. Operationen mit Mengen

A. Beziehungen zwischen Mengen

Wir erinnern uns

1. Zwei Mengen, die dieselben Elemente haben, sind *gleiche Mengen.*
Wenn A und B *gleich* sind, schreiben wir $A = B$.
Wenn A und B *nicht gleich sind,* schreiben wir $A \neq B$.

Für die Mengen $A = \{3, 4\}$,
$B = \{x \mid x$ ist eine Ziffer der Zahl $43\}$, $C = \{2, 4\}$
gelten folgende Beziehungen:
$A = B$, $A \neq C$ und $B \neq C$.

2. Die Menge A ist in der Menge B *eingeschlossen,* wenn jedes Element von A auch ein Element der Menge B ist.
Wenn die Menge A *in der Menge B eingeschlossen ist,* schreiben wir $A \subset B$. Man sagt auch, dass B *die Menge A einschließt*. Wir schreiben $B \supset A$.
Wenn die Menge A *nicht in der Menge B eingeschlossen ist,* schreibt man $A \not\subset B$.

Für die Mengen $A = \{3, 9\}$ und $B = \{x \mid x$ ist eine Ziffer in der Basis $10\}$ sind die Elemente 3 und 9 der Menge A Ziffern in der Basis 10, folglich $A \subset B$ oder $B \supset A$.
Die Menge $B = \{x \mid x$ ist eine Ziffer der Basis $10\}$ enthält zum Beispiel das Element $x = 1$, das nicht zu der Menge $A = \{3, 9\}$ gehört, also $B \not\subset A$.

3. Wenn $A \subset B$, dann wird die Menge A *Teilmenge* der Menge B genannt.
Die leere Menge, mit $\varnothing$ bezeichnet, ist eine Teilmenge jeder Menge, folglich: $\varnothing \subset A$ für jede Menge A.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Folglich ist $\mathbb{N}$ eine Teilmenge der Menge $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ ist eine Teilmenge der Menge $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ ist eine Teilmenge der Menge $\mathbb{R}$.
Aufgabe: Schreibt auch andere Beispiele von Teilmengen, die aus diesen Einschlussbeziehungen folgen. Begründet eure Antwort.

Wir lösen und stellen fest

1 SA Gegeben werden die Mengen: $A = \{3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E = \{x \mid x$ ist eine Ziffer, $x \neq 9$ und $x \neq 0\}$.

a) Schreibt die Menge E durch Aufzählen der Elemente.

b) Schreibt folgenden Satz in eure Hefte ab, ergänzt die Leerstellen so, dass die Behauptung wahr ist: *„Die Mengen ... und ... sind gleich, weil sie dieselben Elemente haben.“*

c) Schreibt folgenden Satz in eure Hefte ab, ergänzt (W), wenn der Satz wahr und (F), wenn der Satz falsch ist. $B \subset C$; $C \subset B$; $B \subset D$; $A \subset B$.

2 FU Gegeben werden die Mengen A, B, C, D, E aus der vorigen Übung.

a) Identifiziert die Menge, die alle anderen vier Mengen einschließt. Schreibt die Beziehungen, die diese Antwort begründen.

b) Identifiziert die Menge, die eine Teilmenge der anderen vier Mengen ist. Schreibt die Beziehungen, die diese Antwort begründen.

Lösung. **a)** Die Menge E von Übung 1 ist: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Wir stellen fest, dass $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$, $D = E$, folglich ist $D \subset E$, also schließt die Menge E alle anderen vier Mengen ein. Weil $D = E$, folgt, dass auch die Menge D alle anderen vier Mengen einschließt.
b) Wir stellen fest, dass $A \subset B$, $A \subset C$, $A \subset D$, $A \subset E$, folglich ist die Menge A eine Teilmenge der anderen vier Mengen.

Anwendungen

1. Anwendung: SA **a)** Verwendet die Ergebnisse aus den vorigen zwei Übungen und schreibt alle Beziehungen (Einschluss- oder Gleichheitsbeziehung) zwischen den Mengen D und E.
b) Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze: p_1: $A \subset A$, für jede Menge A; p_2: $A = B \Leftrightarrow (A \subset B$ und $B \subset A)$.

Lösung.

a) $D = E$; $E = D$; $D \subset E$; $E \subset D$;

b) Jedes Element der Menge A ist ein Element der Menge A, der Satz p_1 ist wahr.

$A = B$ *genau dann, wenn* A und B die gleichen Elemente haben, *also* alle Elemente der Menge A auch Elemente der Menge B und alle Elemente der Menge B auch Elemente der Menge A sind, *äquivalent zu* ($A \subset B$ und $B \subset A$). Folglich ist $A = B \Leftrightarrow (A \subset B$ und $B \subset A)$, der Satz p_2 ist wahr.

2. Anwendung: Man bezeichnet E die Menge der Schüler der 8. Klasse eines Gymnasiums. Gegeben sind die
FU Mengen : $A = \{x \in E \mid x$ ist in der Robotik-GA.$\}$; $B = \{x \in E \mid x$ mag Physik$\}$;
$C = \{x \in E \mid x$ mag Mathematik$\}$. Wenn ein Schüler dieser Schule in der Robotik-GA ist, mag er Physik. Und ein Schüler, der Physik mag, mag auch Mathematik. Bestimmt die Einschlussbeziehungen zwischen den Mengen A, B, C, E.

Lösung. Man stellt fest: wenn $x \in A$, dann $x \in E$, folglich $A \subset E$. Analog: $B \subset E$ und $C \subset E$.
Sei x ein Schüler der 8. Klasse ($x \in E$):

Umgangssprache	*Fachsprache*	*Schlussfolgerung*
Wenn x in der Robotik-GA ist, mag er Physik.	Wenn $x \in A$, dann $x \in B$.	$A \subset B$
Wenn x Physik mag, dann mag x auch Mathematik.	Wenn $x \in B$, dann $x \in C$.	$B \subset C$
Wenn x in der Robotik-GA ist, dann mag x Physik und wenn x Physik mag, dann mag x Mathematik.	Wenn $x \in A$, dann $x \in B$. Aus $x \in B$ folgt, dass $x \in C$. Und wenn $x \in A$, dann $x \in C$.	$A \subset C$

Folglich, $A \subset B \subset C \subset E$.

B. Operationen mit Mengen

Wir erinnern uns!

Die Vereinigung der Mengen A und B ist die Menge gebildet aus den Elementen, die mindestens in einer dieser Menge sind: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ *oder* $x \in B\}$.

Seien $A = \{x \mid x$ eine von null verschiedene Ziffer$\}$ und $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$ Mengen. Ihre Vereinigung ist $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

Der Durchschnitt der Mengen A und B ist die Menge gebildet aus den gemeinsamen Elementen der beiden Mengen: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ und $x \in B\}$.

Gegeben sind die Mengen
$A = \{x \mid x$ eine von null verschiedene Ziffer$\}$,
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$. Der Durchschnitt ist
$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Wenn $A \cap B = \varnothing$, dann sind die Mengen A und B *disjunkt*.

Die Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sind disjunkt.
$\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \varnothing$.

Die Differenz der Mengen A und B ist die Menge gebildet aus den Elementen, die *in A sind und nicht in der Menge B*: $A - B = \{x \mid x \in A$ und $x \notin B\}$.

Gegeben sind die Mengen $A = \{x \mid x$ eine von null verschiedene Ziffer$\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$, die Differenz ist $A - B = \{7, 8, 9\}$.
Die Menge der irrationalen Zahlen ist $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

3. Anwendung: Seien die Mengen $A = \{x \mid x \text{ gerade Ziffer}\}$, $B = \{2, 4, 5, 7\}$ und $C = \{4, 6, 7, 9\}$.

FU

a) Schreibt die Menge A durch Aufzählen der Elemente.

b) Berechnet: $A \cup B$; $A \cup C$; $B \cup C$; $A - B$; $B - C$; $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$; $(A \cup C) - B$.

Lösung. **a)** $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

b) $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $A \cup C = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in C\} = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$; $B \cup C = \{x \mid x \in B \text{ oder } x \in C\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$; $A - B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\} = \{0, 6, 8\}$; $B - C = \{x \mid x \in B \text{ und } x \notin C\} = \{2, 5\}$; $A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \text{ oder } x \in C\} = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A \cap B \cap C = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B \text{ und } x \in C\} = \{4\}$; $(A \cup C) - B = \{x \mid x \in A \cup C \text{ und } x \notin B\} = \{0, 6, 8, 9\}$.

Aufgaben

1 Bestimmt für die Mengen $M = \{0, 2, 6, 12, 20\}$ und $P = \{a \mid a = x \cdot (x + 1), x \in \mathbb{N} \text{ und } x < 5\}$ die Anzahl der korrekten Sätze:

a) $M \subset P$; **b)** $M = P$;

c) $P \subset M$; **d)** $M \neq P$.

2 **a)** Schreibt alle Teilmengen der Menge $A = \{a, b\}$.

b) Bestimmt die Anzahl der Teilmengen einer Menge mit zwei Elementen.

c) Bestimmt die Anzahl der Teilmengen einer Menge mit drei Elementen.

3 Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze:

a) $\{-1; 0; 2\} \subset \mathbb{Z}$; **b)** $\{-\sqrt{3}; \sqrt{5}; -\sqrt{2}\} \not\subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

c) $\{-1; 3\} \subset \mathbb{N}$; **d)** $\{-4\} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

e) $\sqrt{7} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; **f)** $\{-\sqrt{9}; 2\} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

4 Gegeben sind $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ und $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x \leq 4\}$.
Berechnet: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ und $B - A$.

5 Gegeben sind $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } -4 \leq x < 3\}$ und $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ und } -4 \leq x < 3\}$.

a) Berechnet: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ und $B - A$.

b) Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze:
$A \subset B$; $B \subset A$; $A \subset (A \cup B)$; $A \subset (B - A)$.

6 Berechnet: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ und $B - A$, wenn:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } 3 < x \leq 6\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ und } -3 \leq x < \sqrt{5}\}$;

b) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } -2\sqrt{3} \leq x < 3\sqrt{2}\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ und } -2\sqrt{3} \leq x < 3\sqrt{2}\}$.

7 Schreibt die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ als Vereinigung zweier disjunkter Mengen X und Y, sodass die Summe der Elemente der Menge X gleich ist mit der Summe der Elemente der Menge Y.

8 Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze:

$\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{9^2 + 12^2} \in \mathbb{Z}$;

$\sqrt{3^3 \cdot 12} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{225} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}} \in \mathbb{Q}$.

9 Wenn $x = \sqrt{221 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 440}$, dann bestimmt den Wahrheitswert der Sätze:

$\sqrt{x} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

10 Gegeben wird die Menge

$$A = \left\{3^2; (-1)^2; (-2)^{-3}; \sqrt{2\frac{7}{9}}; \sqrt{12}; \sqrt{0,(2)}; (-2)^3\right\}.$$

Berechnet: $A \cap \mathbb{N}$; $A - \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A - \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A \cap \mathbb{R}$; $A \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$; $A \cap (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$.

11 Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ und $C = \{3, 6, 7\}$.
Prüfe die Gleichungen:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

12 Bestimmt die Mengen A und B, die folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

2) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$;

3) $1 \in (A \setminus B)$;

4) $2 \in (B \setminus A)$.

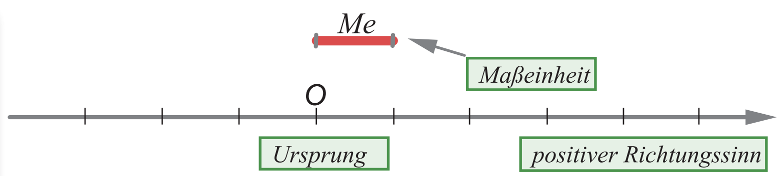
2 Zahlenintervalle und ihre Darstellung auf der Zahlenachse. Der Durchschnitt und die Vereinigung der Intervalle

L1. Die Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlenachse. Teilmengen einer Geraden

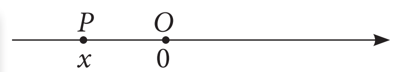
Wir erinnern uns!

A. Die Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlenachse

(1) Die Zahlenachse ist eine *Gerade,* auf der ein Punkt *O, Ursprung* genannt, ein *positiver Richtungssinn* und eine *Maßeinheit* festgelegt sind.

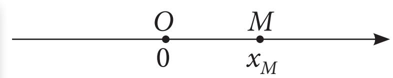


(2) Jeder reellen Zahl entspricht auf der Zahlenachse ein einziger Punkt. Der reellen Zahl 0 entspricht der Ursprung O. Wenn der reellen Zahl x der Punkt P entspricht, dann sagen wir, dass der Punkt P die *Koordinate* x hat und schreiben $P(x)$.



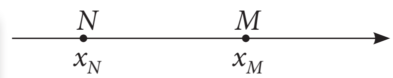
Laut Definition, $|x| = OP$.

(3) Umgekehrt entspricht jedem Punkt M der Zahlenachse eine einzige reelle Zahl, die x_M bezeichnet wird.



Aus (2) und (3) folgt, dass die *Menge der reellen Zahlen mit der Menge der Punkte einer Geraden identifiziert werden kann.*

(4) Wenn M und N zwei beliebige Punkte der Zahlenachse mit den Koordinaten x_M und x_N sind, dann ist $MN = |x_N - x_M|$.

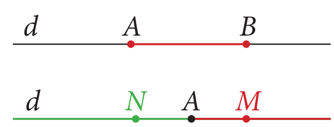


(5) *Irrationale Zahlen werden durch rationale* Näherungswerte *dargestellt.*

B. Teilmengen einer Geraden

Zwei beliebige Punkte A und B einer Geraden d bestimmen eine Strecke AB.

Ein beliebiger Punkt A auf der Geraden d bestimmt zwei entgegengesetzte Halbgeraden. Wenn die Punkte M und N auf der Geraden d beidseitig von A liegen, sind es die Halbgeraden AM bzw. AN.



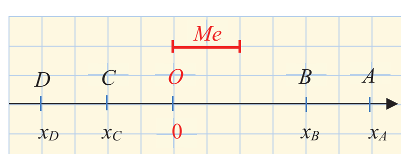
Anwendungen

1 **SA** Die Punkte A, B, C, D sind auf der reellen Zahlenachse, wie in der Zeichnung nebenan, dargestellt.

a) Bestimmt die Koordinaten der Punkte A, B, C, D.

b) Berechnet mithilfe der Formel $MN = |x_N - x_M|$ die Längen der Strecken AB, AC, AD, CB, DB, DC und DO.

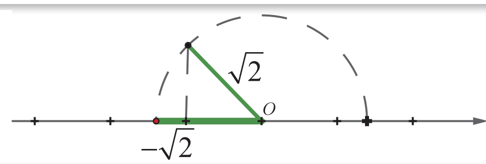
c) Prüft die Ergebnisse von Punkt b), indem ihr auf der Zeichnung die Längen der Strecken an dem angegebenen Maßstab ablest.



Lösung. **a)** Die Koordinaten der Punkte A, B, C und D sind reelle Zahlen $x_A = 3$, $x_B = 2$, $x_C = -1$ und $x_D = -2$.
b) Mit der Formel $MN = |x_N - x_M|$ werden die Längen $AB = 1$, $AC = 4$, $AD = 5$, $CB = 3$, $DB = 4$, $DC = 1$ und $DO = 2$ erhalten.

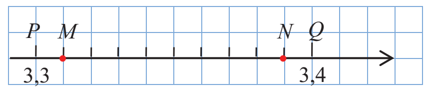
2 Stellt die Zahl $-\sqrt{2}$ auf der Zahlenachse dar, verwendet die Maßeinheit von 1 cm.

Lösung. In der 7. Klasse habt ihr gelernt, dass diese Zahl mithilfe des Zirkels genau dargestellt werden kann. Die Zahl $\sqrt{2}$ wird als Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks mit Kathetenlänge 1 betrachtet.



3 Zeichnet die Darstellung von nebenan in eure Hefte. Verwendet die Kästchen des Matheheftes.

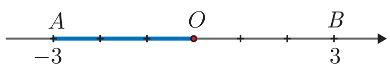
FU



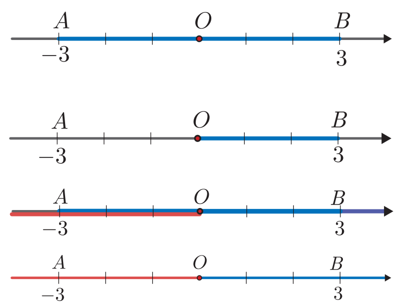
a) Bestimmt den Wert des Verhältnisses $\dfrac{MP}{PQ}$.
b) Berechnet die Längen der Strecken OM und ON, wobei die Koordinaten der Punkte $P(3,3)$ und $Q(3,4)$ bekannt sind und O der Ursprung der Zahlenachse ist.
c) Bestimmt die Koordinaten der Punkte M und N mithilfe der Ergebnisse von b).
d) Findet mithilfe des Taschenrechners einen unteren und einen oberen rationalen Näherungswert auf Hundertstel für $\sqrt{11}$ und stellt sie auf derselben Zeichnung dar.

Anweisungen. b) $PQ = OQ - OP = 3{,}4\ Me - 3{,}3\ Me = 0{,}1\ Me$; $PM = \dfrac{1}{10} \cdot PQ = \dfrac{1}{100}\ Me = 0{,}01\ Me$
Dann ist $OM = OP + PM = 3{,}3\ Me + 0{,}01\ Me = 3{,}31\ Me$; $ON = OP + 9 \cdot PM = 3{,}3\ Me + 9 \cdot 0{,}01\ Me = 3{,}39\ Me$ (oder $ON = OQ - NQ$); c) $M(3{,}31)$ und $N(3{,}39)$.

4 Seien $A(-3)$ und $B(3)$ Punkte auf der reellen Zahlenachse.
a) Stellt die Strecken AB, OA, OB in drei verschiedenen Zeichnungen dar.



b) Stellt die Halbgeraden AB und OA mit verschiedenen Farben auf derselben Zeichnung dar.
c) Stellt die Halbgeraden OA und OB mit verschiedenen Farben auf derselben Zeichnung dar.



MINITEST Wählt die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort ist richtig.

1. Betrachtet die Zeichnung nebenan. Die Darstellung der Zahl $-\sqrt{2}$ auf der Zahlenachse befindet sich: 			
A. zwischen M und P	**B.** zwischen P und Q	**C.** auf der Halbgeraden PM	**D.** auf der Halbgeraden QN
2. Für $\sqrt{6}$ gilt:			
A. $5 < \sqrt{6} < 6$	**B.** $2 < \sqrt{6} < 3$	**C.** $3 < \sqrt{6} < 4$	**D.** $4 < \sqrt{6} < 5$
3. Die Kardinalzahl der Menge $M = \{\overline{ab} \mid 8 < \sqrt{\overline{ab}} < 9\}$ ist:			
A. 13	**B.** 14	**C.** 15	**D.** 16

Aufgaben

1 Die Punkte $A(1)$, $B(2)$ werden auf der Zahlenachse mit dem Ursprung O gezeichnet

a) Zeichnet das Quadrat $OACD$. Bezeichnet den Schnittpunkt des Kreises $\mathcal{C}(O, OC)$ mit der Halbgeraden OA mit M. Bestimmt die Koordinate des Punktes M.

b) Zeichnet das Quadrat $OBEF$ und bezeichnet die Schnittpunkte des Kreises $\mathcal{C}(O, OE)$ mit der Zahlenachse N, P. Bestimmt die Koordinaten der Punkte N und P und berechnet die Länge der Strecke NP.

2 Die Punkte $A(1)$, $B(2)$ werden auf der Zahlenachse gezeichnet. Wir teilen die Strecke AB in kongruente Strecken AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4B ein.

a) Wählt eine passende Maßeinheit aus und zeichnet.

b) Bestimmt die Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4.

c) Stellt die Punkte $M(\sqrt{2})$ und $N(\sqrt{3})$ auf der Zahlenachse dar.

d) Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze und ergänzt die Tabelle.

Satz	W/F
Der Punkt M liegt auf der Strecke P_2P_3.	
Der Punkt N liegt auf der Strecke P_4B.	
$P_2P_3 > MN$	
Der Koordinate der Mitte der Strecke MN ist eine irrationale Zahl größer als 1,5.	

3 Schreibt in eure Hefte und ergänzt die Lücken, sodass ihr Beziehungen der Form $\overline{a,b} < x < \overline{a,(b+1)}$ erhaltet, wobei a eine natürliche Zahl ist und b eine Ziffer in der Basis 10.

a) $\ldots < \sqrt{2} < \ldots$

b) $\ldots < \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} < \ldots$

4 **a)** Schreibt drei positive rationale Zahlen der Form $\frac{a}{10}$, $a \in \mathbb{N}$, kleiner als 1. Wählt eine passende Maßeinheit und stellt die Zahlen auf der Zahlenachse dar.

b) Schreibt zwei negative irrationale Zahlen der Form $-\sqrt{b}$, $b \in \mathbb{N}$, kleiner als -2. Wählt eine passende Maßeinheit und stellt die Zahlen auf der Zahlenachse dar.

c) Schreibt alle positiven irrationalen Zahlen der Form $3 - \sqrt{a}$, $a \in \mathbb{N}$. Wählt eine passende Maßeinheit und stellt die kleinste und die größte dieser Zahlen auf der Zahlenachse dar.

5 Bestimmt die Kardinalzahl der Menge $M = \{\overline{ab} \mid -6 < -\sqrt{\overline{ab}} < -5{,}5\}$.

6 Stellt die Punkte $A(1)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(7)$ in dieser Reihenfolge auf der Zahlenachse dar. $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

a) Findet einen Wert für b und einen Wert für c, sodass $AB > CD$.

b) Zeigt, dass es kein $b \in \mathbb{Q}$ und $c \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ gibt, mit $AD = 2 \cdot BC$.

L2. Intervalle von reellen Zahlen und ihre Darstellung auf der Zahlenachse

Anmerkung. Der Begriff *Intervall* kommt in mehreren Wissenschaften mit verschiedenem Sinn vor: Physik, Geschichte, Geografie, Chemie, Astronomie, Musik und Mathematik. Dieser Begriff wird oft in der Umgangssprache verwendet, wenn man sich auf Größen bezieht, die sich zwischen verschiedenen Werten befinden.

Einige Arten von *Intervallen*

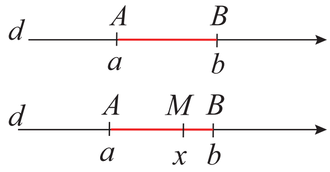
1) Ein *Zeitintervall* ist die Zeit, die zwischen zwei Ereignissen vergeht oder zwischen Beginn und Ende eines Phänomens oder Ereignisses. *Das Jahrhundert* ist ein *Intervall* mit der Dauer von 100 Jahren.

2) In der Musik wird zum Beispiel das *Intervall* zwischen zwei Tönen, das acht Tonstufen einer Tonleiter umspannt, Oktave genannt.

Wir verstehen anhand von Beispielen

Auf einer beliebigen Geraden d bestimmen wir *den positiven Richtungssinn, den Ursprung und die Maßeinheit*. Jedem Punkt der Geraden entspricht eine reelle Zahl und jeder reellen Zahl entspricht ein Punkt der Geraden d. Somit ist die Gerade d identisch mit der Zahlenachse und wir sagen, dass die *Gerade die geometrische Darstellung der Menge der reellen Zahlen ist.*

A. Beschränkte Intervalle



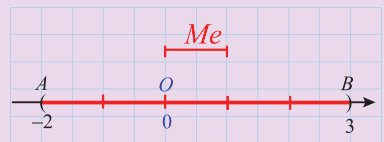
Zwei verschiedene Punkte A und B bestimmen auf der Geraden d eine Strecke. Diesen Punkten entsprechen die Koordinaten a und b.
Wenn $a < b$, sei x eine reelle Zahl, sodass $a < x < b$. Der reellen Zahl x entspricht auf der Zahlenachse der Punkt M, zwischen A und B.

1) Für die reellen Zahlen a und b, $a < b$, heißt die Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b, also $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x < b\}$, *offenes Intervall,* welches von den Zahlen a und b bestimmt wird und mit (a, b) bezeichnet wird.
Die Menge aller Punkte der Geraden d, die sich zwischen A und B befinden, also $\{M \mid M \in d, M \text{ zwischen } A \text{ und } B\}$, heißt *offene Strecke* und wird (AB) bezeichnet.

$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x < b\}$

$(-2, 3) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } -2 < x < 3\}$

$(AB) = \{M \mid M \in d, M \text{ zwischen } A \text{ und } B\}$.



In der Zeichnung nebenan ist die Strecke (AB) mit den Endpunkten $A(-2)$ und $B(3)$ dargestellt.

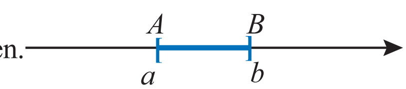
a) Die Strecke (AB) ist aus allen geometrischen Darstellungen der Punkte aus dem Intervall (a, b) gebildet. Wir sagen, dass die offene Strecke (AB) die Darstellung des offenen Intervalls (a, b) auf der Zahlenachse ist.

b) Das Intervall (a, b) ist die Menge aller reellen Zahlen, welche die Koordinaten der Punkte der Strecke (AB) sind.

Konventionen. Wir werden das offene Intervall (a, b) als offene Strecke (AB) auf der Zahlenachse darstellen.
Bemerkung. Wenn $a = b$, $(a, b) = \varnothing$.

2) Wenn $a \leq b$, dann heißt die Menge $(a, b) \cup \{a, b\}$, also $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a \leq x \leq b\}$, *abgeschlossenes Intervall* bestimmt von den Zahlen a und b, bezeichnet $[a, b]$.
Die Menge $(AB) \cup \{A, B\}$ heißt *geschlossene Strecke* und wird $[AB]$ bezeichnet.

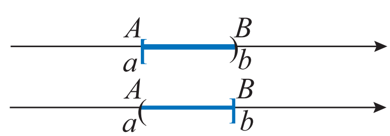
Konvention. Wir werden auf der Zahlenachse das geschlossene Intervall $[a, b]$ mithilfe einer entsprechenden geschlossenen Strecke $[AB]$ darstellen.



Bemerkung. Wenn $a = b$, $[a, b] = \{a\}$.

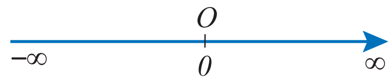
3) Die Menge $(a, b) \cup \{a\}$, also $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a \leq x < b\}$, wird $[a, b)$ bezeichnet und die Menge $(a, b) \cup \{b\}$, also $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x \leq b\}$, wird $(a, b]$ bezeichnet.
Die Menge der Punkte $(AB) \cup \{A\}$ wird $[AB)$ bezeichnet. Die Menge $(AB) \cup \{B\}$ wird $(AB]$ bezeichnet. Diese Mengen heißen *halboffene Strecken*.
Die geometrische Darstellung des halboffenen Intervalls $[a, b)$ ist die halboffene Strecke $[AB)$.
Die geometrische Darstellung des halboffenen Intervalls $(a, b]$ ist die halboffene Strecke $(AB]$.

$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a \leq x < b\}$
$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x \leq b\}$.



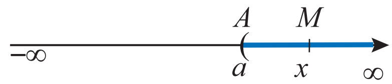
B. Unbeschränkte Intervalle

Um die Unendlichkeit der Zahlenachse zu betonen, werden die Symbole $-\infty$ (minus unendlich) und $+\infty$ (plus unendlich) verwendet. Die Zahlenachse ist in der Zeichnung nebenan dargestellt.



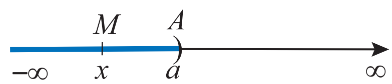
Auf der Zahlenachse d werden die Punkte $A(a)$ und $M(x)$ gezeichnet.

1. Wenn der Punkt M auf der Zahlenachse rechts von A liegt, dann wird die Menge der reellen Zahlen $x > a$, $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x > a\}$, mit (a, ∞) bezeichnet und heißt *offenes, rechts unbeschränktes Intervall,* bestimmt von der reellen Zahl a.
Die Darstellung des Intervalls (a, ∞) auf der Zahlenachse ist eine offene Halbgerade $(AM$.



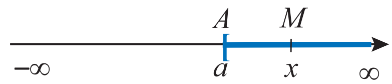
$(a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x > a\}$

2. Wenn der Punkt M auf der Zahlenachse links von A liegt, dann wird die Menge der reellen Zahlen $x < a$, $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x < a\}$, mit $(-\infty, a)$ bezeichnet und heißt *offenes, links unbeschränktes Intervall,* bestimmt von der reellen Zahl a.
Die Darstellung des Intervalls $(-\infty, a)$ auf der Zahlenachse ist die offene Halbgerade $(AM$.



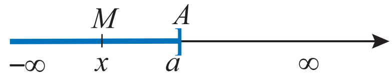
$(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x < a\}$

3. Die Menge $(a, \infty) \cup \{a\}$, $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq a\}$, wird mit $[a, \infty)$ bezeichnet und heißt *abgeschlossenes, rechts unbeschränktes Intervall,* bestimmt von der reellen Zahl a.
Die Darstellung des Intervalls $[a, \infty)$ auf der Zahlenachse ist die geschlossene Halbgerade $[AM$.



$[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq a\}$

4. Die Menge $(-\infty, a) \cup \{a\}$, also $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq a\}$, wird $(-\infty, a]$ bezeichnet und heißt *abgeschlossenes, links unbeschränktes Intervall,* bestimmt von der reellen Zahl a.
Die Darstellung des Intervalls $(-\infty, a]$ auf der Zahlenachse ist die geschlossene Halbgerade $[AM$.



$(-\infty, a\,] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq a\}$

Bemerkung. Die Intervalle von reellen Zahlen sind Teilmengen der Menge der reellen Zahlen.

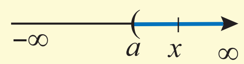
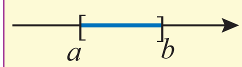
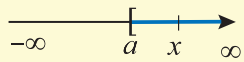
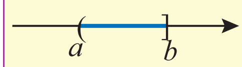
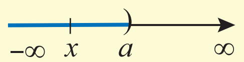
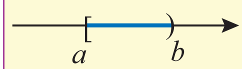
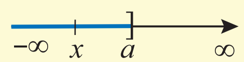
5. Die Menge der reellen Zahlen ist ein sowohl links als auch rechts unbeschränktes Intervall.

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Wir lösen und stellen fest

i PA Studiert zusammen mit eurem Partner folgende Tabelle, identifiziert für jedes Beispiel auch andere reelle Zahlen, die zu den Intervallen gehören oder nicht dazu gehören.

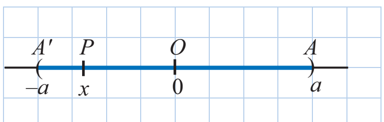
Intervall	Beschreibung des Intervalls	Zwei reelle Zahlen aus dem Intervall	Begründung	Zwei reelle Zahlen, die nicht zum Intervall gehören	Begründung
$[2, 3]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } 2 \leq x \leq 3\}$	$2{,}(4) \in [2, 3]$ $3 \in [2, 3]$	$2 \leq 2{,}(4) \leq 3$ $2 \leq 3 \leq 3$	$1{,}9 \notin [2, 3]$ $4 \notin [2, 3]$	$1{,}9 < 2$ $4 > 3$
$[1, +\infty)$	$[1, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 1\}$	$\sqrt{2} \in [1, +\infty)$ $1 \in [1, +\infty)$	$\sqrt{2} \geq 1$ $1 \geq 1$	$0 \notin [1, +\infty)$ $-\sqrt{2} \notin [1, +\infty)$	$0 < 1$ $-\sqrt{2} < 1$
$(-\infty, -3]$	$(-\infty, -3] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq -3\}$	$-4 \in (-\infty, -3]$ $-3 \in (-\infty, -3]$	$-4 < -3$ $-3 = -3$	$-2 \notin (-\infty, -3]$ $0 \notin (-\infty, -3]$	$-2 > -3$ $0 > -3$

BESCHRÄNKTE INTERVALLE		UNBESCHRÄNKTE INTERVALLE	
Das Intervall	**Geometrische Darstellung**	**Das Intervall**	**Geometrische Darstellung**
Offenes Intervall (a, b) $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $a < x < b\}$		Offenes, rechts unbeschränktes Intervall(a, ∞) $(a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $x > a\}$	
Abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $a \le x \le b\}$		Abgeschlossenes, rechts unbeschränktes Intervall $[a, \infty)$ $[a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $x \ge a\}$	
Halboffenes Intervall $(a, b]$ $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $a < x \le b\}$		Offenes, links unbeschränktes Intervall $(-\infty, a)$ $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $x < a\}$	
Halboffenes Intervall $[a, b)$ $[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $a \le x < b\}$		Abgeschlossenes, links unbeschränktes Intervall $(-\infty, a]$ $(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $x \le a\}$	
Für alle $a > 0$ gelten die äquivalenten Beziehungen: 1) $x \in \mathbb{R}$ und $\lvert x \rvert < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$ 2) $x \in \mathbb{R}$ und $\lvert x \rvert \le a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$		Für alle $a > 0$ gelten die äquivalenten Beziehungen: 1) $x \in \mathbb{R}$ und $\lvert x \rvert > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a)$ oder $x \in (a, \infty)$ 2) $x \in \mathbb{R}$ und $\lvert x \rvert \ge a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a]$ oder $x \in [a, \infty)$	

Anwendung: Zeigt mithilfe der geometrischen Darstellung der reellen Zahlen und der Intervalle, dass, wenn $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$, folgende Gleichungen stattfinden:

a) $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $|x| < a\} = (-a, a)$; **b)** $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $|x| \le a\} = [-a, a]$.

Beweis. **a)** Wir verwenden die Darstellung des Intervalls $(-a, a)$ auf der Zahlenachse und die Definition des absoluten Betrags einer reellen Zahl.



Die geometrische Darstellung des Intervalls $(-a, a)$ ist die offene Strecke $(A'A)$ wobei $a = OA = OA'$. Für jedes $x \in (-a, a)$ ist seine geometrische Darstellung $P \in (A'A)$, wobei $OP < OA' = a$, also $x \in \mathbb{R}$, und $|x| < a$, folglich ist $x \in \{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $|x| < a\}$. (1)

Sei $x \in \mathbb{R}$, $|x| < a$. Wir bezeichnen mit A die geometrische Darstellung der Zahl a und A' die geometrische Darstellung der Zahl $-a$. Sei P die geometrische Darstellung der Zahl x.

Da $|x| = OP$, folgt, dass $OP < a$. Doch $a = OA = OA'$, also ist $OP < OA$ und $OP < OA'$, das bedeutet, dass der Punkt P zu der offenen Strecke $(A'A)$ gehört, folglich ist $x \in (-a, a)$.

Mithilfe der Beziehung (1) erhält man gleiche Mengen $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $|x| < a\} = (-a, a)$. (2)

b) $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $|x| \le a\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $|x| < a\} \cup \{-a, a\}$ und $[-a, a] = (-a, a) \cup \{-a, a\}$; man verwendet die Beziehung (2), und es folgt, dass $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ und $|x| \le a\} = [-a, a]$.

MINITEST Wählt die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort ist richtig.

1. Die Menge $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$, als Intervall geschrieben, ist:			
A. $(-3; 4]$	**B.** $(-3; 4)$	**C.** $(-2; 3)$	**D.** $[-2; 3]$
2. Wenn $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, dann ist B das Intervall:			
A. $(-\infty; 1)$	**B.** $(-\infty; 1]$	**C.** $[1; +\infty)$	**D.** $(1; +\infty)$
3. Das Intervall $C = (-1; 7]$, als Menge mit einer charakteristischen Eigenschaft der Elemente geschrieben, ist:			
A. $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 7\}$	**B.** $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x < 7\}$	**C.** $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \le 7\}$	**D.** $\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x \le 7\}$

Aufgaben

1 **a)** Beschreibt folgende Intervalle mithilfe der charakteristischen Eigenschaft ihrer Elemente: $(-\infty,-6)$; $(-4,-2)$; $[-1, 1]$; $(2, 4]$; $[5, 7)$; $[8, \infty)$.

b) Wählt die Maßeinheit von 0,5 cm und stellt die Intervalle von Punkt a) auf der Zahlenachse dar.

2 Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze:

a) $2 \in [0, 3]$ **b)** $-\sqrt{2} \in (-2, -1)$

c) $5 \in (3, 5)$ **d)** $-2 \notin (-2, 0)$

e) $\sqrt{3} \in [1{,}71; 1{,}72]$ **f)** $6{,}7 \in (6; \sqrt{49})$

g) $\sqrt{169} \notin [12;13]$ **h)** $\pi \in (3; +\infty)$

3 Schreibt die Mengen als Intervalle:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \sqrt{3}\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$.

4 Sei $I = [-2, 2]$ ein Intervall.

a) Prüft, ob sich die rationale Zahl $-\frac{11}{5}$ in dem Intervall I befindet.

b) Schreibt vier irrationale Zahlen aus dem Intervall I. Begründet eure Antwort.

5 Gebt je ein Beispiel von einem Intervall, das

a) natürliche Zahlen enthält;

b) keine ganze Zahl enthält;

c) genau zwei natürliche Zahlen enthält;

d) egal wie große Zahlen enthält;

e) egal wie kleine Zahlen enthält.

6 Schreibt folgende Aussagen als Intervalle:

a) Der Abstand d bis zur Schule beträgt höchstens 300 m;

b) Eine Packung wiegt höchstens 500 g ± 10 g;

c) Die Fluggeschwindigkeit eines Flugzeugs beträgt mindestens 100 km/h.

7 Gegeben werden die Mengen

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\}$ und $B = (-3, -\sqrt{2})$.

a) Bestimmt, ob die Zahl 0 ein Element der Menge A ist.

b) Zeigt, dass $a > b$ für jedes $a \in A$ und $b \in B$.

8 Schreibt die Mengen als Intervalle und stellt sie auf der Zahlenachse dar.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x < 6\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$;

d) $D = x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{2^{16} - 2^{15}}{4^7}\}$;

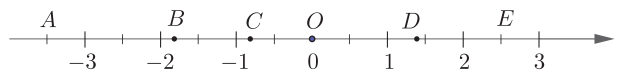
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x - \sqrt{2} \leq \sqrt{8}\}$;

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -3\}$.

9 In der unteren Abbildung sind folgende ganze Zahlen $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ und Punkte

$A(-\frac{7}{2})$, $B(-\sqrt{3})$, $C(-\frac{4}{5})$, $D(\sqrt{2})$, $E(\frac{5}{2})$

dargestellt.



a) Zeichnet diese 12 Zahlen auf einer Zahlenachse in eure Hefte.

b) Schreibt die Menge der dargestellten Zahlen mit der Abszisse im Intervall $[-1, 2]$.

c) Schreibt die Menge der dargestellten Zahlen mit der Abszisse im Intervall $(-\infty, 0)$.

d) Schreibt die Menge der dargestellten irrationalen Zahlen mit der Abszisse im Intervall $(-3, 2)$.

10 Berechnet die Summe der kleinsten und der größten ganzen Zahl des Intervalls:

a) $[-8, 6)$.

b) $(-\frac{31}{13}, \frac{148}{841})$.

11 Schreibt die Intervalle als Mengen:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < \dfrac{3x+8}{2} < 4\}$ und

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{6} < \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2}\}$.

12 Gegeben ist die Zahl $a = 7\sqrt{3} - \sqrt{75}$. Zeigt, dass $a \in (3; 4)$.

13 Zeigt, dass: **a)** $\dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, für jedes $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $\dfrac{k}{n \cdot (n+k)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+k}$, für jedes $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*$.

c) Gegeben ist die Zahl $b = \dfrac{5}{3 \cdot 8} + \dfrac{7}{8 \cdot 15} + \dfrac{9}{15 \cdot 24}$.

Prüft, ob $b \in (\frac{1}{4}; \frac{1}{3})$.

14 Sei x eine reelle Zahl im Intervall $(-1; 1)$. Beweise, dass $x^2 \in [0; 1)$ und $x^3 \in (-1; 1)$.

L3. Operationen mit Intervallen von reellen Zahlen

Wir erinnern uns!

Seien A und B zwei Mengen.

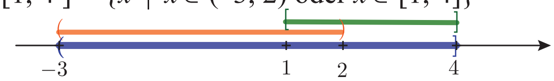
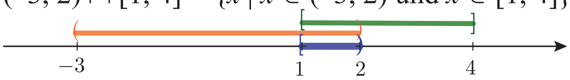
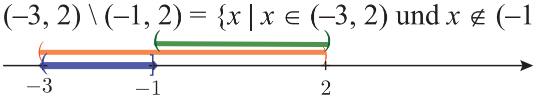
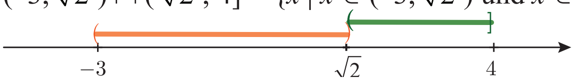
$A \cup B = \{x \mid x \in A$ oder $x \in B\}$. $\quad A \cap B = \{x \mid x \in A$ *und* $x \in B\}$. $\quad A - B = \{x \mid x \in A$ *und* $x \notin B\}$.

Intervalle von reellen Zahlen sind Teilmengen der Menge der reellen Zahlen. Folglich, werden wir dieselben Operationen wie bei den Mengen definieren.

Wir verstehen anhand von Beispielen

Die Darstellung der Operationen mit Intervallen auf der Zahlenachse ist sehr nützlich.

1. Anwendung: Berechnet: **a)** $(-3, 2) \cup [1, 4]$; **b)** $(-3, 2) \cap [1, 4]$; **c)** $(-3, 2) \setminus (-1, 2)$; **d)** $(-3, \sqrt{2}) \cap (\sqrt{2}, 4]$.

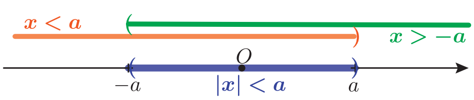
	Beschreibung und geometrische Darstellung	Ergebnis
a)	$(-3, 2) \cup [1, 4] = \{x \mid x \in (-3, 2)$ oder $x \in [1, 4]\}$ 	$(-3, 2) \cup [1, 4] = (-3, 4]$
b)	$(-3, 2) \cap [1, 4] = \{x \mid x \in (-3, 2)$ und $x \in [1, 4]\}$ 	$(-3, 2) \cap [1, 4] = [1, 2)$
c)	$(-3, 2) \setminus (-1, 2) = \{x \mid x \in (-3, 2)$ und $x \notin (-1, 2)\}$ 	$(-3, 2) \setminus (-1, 2) = (-3, -1]$
d)	$(-3, \sqrt{2}) \cap (\sqrt{2}, 4] = \{x \mid x \in (-3, \sqrt{2})$ und $x \in (\sqrt{2}, 4]\}$ 	$(-3, \sqrt{2}) \cap (\sqrt{2}, 4] = \varnothing$
Bemerkung. Die Vereinigung, der Durchschnitt und die Differenz zweier Intervalle sind nicht immer ein Intervall.		

Anwendungen

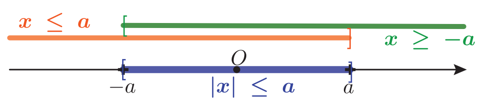
2. Anwendung:

a) Zeigt, dass für jede reelle Zahl $a > 0$ folgende Gleichungen stattfinden:

1. $\{x \in \mathbb{R}$ und $|x| < a\} = (-\infty; a) \cap (-a, \infty)$

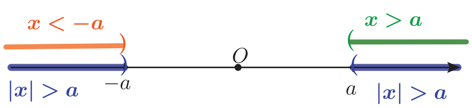


2. $\{x \in \mathbb{R}$ und $|x| \le a\} = (-\infty; a] \cap [-a, \infty)$

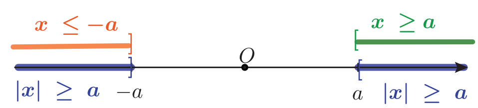


b) Zeigt, dass für jede reelle Zahl $a > 0$, folgende Äquivalenzen stattfinden:

1. $\{x \in \mathbb{R}$ und $|x| > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$



2. $\{x \in \mathbb{R}$ und $|x| \ge a\} = (-\infty; -a] \cup [a, +\infty)$



c) Zeigt, dass $\{x \in \mathbb{R}$ und $|x| \ge 0\} = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Aus b) 2, wenn $a = 0$, $\{x \in \mathbb{R}$ und $|x| \ge 0\} = (-\infty; 0] \cup [0, \infty) = (-\infty, +\infty)$.

Aufgaben

1 Schreibt als Intervall:

a) $[2, 5) \cup \{5\}$; **b)** $(-3, 1) \cup \{-3, 1\}$;
c) $[-2, 2] - \{-2, 2\}$; **d)** $[-4, 3] \cap [-2, 3]$;
e) $[-4, 3] \cup [-2, 3]$; **f)** $[-4, 3] - [-2, 3]$.

2 Beschreibt jede Menge durch Aufzählen ihrer Elemente:

a) $[-3, 5) \cap \mathbb{N}^*$; **b)** $[-3, 5) \cap \mathbb{Z}^*$;
c) $(-3, 3) \cap \mathbb{Z}$; **d)** $[-4, 4] \cap (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$.

3 Gegeben werden $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } -3 < x \leq 1\}$ und $B = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ und } -2 \leq y < 3\}$.
Von den Mengen A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, $A \cap \mathbb{N}$, $B \cap \mathbb{Z}$ wählt die Mengen aus, die:

a) als Intervall geschrieben werden können und zeichnet diese auf der Zahlenachse;
b) als endliche Mengen durch Aufzählen der Elemente geschrieben werden können.

4 Beschreibt die Mengen durch Aufzählen der Elemente:

a) $[-3, 2] \cap \mathbb{N}$; **c)** $[-2, 2] \cap \mathbb{Z}^*$;
b) $\left[-5, -1\frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Z}$; **d)** $\left(-\infty, \frac{17}{5}\right) \cap \mathbb{N}$.

5 Berechnet:

a) $[-3{,}4; 2] \cap \left[-2\sqrt{3}; 1\right]$;
b) $[-2, 3] \cap [-3, 2] \cap \mathbb{Z}^*$.

6 Berechnet $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, wenn:

a) $A = (-2, 4)$, $B = [0, 5]$;
b) $A = (-7, 3]$, $B = [3, 6)$;
c) $A = (-\sqrt{3}, 2)$, $B = (0, \sqrt{5}]$;
d) $A = (-\infty, 3)$, $B = (\sqrt{6}, 4]$.

7 **a)** Bestimmt $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $a < b$ und $[a, b] \cup [-2, 3] = [-4, 5]$.
b) Bestimmt $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $a < b$ und $[a, b] \cap [-3, 2] = [-2, 1]$.

8 Stellt fest, ob $1{,}2 \in A \cap B$, wobei $A = (-5, \infty)$ und $B = (-\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$.

9 Gegeben werden die Mengen
$C = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -3 < x < 2\}$,
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$.
Berechnet $C \cup D$, $D \cup C$, $C \cap D$, $D \cap C$, $C - D$, $D - C$.

10 Findet die Intervalle I und J, sodass $I \cup J = [1; 6]$ und $I \cap J = [2; 5]$.

11 Wenn $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < a < b$, stellt fest, ob:

a) $\frac{a+b}{2} \in (a, b)$; **b)** $\sqrt{ab} \in (a, b)$.

12 Wenn $0 < a < b$, berechnet
$(a, \sqrt{ab}) \cap \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$.

13 **a)** Bestimmt die ganzen Zahlen a und b, wenn $(a, b) \cap \mathbb{Z} = \{-2\}$.
b) Bestimmt die ganzen Zahlen c und d, wenn $[c, d] \cup (-1, 10) = [-1, 11]$.
c) Bestimmt die ganzen Zahlen e und f, wenn $[e, f] \cap [8, 11] = [9, 10]$.

14 Gegeben werden die Mengen

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{4}\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{5}{2}\}$;

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \geq x \geq -1\}$.

a) Schreibt die Mengen A, B, C als Intervalle von reellen Zahlen.
b) Berechnet $(A \cap B) \cup C$, $(A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

15 Ergänzt die Lücken, um wahre Sätze zu erhalten.

a) Als Intervall schreibt man $[-3, 3] - \{-\sqrt{9}, \sqrt{9}\}$ … .
b) Wenn $A = [-4\sqrt{2}, 7]$ und $B = (-5, 2^3)$, dann ist $A \cap B$ … .
c) Die Vereinigung $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$ ist ... .
d) Wenn $a, b \in \mathbb{N}$ und in der Menge $(a, 14) \cup [7, b)$ sechs natürliche Zahlen sind, dann ist $a =$ ... und $b =$ ... .
e) Wenn $a > 2$, dann ist $(3, a + 3) - (5, a + 5)$ ...

3 Ungleichungen der Form $ax + b \le 0$ $(<, >, \ge)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$

L1. Die Ungleichungsbeziehungen: $\le, \ge, <, >$ in der Menge der reellen Zahlen. Eigenschaften

Wir erinnern uns!

Um zwei Zahlen zu **vergleichen** (natürliche, ganze, rationale, reelle), verwenden wir ihre Darstellung auf der Zahlenachse, die Gleichheitsbeziehung „=“ oder die Ordnungsbeziehung „≤“ (kleiner oder gleich).
$a = b$ genau dann, wenn sie auf der Zahlenachse als identische Punkte dargestellt werden.
Seien A und B zwei Punkte mit den reellen Abszissen $x_A = a$ bzw. $x_B = b$.

$a < b$ (a ist kleiner als b) genau dann, wenn der Punkt A auf der Zahlenachse links von B liegt.

$a > b$ (a ist größer als b) genau dann, wenn der Punkt A auf der Zahlenachse rechts von B liegt.

$1 < 5$, weil A (1) links von B (5) dargestellt wird

$7{,}2 > 5{,}4$, weil $B(7{,}2)$ rechts von $A(5{,}4)$ dargestellt wird.

$a \le b \Leftrightarrow (a < b$ oder $a = b)$
$a \ge b \Leftrightarrow (a > b$ oder $a = b)$

$-2 \le -1{,}8$, weil $-2 < -1{,}8$, und $\sqrt{4} \le 2$, weil $\sqrt{4} = 2$.
$-1{,}8 \ge -2$, weil $-1{,}8 > -2$, und $\sqrt{4} \ge 2$, weil $\sqrt{4} = 2$.

Bemerkung. $(a < b$ oder $a > b) \Leftrightarrow a \ne b$.

Eigenschaften der Ungleichungsbeziehungen $\le, \ge, <, >$

Die Beziehung „≤“ hat folgende Eigenschaften in der Menge der reellen Zahlen:

$a \le a$, für jedes $a \in \mathbb{R}$	(Reflexivität)
Wenn $a \le b$ und $b \le a$, dann $a = b$.	(Antisymmetrie)
Wenn $a \le b$ und $b \le c$, dann $a \le c$.	(Transitivität)

Die Eigenschaften von „≤“ gelten auch für „≥“.

Die Beziehungen „<, >“ sind *transitiv* in $\mathbb{R}$

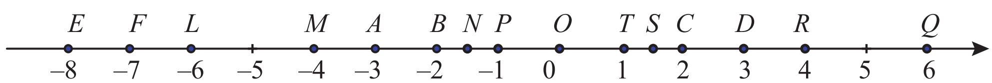
$(a < b$ und $b < c) \Rightarrow a < c$

$(a > b$ und $b > c) \Rightarrow a > c$

Wir lösen und stellen fest

In der 7. Klasse haben wir Gleichungen der Form $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, und Gleichungen, die auf diese Form zurückgeführt wurden, gelöst. Zum Lösen haben wir *die Eigenschaften der Gleichungen und der reellen Zahlen* verwendet.
Wir wollen feststellen, ob die Eigenschaften der Rechenoperationen mit reellen Zahlen auch für die *Ungleichungsbeziehungen* $\le, \ge, <, >$ zu äquivalenten Ungleichungen führen.

1. Anwendung: Seien : $A(-3)$, $B(-2)$, $C(2)$, $D(3)$, $E(-8)$, $F(-7)$, $L(-6)$, $M(-4)$, $N(-1{,}5)$, $P(-1)$, $Q(6)$, $R(4)$, $S(1{,}5)$, $T(1)$ Punkte auf der Zahlenachse.



Ergänzt die Lücken mit einem der Symbole ≤, ≥, >, <, =. Verwendet das Muster, um wahre Sätze zu erhalten.

a) $x_A < x_B$	$x_C < x_D$	$x_A + 5 = x_C$	$x_B + 5 = x_D$	$x_A + 5 < x_B + 5$
	$x_E \ldots x_F$	$x_A - 5 \ldots x_E$	$x_B - 5 \ldots x_F$	$x_A - 5 \ldots x_B - 5$
b) $x_A < x_B$	$x_L \ldots x_M$	$x_A \cdot 2 \ldots x_L$	$x_B \cdot 2 \ldots x_M$	$x_A \cdot 2 \ldots x_B \cdot 2$
	$x_N \ldots x_P$	$x_A : 2 \ldots x_N$	$x_B : 2 \ldots x_P$	$x_A : 2 \ldots x_B : 2$
c) $x_A < x_B$	$x_Q \ldots x_R$	$x_A \cdot (-2) \ldots x_C$	$x_B \cdot (-2) \ldots x_D$	$x_A \cdot (-2) \ldots x_B \cdot (-2)$
	$x_S > x_T$	$x_A : (-2) = x_E$	$x_B : (-2) = x_F$	$x_A : (-2) > x_B : (-2)$

Wir verstehen anhand von Beispielen

Bei der Addition und Subtraktion beider Terme einer Ungleichung mit einer reellen Zahl bleibt das *Ungleichungszeichen erhalten.*

1. Wenn a, b und c reelle Zahlen sind und $a < b$, dann ist $a + c < b + c$.
2. Wenn a, b und c reelle Zahlen und $a < b$, dann ist $a - c < b - c$.

Wir *addieren* die Zahl 5 zu *beiden Seiten* der Ungleichung $-3 < -2$.
Wir schreiben: $-3 < -2 \mid (+5) \Rightarrow -3 + 5 < -2 + 5 \Rightarrow 2 < 3$.
Wir *subtrahieren* die Zahl 5 von *beiden Seiten* der Ungleichung $-3 < -2$.
Wir schreiben: $-3 < -2 \mid (-5) \Rightarrow -3 - 5 < -2 - 5 \Rightarrow -8 < -7$.

Bei der Multiplikation mit einer *positiven* Zahl und bei der Division durch eine *positive* Zahl beider Seiten der Ungleichung *bleibt das Ungleichungszeichen erhalten.*

3. Wenn a, b reelle Zahlen sind, $a < b$ und $c > 0$, dann ist $a \cdot c < b \cdot c$.
4. Wenn a, b reelle Zahlen sind, $a < b$ und $c > 0$, dann $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Wir multiplizieren beide Seiten der Ungleichung $-3 < -2$ *mit* 2.
Wir schreiben: $-3 < -2 \mid (\cdot 2) \Rightarrow -3 \cdot 2 < -2 \cdot 2 \Rightarrow -6 < -4$.
Wir teilen beide Seiten der Ungleichung $-3 < -2$ durch 3.
Wir schreiben: $-3 < -2 \mid (:3) \Rightarrow \frac{-3}{3} < \frac{-2}{3} \Rightarrow -1 < -0{,}(6)$.

Bei der Multiplikation mit einer *negativen* Zahl und bei der Division durch eine *negative* Zahl wird das *Ungleichungszeichen geändert.*

5. Wenn a, b reelle Zahlen sind, sodass $a < b$ und $c < 0$, dann $a \cdot c > b \cdot c$.
6. Wenn a, b reelle Zahlen sind, sodass $a < b$ und $c < 0$, dann $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Wir multiplizieren beide Seiten der Ungleichung $-3 < -2$ mit -1.
Wir schreiben: $-3 < -2 \mid \cdot (-1) \Rightarrow -3 \cdot (-1) > -2 \cdot (-1) \Rightarrow 3 > 2$.
Wir teilen beide Seiten der Ungleichung $-3 < -2$ durch $-2 < 0$.
Wir schreiben: $-3 < -2 \mid : (-2) \Rightarrow \frac{-3}{-2} > \frac{-2}{-2} \Rightarrow 1{,}5 > 1$.

Anwendungen

2. Anwendung: Beweist mithilfe der Eigenschaften **1 – 6**.

GA **1′**. Wenn $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a + c < b + c$, dann $a < b$. **2′**. Wenn $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a - c < b - c$, dann $a < b$.
3′. Wenn $a, b \in \mathbb{R}$, $c > 0$ und $a \cdot c < b \cdot c$, dann $a < b$. **4′**. Wenn $a, b \in \mathbb{R}$, $c > 0$ und $a : c < b : c$, dann $a < b$.
5′. Wenn $a, b \in \mathbb{R}$, $c < 0$ und $a \cdot c > b \cdot c$, dann $a < b$. **6′**. Wenn $a, b \in \mathbb{R}$, $c < 0$ und $a : c > b : c$, dann $a < b$.

Bemerkung. Die Eigenschaften der Beziehung „<“ sind gültig für alle Ungleichungsbeziehungen: >, ≤, ≥.

Fürs Portfolio

Formuliert die äquivalenten Aussagen nach dem Muster (2, 2′), (3, 3′), (4, 4′), (5, 5′), (6, 6′).

Direkter Satz	*Kehrsatz*	*Schlussfolgerung*
1. Wenn $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a < b$, dann folgt $a + c < b + c$.	**1′.** Wenn $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a + c < b + c$, dann folgt $a < b$.	Wenn $a, b, c \in \mathbb{R}$, dann $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.

Das Ungleichungszeichen bleibt erhalten, wenn: zu beiden Seiten einer Ungleichung eine Zahl addiert oder von beiden Seiten eine Zahl subtrahiert wird; beide Seiten einer Ungleichung mit einer *positiven* Zahl multipliziert oder durch eine *positive* Zahl geteilt werden.

Wird zu beiden Seiten einer Ungleichung dieselbe reelle Zahl *addiert* (oder von beiden Seiten dieselbe reelle Zahl *subtrahiert*), bleibt das Ungleichungszeichen und man erhält eine äquivalente Ungleichung.

Werden beide Seiten einer Ungleichung mit derselben reellen *positiven* Zahl *multipliziert* oder durch dieselbe positive Zahl *geteilt*, bleibt das Ungleichungszeichen und man erhält eine äquivalente Ungleichung.

Wenn beide Seiten einer Ungleichung mit derselben *negativen* Zahl multipliziert oder durch dieselbe *negative* Zahl geteilt werden, wird das Ungleichungszeichen umgekehrt. Man erhält eine äquivalente Ungleichung.

Aufgaben

1 Gegeben ist die Ungleichung $4 < 7$. Formuliert die Ungleichungen, die erhalten werden, wenn man:
a) zu beiden Seiten 6 addiert.
b) von beiden Seiten 7 subtrahiert.
c) beide Seiten mit 3 multipliziert.
d) beide Seiten durch 2 teilt.
e) beide Seiten mit –3 multipliziert.
f) beide Seiten durch –2 teilt.

2 Schreibt folgende Sätze in eure Hefte und ergänzt mit den Symbolen $<, \leq, >$ oder $\geq$:
a) Wenn $x \leq -7$, dann $3x \ldots -21$.
b) Wenn $x < -2$, dann $-3x \ldots 6$.
c) Wenn $x \geq -4$, dann $-2x \ldots 8$.
d) Wenn $x > -5$, dann $4x \ldots -20$.
e) Wenn $x \geq -2$, dann $-5x \ldots 10$.
f) Wenn $-2x \leq -14$, dann $x \ldots 7$.
g) Wenn $x < 19$, dann $-3x \ldots -57$.
h) Wenn $-x > -10$, dann $3x \ldots 30$.

3 Sei $a > \frac{3}{7}$. Zeigt, dass die Zahl $-7a + 3$ negativ ist.

4 Gegeben wird $-\frac{7}{2} \leq 2b - \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}$.

Zeigt, dass $|b| \leq \frac{3}{2}$.

5 Gegeben werden $a \geq \frac{2}{3}$ und $b \geq -\frac{3}{2}$.
Zeigt, dass $9a + 4b \geq 0$.

6 **a)** Wenn $a < b$, beweist, dass

$$\left(\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}\right) \subset (a, b).$$

b) Wenn $-c > -d$, beweist, dass

$$\left(\frac{3c+d}{4}, \frac{c+3d}{4}\right) \subset (c, d).$$

L2. Ungleichungen der Form $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥), wobei $a, b \in \mathbb{R}$

Wir erinnern uns!

Bei der Addition, Subtraktion, Multiplikation mit einer *positiven* Zahl, Division durch eine *positive* Zahl beider Seiten einer Ungleichung bleibt das *Ungleichungszeichen* ≤, ≥, >, < unverändert.
Bei der Multiplikation beider Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl oder Division durch eine negative Zahl wird das Ungleichungszeichen *verändert.*

Wir lösen und stellen fest

Aufgabe. Eine Handwerkerfamilie braucht 450 Lei für die Herstellung und den Verkauf ihrer Ware. Mit den angeschafften Materialien können mindestens 20 und höchstens 40 Objekte hergestellt werden, die dann um 15 Lei das Stück verkauft werden.

FU

a) Stellt fest, ob die Familie ihre Ausgaben deckt, wenn sie 20 Stück erzeugt und verkauft.
b) Entscheidet, ob die Familie *Profit* macht, wenn sie 30 Objekte erzeugt und verkauft.
c) Berechnet den *Profit* bei 32 verkauften Objekten.
d) Bestimmt die Anzahl der Objekte, die hergestellt werden müssen, damit die Familie nach dem Verkauf der Ware mindestens 105 Lei *Profit* hat.

Wörterbuch
Profit = die Differenz zwischen den Einnahmen aus dem Verkauf der Ware und den Ausgaben

Lösung. **a)** Der Verkauf von 20 Objekten wird $20 \cdot 15 = 300$ (Lei) und $300 < 450$ einbringen. Folglich wird das verbrauchte Geld nicht nachgeholt. Es fehlen noch $450 - 300 = 150$ (Lei).
b) Nach dem Verkauf von 30 Objekten werden $30 \cdot 15 = 450$ (Lei) erhalten, also haben die Handwerker ihre Ausgaben gedeckt, haben jedoch keinen Gewinn. (Die Differenz zwischen den Einnahmen aus dem Verkauf der Ware und den Ausgaben ist: $450 - 450 = 0$ Lei.)
c) Falls die Handwerker 32 Objekte erzeugen und auch verkaufen, erhalten sie $32 \cdot 15 = 480$ (Lei). Der Gewinn ist $480 - 450 = 30$ (Lei).
d) Wir bezeichnen mit x die Anzahl der erzeugten und verkauften Objekte, der Gewinn ist $15 \cdot x - 450$, wobei $x > 30$. Man soll x aus der Menge der natürlichen Zahlen $M = \{20, 21, \ldots, 40\}$ bestimmen, sodass $15 \cdot x - 450 \geq 105$.

Bemerkung. Das Beschreiben der mathematischen Situation hat zur folgenden Aufgabe geführt: „Bestimmt x aus der Menge $M = \{20, 21, \ldots, 40\}$, für welche $15 \cdot x - 450 \geq 105$." Die Aufgabe kann auch anders, in mathematischer Sprache formuliert werden: „Löst die Ungleichung $15 \cdot x - 450 \geq 105$ in der Menge $M = \{20, 21, \ldots, 40\}$."

Ein Element x *aus der Menge* $M = \{20, 21, \ldots, 40\}$, *für welches* $15 \cdot x - 450 \geq 105$, heißt *Lösung* der Ungleichung.

Beispiele: Wir finden durch Versuche: $15 \cdot 20 - 450 = -150 < 105$; $15 \cdot 30 - 450 = 0 < 105$; $15 \cdot 32 - 450 = 30 < 105$, $15 \cdot 36 - 450 = 90 < 105$. Folglich sind die Zahlen 20, 30, 32, 36 keine Lösungen der Ungleichung $15 \cdot x - 450 \geq 105$. Wir stellen fest, dass $15 \cdot 40 - 450 = 150 > 105$, also ist die Zahl 40 eine Lösung der Ungleichung $15 \cdot x - 450 \geq 105$. Auch die Zahl 39 ist eine Lösung der Ungleichung.

Die Ungleichung $15 \cdot x - 450 \geq 105$ in der Menge M lösen, bedeutet, alle Lösungen aus M zu finden.

Lösen der Ungleichung

$15 \cdot x - 450 \geq 105$	
$15 \cdot x - 450 + 450 \geq 105 + 450$	• Wir addieren 450 zu beiden Seiten der Ungleichung.
$15 \cdot x \geq 555$	• Wir rechnen aus.
$\dfrac{15 \cdot x}{15} \geq \dfrac{555}{15}$	• Wir teilen jeden Term der Ungleichung durch 15.
$x \geq 37$	• Wir rechnen aus.
Die Lösungen der Gleichung $15 \cdot x - 450 \geq 105$ sind Zahlen aus der Menge $M = \{20, 21, \ldots, 40\}$, mindestens gleich mit 37, folglich ist $S = \{37, 38, 39, 40\}$.	• Wir schreiben die Lösungsmenge.

Jetzt können wir sagen, dass die Handwerker *mindestens* 37 Objekte verkaufen müssen, um einen Profit von mindestens 105 Lei zu erzielen.

Wir verstehen anhand von Beispielen

A. Ungleichungen der Form *ax* + *b* ≤ 0 (<, >, ≥), *a*, *b* $\in \mathbb{R}$

Das Bestimmen des Wertes x aus der Menge $M \subset \mathbb{R}$ für $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥), wobei $a, b \in \mathbb{R}$, heißt *lineare Ungleichung* mit der Unbekannten x und den reellen Koeffizienten a und b.

$ax + 7 \leq 0$, $a \in \mathbb{R}$ ist eine lineare Ungleichung mit der Unbekannten x und den reellen Koeffizienten a und 7.

Die Zahl a ist der Koeffizient der Unbekannten, die Zahl b ist das freie Glied (der freie Term).

Der Koeffizient der Unbekannten ist die reelle Zahl a, das freie Glied (der freie Term) ist 7.

Für $a \neq 0$ wird die Ungleichung $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥) *Ungleichung* I. Grades mit der Unbekannten x und mit reellen Koeffizienten genannt.

$-2x + 3 > 0$, $x \in \mathbb{N}$ ist eine Ungleichung I. Grades mit der Unbekannten x, wobei x eine natürliche Zahl ist. Der Koeffizient der Unbekannten ist –2, der freie Term ist 3.

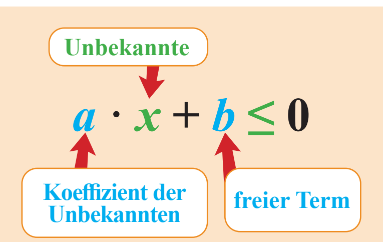
Bemerkungen

1. Falls die Menge M nicht genannt wird, so wird diese als die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ angenommen.

2. Die Unbekannten der Ungleichung können auch mit anderen Buchstaben bezeichnet werden.

$2m + 1 < 0$ ist eine Ungleichung mit der Unbekannten m, wobei m eine reelle Zahl ist.

$-y + 5 < 0$, $y \in \mathbb{Q}$ ist eine Ungleichung mit der Unbekannten y, wobei y eine rationale Zahl ist.



A. Aufgabe	B. Ungleichung
1. Bestimmt die *natürliche Zahl x*, *für welche* $15 \cdot x - 10 \leq 0$.	1. Löst die Ungleichung $15 \cdot x - 10 \leq 0$ in $\mathbb{N}$.
2. Bestimmt die *reellen Zahlen x*, für welche $15 \cdot x - 10 \leq 0$.	2. Löst die Ungleichung $15 \cdot x - 10 \leq 0$.

B. Die Lösungen der Ungleichung der Form $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥). Die Lösungsmenge einer Ungleichung

Man nennt *Lösung* der Ungleichung $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$), wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und x die Unbekannte, $x \in M$, jedes Element der Menge M, welches die Ungleichung $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$) erfüllt.

Beispiele: Wenn $M = \mathbb{Z}$ und die Ungleichung $-2 \cdot x + 3 > 0$ mit der Unbekannten x ist:

a) Für $x = -3$ erhalten wir: $(-2) \cdot (-3) + 3 > 0$ oder $9 > 0$, einen wahren Satz. Wir sagen, dass die ganze Zahl -3 die Ungleichung erfüllt oder, dass -3 *eine Lösung der Ungleichung ist.*

b) Für $x = 3$ erhalten wir : $(-2) \cdot 3 + 3 > 0 \Leftrightarrow -3 > 0$, einen falschen Satz. Wir sagen, dass die ganze Zahl 3 die Ungleichung *nicht erfüllt,* oder, dass die ganze Zahl 3 *keine Lösung der Ungleichung ist*.

c) Die Zahl $-0{,}25$ ist keine Lösung der obigen Ungleichung, obwohl $(-2) \cdot (-0{,}25) + 3 > 0$, weil $-0{,}25$ *keine ganze Zahl ist.*

Bemerkung. Die Werte der Unbekannten, welche die Gleichung erfüllen und nicht Elemente der Menge M sind, *sind keine Lösungen der Ungleichung*.

Die Menge aller Lösungen der Ungleichung wird mit S bezeichnet und heißt *die Lösungsmenge der Ungleichung*.

C. Lösen der Ungleichung der Form $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥), wobei $a, b \in \mathbb{R}$

Eine Ungleichung $a \cdot x + b \leq 0$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, *lösen*, bedeutet, die Lösungsmenge S bestimmen.

Durch äquivalente Umwandlungen erhält man: $a \cdot x + b \leq 0 \,|\, -b \Leftrightarrow a \cdot x \leq -b.$

Für $a \neq 0$:

a) $a > 0$	$a \cdot x \leq -b \,\big|\, :a \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{b}{a}.$	Lösungen sind alle reellen Zahlen, höchstens gleich $-\dfrac{b}{a}$. Wir schreiben $S = \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right]$.
b) $a < 0$	$a \cdot x \leq -b \,\big|\, :a \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{b}{a}.$	Lösungen sind alle reellen Zahlen, mindestens gleich $-\dfrac{b}{a}$. Wir schreiben $S = \left[-\dfrac{b}{a}, \infty\right)$.

In der Praxis kommt es oft vor, dass Ungleichungen durch Umwandlungen in äquivalente Ungleichungen der Form $a \cdot x + b \leq 0$ verwandelt werden, wobei nicht bekannt ist, ob a nicht null ist.

Für $a = 0$ wird die Ungleichung $a \cdot x + b \leq 0$ $0 \cdot x + b \leq 0$, $b \in \mathbb{R}$.

a) Wenn $b \leq 0$, dann gilt die Beziehung für jedes reelle x, folglich ist $S = \mathbb{R}$.

b) Wenn $b > 0$,dann gibt es keinen reellen Wert, der die Beziehung erfüllt, also $S = \varnothing$.

Bemerkung: Wenn die Lösung der Menge $M \subset \mathbb{R}$ gehört, dann ist die Lösungsmenge der Durchschnitt aus $\mathbb{R}$ mit der Menge M.

Beispiel: Gegeben wird die Ungleichung $-2x + 3 > 0$. **a)** Löst die Ungleichung in der Menge $\mathbb{Z}$; **b)** Löst die Ungleichung.

$$-2x + 3 > 0 \,|\, -3 \Leftrightarrow -2x + 3 - 3 > 0 - 3 \Leftrightarrow -2x > -3 \,|\, :(-2) \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} < \frac{-3}{-2} \Leftrightarrow x < 1{,}5$$

a) $S = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x < 1{,}5\} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ oder $S = (-\infty, 1{,}5] \cap \mathbb{Z}$.

b) Da die Menge *M nicht bekannt ist,* wird die Ungleichung in der Menge der reellen Zahlen gelöst, folglich ist die Lösungsmenge $S = (-\infty, 1{,}5]$.

Achtung!

Wenn beide Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert werden oder durch eine negative Zahl geteilt werden, dann ändert sich das Ungleichungszeichen.

$$-2x > -3 \,|\, :(-2) \qquad \frac{-2x}{-2} < \frac{-3}{-2}$$

D. Die geometrische Darstellung der Lösungsmenge einer Ungleichung der Form $ax + b \leq 0$ (<, >, ≥)

Anwendungen

1. Anwendung . a) Schreibt jede Aufgabe mathematisch mithilfe einer Ungleichung.

GA

a_1. Das Dreifache der entgegengesetzten Zahl der reellen Zahl x ist mindestens gleich mit 21.

a_2. Der dritte Teil der ganzen Zahl x hat den absoluten Betrag kleiner als 1.

b) Löst die obigen Ungleichungen.

c) Stellt jede Lösungsmenge auf der Zahlenachse dar.

Lösung.

a) **a_1** $3 \cdot (-x) \geq 21, x \in \mathbb{R}$.

a_2 $\left|\frac{1}{3} \cdot x\right| < 1, x \in \mathbb{Z}$.

b) $-3x \geq 21 \mid : (-3)$

$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{21}{-3}$$

$$x \leq -7$$

Schlussfolgerung: Die Lösungen der Ungleichung sind reelle Zahlen x, mit der Eigenschaft $x \leq -7$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7\} = (-\infty, -7)$ ist auf der Zahlenachse eine Halbgerade..

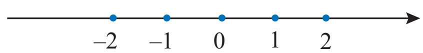
$$-1 < \frac{x}{3} < 1 \mid \cdot 3$$

$$-3 < x < 3$$

Schlussfolgerung: Die Lösungen der Ungleichung sind ganze Zahlen x, mit der Eigenschaft $-3 < x < 3$.

$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ wird auf der Zahlenachse durch 5 Punkte dargestellt.

c)



2. Anwendung: Gegeben werden die Ungleichungen: $x + 3 < 5$, $2x - 1 > 1$, $5x + 3 \geq -2$, $-7x + 3 \geq -11$.

a) Löst die Ungleichungen in $\mathbb{R}$.

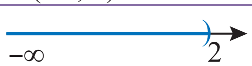
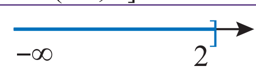
b) Stellt die Lösungsmengen der vier Ungleichungen geometrisch dar.

c) Löst die Ungleichungen in der Menge $M = [2, \infty)$.

d) Stellt die Lösungsmengen von Punkt c) geometrisch dar.

e) Löst die Ungleichungen in der Menge $M \cap \mathbb{Q}$.

f) Prüft, ob die Lösungsmengen von Punkt e) geometrisch dargestellt werden können.

	$x + 3 < 5$	$2x - 1 > 1$	$5x + 3 \geq -2$	$-7x + 3 \geq -11$
a)	$x < 2$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ $S = (-\infty, 2)$	$2x > 2$ $x > 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ $S = (1, +\infty)$	$5x \geq -5$ $x \geq -1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ $S = [-1, +\infty)$	$-7x \geq -14$ $x \leq 2$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ $S = (-\infty, 2]$
b)				
c)	$S = (-\infty, 2) \cap [2, \infty)$ $S = \varnothing$	$S = (1, +\infty) \cap [2, \infty)$ $S = [2, \infty)$	$S = [-1, +\infty) \cap [2, \infty)$ $S = [2, \infty)$	$S = (-\infty, 2] \cap [2, \infty)$ $S = \{2\}$
d)	Die Ungleichung hat keine Lösung.			
e)	$S = \varnothing \cap \mathbb{Q}$	$S = [2, \infty) \cap \mathbb{Q}$	$S = [2, \infty) \cap \mathbb{Q}$	$\{2\} \cap \mathbb{Q} = \{2\}$
f)	Die Ungeichung hat keine Lösung.	Nicht alle Elemente der Menge S können auf der Zahlenachse dargestellt werden		

Schlussfolgerung.

1. Die Lösungsmenge einer Ungleichung der Form $ax + b \leq 0$ $(<, >, \geq)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, wird auf der Zahlenachse als Intervall dargestellt.

2. Falls die Ungleichung in einer unendlichen Menge gelöst werden soll, die kein Intervall ist, dann könnte es sein, dass die Lösungsmenge nicht geometrisch dargestellt werden kann.

Die Ungleichungen der Form $ax + b \leq 0$ $(<, >, \geq)$, wobei a und b gegebene Zahlen sind, $a \neq 0$, heißen *Ungleichungen I. Grades mit einer Unbekannten.*
Die reellen Zahlen a und b sind *Koeffizienten,* x ist die *Unbekannte der Ungleichung.*
Die Lösungsmenge einer Ungleichung der Form $ax + b \leq 0$ $(<, >, \geq)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, ist in der Menge der reellen Zahlen ein Intervall.

Aufgaben

1 Schreibt die Tabelle in eure Hefte und ergänzt nach dem Muster.

Ungleichung	Koeffizienten		Unbekannte
$ax + b \leq 0$	a	b	x
$\sqrt{2}\,y + 4 \leq 0$	$\sqrt{2}$	4	y
$-6{,}2\,m + 3{,}6 \leq 0$			
$-0{,}6\,x - 1{,}5 \leq 0$			

2 Bestimmt:
a) Die natürlichen Zahlen kleiner als 5.
b) Die negativen ganzen Zahlen größer als –4.
c) Die Elemente aus der Menge
$M = \{-2000; -1; 0,75; \sqrt{2}; 17; \sqrt{199}\}$,
die die Beziehung $x \leq 10$ erfüllen.
d) Die Zahlen der Form $\overline{ab}$, mit der Eigenschaft $-\frac{72}{\overline{ab}} < -6$.

3 Prüft, ob –1 eine Lösung der Ungleichung ist.
a) $4 \cdot x + 3 < 1$; **b)** $x + 4 \geq 3$; **c)** $\frac{1}{x+2} < 0$.

4 **A.** Gegeben wird die Aufgabe: „Der Umfang eines Rechtecks mit der Länge x cm und der Breite 1,5 cm ist höchstens 10 cm".
a) Zeigt, dass x keinen der Werte: –2; –1,5; 0; 4; 6,5 haben kann.
b) Entscheidet, ob x 2 oder 3 sein kann.
c) Formuliert die Aufgabe als Ungleichung.

B. Gegeben wird die Ungleichung $2x + 3 \leq 10$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.
a) Begründet, weshalb die Zahlen –2; –1,5; 0; 4; 6,5 keine Lösungen der Ungleichung sind.
b) Begründet, weshalb die Zahlen 2 und 3 Lösungen der Ungleichung sind.
c) Schreibt die Tabelle in eure Hefte und ergänzt die Lücken, indem ihr die Lösungsetappen für die Ungleichung $2x + 3 \leq 10$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ beachtet.

$2 \cdot x + 3 \leq 10$	
$2 \cdot x + 3 - 3 \leq 10 - 3$	• *wir subtrahieren 3 von beiden Seiten der Ungleichung.*
$2 \cdot x \leq 7$	• …
$\frac{2 \cdot x}{2} \leq \frac{7}{2}$	• wir teilen …
$x \leq \ldots$	• ...
Die Lösungen der Ungleichung sind Zahlen aus der Menge $\mathbb{R}_+^*$, *höchstens gleich 3,5.*	

C. Man bezeichnet mit S Die Lösungsmenge einer Ungleichung $2x + 3 \leq 10$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.
a) Schreibt die Menge S mithilfe einer charakteristischen Eigenschaft aller Elemente.
b) Bestimmt, ob die Zahlen 0 bzw 3,5 Lösungen der Ungleichung sind.
c) Stellt die Menge S auf der Zahlenachse dar.

D. Löst den Punkt c) für die Ungleichung $2x + 3 \geq 10$, $x \in \mathbb{R}$.

5 Seien $2x + 4 < 0$; $5x - 10 < 0$; $-6x + 12 < 0$; $-0{,}8x + 2{,}4 < 0$ Ungleichungen.

a) Löst jede Ungleichung und stellt die Lösungsmenge auf der Zahlenachse dar.

b) Ersetzt in den gegebenen Ungleichungen das Symbol $<$ der Reihe nach durch die Symbole $\leq, >, \geq$, löst die erhaltenen Ungleichungen und stellt die Lösungsmenge auf der Zahlenachse dar.

6 Löst in der Menge der reellen Zahlen folgende Ungleichungen und stellt die Lösungsmenge auf der Zahlenachse dar.

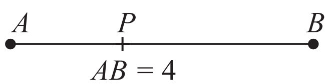
a) $x + 3 < 0$; **b)** $2{,}3 + x \geq 0$;

c) $0 > -x + \sqrt{2}$; **d)** $\frac{1}{4} \cdot x - 1 \leq 0$;

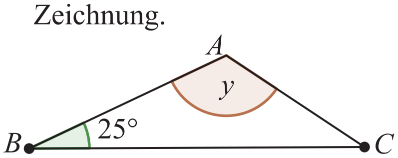
e) $\frac{x+5}{-3} \leq 0$; **f)** $-7 \cdot x > 0$.

7 Verwendet die Informationen aus den unteren Zeichnungen und schreibt die Ungleichungen, die den Unbekannten entsprechen:

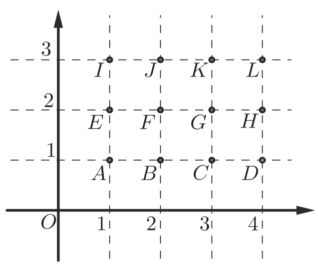
a) x ist die Länge der Strecke PA, wobei sich der Punkt P auf der Strecke AB befindet.



b) y ist das Maß des Winkels A aus der unteren Zeichnung.



c) Bestimmt die größte natürliche Zahl m und die kleinste natürliche Zahl n, sodass $m < x < n$ für jedes x, das Abszisse eines Punktes aus der unteren Darstellung ist.



d) Bestimmt die größte natürliche Zahl p und die kleinste natürliche Zahl q, sodass $p < y < q$ für jedes y, das Ordinate eines Punktes aus der obigen Darstellung ist.

8 Löst die Ungleichungen in $\mathbb{R}$:

a) $3 \cdot x + 6 \geq 0$; **b)** $-4 \cdot x + 2 \leq 0$;

c) $-5 \cdot (x + 2) > 0$; **d)** $4 \cdot (x - 1) > 0$;

e) $x : 6 + 0{,}1(6) < 0$; **f)** $\frac{5}{6} \cdot (3 - x) \leq 0$;

g) $-10 \cdot (x - 0{,}25) > 0$;

h) $0 \cdot x + 1 \geq 0$; **i)** $-5 + x < 0$.

9 Löst die Ungleichungen:

a) $\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{15} < 0$;

b) $-\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{32} > 0$;

c) $(1 - \sqrt{5}) \cdot x - 1 + \sqrt{5} \leq 0$.

10 Bestimmt die Werte der reellen Zahl x, sodass:

a) die Zahl $-1{,}5 \cdot x + 4{,}5$ positiv ist;

b) die Zahl $\frac{2}{3} \cdot x - \frac{4}{9}$ negativ ist;

c) die Zahl $\sqrt{10} \cdot x + 10$ nicht negativ ist;

d) die Zahl $-3^2 \cdot x - 3^3$ mindestens gleich null ist.

11 Bestimmt die Werte der reellen Zahl y, sodass die Quadratwurzeln einen Sinn haben:

a) $\sqrt{y-5}$ **b)** $\sqrt{2 \cdot y - 3}$

c) $\sqrt{5{,}4 - 3 \cdot y}$ **d)** $\sqrt{\frac{1}{2 \cdot y - 7}}$

12 Bestimmt, ob reelle Zahlen x existieren, sodass die Zahlen $5 \cdot x - 3$ und $5 - 3 \cdot x$ gleichzeitig positiv sind.

13 Löst die Ungleichungen in der Menge der natürlichen Zahlen:

a) $3 \cdot x - \frac{9}{2} \leq 0$;

b) $-x + 2 \geq 0$;

c) $\frac{2 \cdot x - 11}{-5} \leq 0$;

d) $0 \cdot x \geq x$.

14 Löst die Ungleichungen in der Menge der ganzen Zahlen:

a) $-2 \cdot x + 3 \leq 0$;

b) $\frac{x}{2} - 2^{-1} > 0$;

c) $x : (-2)^3 < 0$;

d) $(2^{15} - 2^{14} - \ldots - 2^{9}) \cdot (-x) \leq 8^3$.

L3. Ungleichungen, die auf die Form $ax + b \le 0$ (<, >, ≥), $a, b \in \mathbb{R}$, zurückgeführt werden können

Wir lösen und stellen fest

Einige Aufgaben aus dem Alltag können mithilfe der Ungleichungen gelöst werden, die auf die Form $ax + b \le 0$ zurückgebracht werden, wobei a und b natürliche reelle Zahlen sind.

1. Aufgabe Ein Forschungsinstitut beschäftigt derzeit 27 Informatiker und
SA 15 Mathematiker. Das Institut organisiert einen Wettbewerb, um weitere Mathematiker und genauso viele Informatiker anzustellen. Wir beabsichtigen herauszufinden, wie viele Mathematiker angestellt werden, sodass die Gesamtzahl der Mathematiker des Instituts höchstens zwei Drittel der Gesamtzahl der Informatiker desselben Instituts ist.

Lösung. **1**. *Das mathematische Modell*: x ist die Anzahl der Mathematiker, die nach dem Wettbewerb angestellt werden. Es werden dann auch x Informatiker neu angestellt. Dann werden $x + 15$ *Mathematiker* und $x + 27$ *Informatiker* im Institut arbeiten.
Weil „Gesamtzahl der Mathematiker des Instituts höchstens zwei Drittel der Gesamtzahl der Informatiker" sein soll, erhalten wir die Ungleichung $x + 15 \le \frac{2}{3}(x + 27)$.

*Bemerkung***.** Die mathematische Modellierung der Situation führt zu folgender Aufgabe:

Bestimmt die natürlichen Zahlen x, sodass

$$x + 15 \le \frac{2}{3}(x + 27).$$

Oder anders: *Löst die Ungleichung in der Menge der natürlichen Zahlen* $x + 15 \le \frac{2}{3}(x + 27)$.

Das korrekte Durchführen der Rechnungen und die Anwendung der Eigenschaften der Operationen mit reellen Zahlen und anderer Rechenregeln verwandelt die Ungleichung $x + 15 \le \frac{2}{3}(x + 27)$ in eine äquivalente Ungleichung der Form $ax + b \le 0$, wobei a und b reelle Zahlen sind.

Deshalb sagt man, die Ungleichung $x + 15 \le \frac{2}{3}(x + 27)$ sei *zurückführbar* auf die Form $ax + b \le 0$.

2. *Das Lösen der Ungleichung* $x + 15 \le \frac{2}{3}(x + 27)$ in der Menge der reellen Zahlen:

Wir multiplizieren beide Seiten der Ungleichung mit 3:	$x + 9 \le \frac{2}{3}(x + 15) \mid \cdot 3$
Wir schreiben die äquivalente Ungleichung:	$3 \cdot (x + 9) \le 2 \cdot (x + 15)$
Wir wenden die Distributivität der Multiplikation in Bezug auf die Addition an und erhalten:	$3 \cdot x + 27 \le 2 \cdot x + 30$
Wir subtrahieren von beiden Seiten der Ungleichung den zweiten Term der Ungleichung:	$3 \cdot x + 27 - (2 \cdot x + 30) \le 2 \cdot x + 30 - (2 \cdot x + 30)$
Wir führen die Rechnungen aus und erhalten eine äquivalente Ungleichung:	$x - 3 \le 0$
Wir schreiben die Lösungsmenge der Ungleichung:	$S = (-\infty, 3]$

3. *Das Formulieren der Antwort*: Um die Antwort korrekt zu schreiben, werden aus den erhaltenen Lösungen nur die ausgewählt, die den Angaben entsprechen. Das Institut wird „Mathematiker anstellen" bedeutet, dass die Anzahl der Mathematiker eine natürliche, von null verschiedene Zahl ist. Deshalb lautet die richtige Antwort: *Das Institut wird 1, 2 oder 3 Mathematiker anstellen*.

2. Aufgabe In zwei Silos wurden 2800 t Futter bzw. 1300 t Futter gelagert. Aus dem ersten Lager werden 100 t Futter pro Tag an Viehzuchtbetriebe geliefert und aus dem zweiten Lager 25 t Futter pro Tag. Bestimmt die Anzahl der Tage, an denen nach der Lieferung die im ersten Silo verbleibende Futtermenge mindestens doppelt so hoch ist wie im zweiten.

GA

Lösung. **1.** *Mathematische Modellierung*: x ist die Anzahl der Tage, an denen nach der Lieferung die im ersten Silo verbleibende Futtermenge mindestens doppelt so hoch ist wie im zweiten. Dann *bleiben im ersten Silo* 2800 –100 x (Tonnen) und im *zweiten Silo* 1300 – 25x (Tonnen). Da nach x Tagen „die im ersten Silo verbleibende Futtermenge mindestens doppelt so hoch ist wie im zweiten", erhalten wir die Ungleichung $2800 - 100x \geq 2(1300 - 25x)$, die zurückführbar ist auf die Form $ax + b \geq 0$.

2. *Lösung der Ungleichung:* $2800 - 100x \geq 2(1300 - 25x) \Leftrightarrow 2800 - 100x \geq 2600 - 50x \mid -(2600 - 50x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2800 - 100x - 2600 + 50x \geq 0 \Leftrightarrow -50x + 200 \geq 0 \Rightarrow S = (-\infty, 4]$.

3. *Das Formulieren der Antwort*: $2800 > 1300 \cdot 2$. Die im ersten Silo verbleibende Futtermenge ist 4 Tage lang mindestens doppelt so hoch wie die im zweiten. Zum Beispiel bleiben nach 3 Tagen im ersten Silo 2500 t, und im zweiten Silo 1225 t und $2500 \geq 2 \cdot 1225$.

Wir verstehen anhand von Beispielen

1. Anwendung Schreibt die Ungleichung $\dfrac{a}{bx+c} < 0$ $(>, \leq, \geq)$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$, in der Form $mx + n < 0\ (>)$.

Bemerkung. Aus dem Studium der Ungleichungen dieser Form schließen wir aus, dass $bx + c$ gleich 0 ist, weil der Nenner $\dfrac{a}{bx+c}$ keinen Sinn hätte.

Ungleichung	Vorzeichenregel	Umwandlung der Ungleichung
1) $\dfrac{3}{-2x+5} < 0.$	$a > 0$ und $\dfrac{a}{bx+c} < 0 \Rightarrow bx + c < 0$	$3 > 0$, also $\dfrac{3}{-2x+5} < 0 \Leftrightarrow -2x + 5 < 0$
2) $\dfrac{-8}{-2x+5} < 0.$	$a < 0$ und $\dfrac{a}{bx+c} < 0 \Rightarrow bx + c > 0$	$-8 < 0$, also $\dfrac{-8}{-2x+5} < 0 \Leftrightarrow -2x + 5 > 0$
3) $\dfrac{12}{-2x+5} > 0.$	$a > 0$ und $\dfrac{a}{bx+c} > 0 \Rightarrow bx + c > 0$	$12 > 0$, also $\dfrac{12}{-2x+5} > 0 \Leftrightarrow -2x + 5 > 0$
4) $\dfrac{-7}{-2x+5} > 0.$	$a < 0$ und $\dfrac{a}{bx+c} > 0 \Rightarrow bx + c < 0$	$-7 < 0$, also $\dfrac{7}{-2x+5} > 0 \Leftrightarrow -2x + 5 < 0$

Bemerkung. Weil a nicht null ist, ist die Ungleichung $\dfrac{a}{bx+c} \leq 0$ äquivalent mit der Ungleichung $\dfrac{a}{bx+c} < 0$, und die Ungleichung $\dfrac{a}{bx+c} \geq 0$ äquivalent mit der Ungleichung $\dfrac{a}{bx+c} > 0$.

Schlussfolgerung: Alle Ungleichungen der Form $\dfrac{a}{bx+c} < 0$ $(>, \leq, \geq)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$, sind auf die Form $mx + n < 0\ (>)$, wobei, m und n reelle Zahlen sind, $m \neq 0$, zurückzuführen.

2. Anwendung Die Ungleichungen der Form $|ax+b|< c$ $(\leq)$, wobei $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$

3. Aufgabe	*Anders gesagt*
Bestimmt die reellen Zahlen x, sodass $\mid 2x+7 \mid < 5$.	Löst die Ungleichung $\mid 2x+7 \mid < 5$ in der Menge der reellen Zahlen.

Fürs Portfolio

Löst folgende Ungleichungen in der Menge der reellen Zahlen:

a) $\mid 2x+7 \mid < 0$

b) $\mid 2x+7 \mid < -5$.

Lösung. $\mid 2x + 7 \mid < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x + 7 < 5$. Wir addieren zu beiden Seiten der Ungleichung -7, führen die Rechnungen aus und erhalten $-12 < 2x < -2$, teilen alle Terme durch 2 und die Ungleichung wird $-6 < x < -1$. Die Lösungsmenge ist $S = (-6, -1)$.

Verallgemeinerung der 3. Aufgabe	*Anders gesagt*
Bestimmt die reellen Zahlen x, sodass $\mid ax+b \mid < c$, wobei $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$.	Löst die Ungleichung in der Menge der reellen Zahlen $\mid ax+b \mid < c$, wobei $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Lösung. **1)** Wenn $c > 0$, $\mid ax + b \mid < c \Leftrightarrow -c < ax + b < c$. Wir addieren zu beiden Seiten $-b$, rechnen aus und erhalten $-c - b < ax < c - b$. Wir teilen beide Seiten durch a, erhalten $\frac{-c-b}{a} < x < \frac{c-b}{a}$. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist $S = \left(\frac{-c-b}{a}, \frac{c-b}{a}\right)$.

2) Wenn $c \leq 0$, dann hat die Ungleichung $\mid ax + b \mid < c$ keine Lösung, weil der absolute Betrag einer reellen Zahl nicht negativ ist.

4. Aufgabe Löst die Ungleichung in der Menge der reellen Zahlen $\mid ax + b \mid \leq c$, wobei $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Lösung. **1)** Wenn $c > 0$, $\mid ax + b \mid \leq c \Leftrightarrow -c \leq ax + b \leq c$. Wir addieren zu beiden Seiten $-b$, rechnen aus und erhalten $-c - b \leq ax \leq c - b$. Wir teilen beide Seiten durch a, erhalten $\frac{-c-b}{a} \leq x \leq \frac{c-b}{a}$. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist $S = \left[\frac{-c-b}{a}, \frac{c-b}{a}\right]$.

2) Wenn $c = 0$, dann wird die Ungleichung $\mid ax + b \mid \leq 0$, folglich ist $ax + b = 0, a \neq 0$, also $x = -\frac{b}{a}$ und $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

3) Wenn $c < 0$,dann hat die Ungleichung $\mid ax + b \mid \leq c$ keine Lösung, weil der absolute Betrag einer reellen Zahl nicht negativ ist.

Anwendungen

1. Löst die Ungleichung $\frac{3}{-2x+5} < 0$.

Lösung. $\frac{3}{-2x+5} < 0 \Leftrightarrow -2x + 5 < 0 \Leftrightarrow -2x + 5 < 0 \mid -5 \Leftrightarrow$
$-2x < -5 \mid : (-2) \Leftrightarrow x > 2{,}5$ und $S = (2{,}5; \infty)$.

---

2. Löst die Ungleichung $\frac{-4}{\sqrt{3}x - \sqrt{12}} \geq 0$.

Lösung. $\frac{-4}{\sqrt{3}x - \sqrt{12}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - \sqrt{12} < 0$.
$\sqrt{3}x - \sqrt{12} < 0 \mid + \sqrt{12} \Leftrightarrow \sqrt{3}x < \sqrt{12} \mid : \sqrt{3} \Leftrightarrow x < 2$
und $S = (-\infty, 2)$.

3. Die Seite eines Quadrates hat die Länge x cm, wobei x eine natürliche Zahl ist. Die Dimensionen eines Rechtecks sind $5x - 14$ bzw. 8 cm.

Wir bezeichnen $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ den Umfang des Quadrates bzw. den Umfang des Rechtecks. Das Verhältnis zwischen $5 \cdot \frac{\mathcal{P}_1}{2}$ und $\mathcal{P}_2$ ist mindestens 1.

Bestimmt die kleinste natürliche Zahl x, die die Länge der Seite des Quadrates, in Zentimeter ausgedrückt, haben kann.

Lösung. Der halbe Umfang des Quadrates, in Zentimeter ausgedrückt, ist $2x$. Der Umfang des Rechtecks, in Zentimeter ausgedrückt, ist $2(5x - 14 + 8)$, also $10x - 12$. „Das Verhältnis zwischen $5 \cdot \frac{\mathcal{P}_1}{2}$ und $\mathcal{P}_2$ ist mindestens 1“, wir erhalten die Ungleichung $\frac{5x}{5x-6} \geq 1$.

Wir lösen die Ungleichung in der Menge der reellen Zahlen:

$$\frac{5x}{5x-6} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(5x-6)+6}{5x-6} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{5x-6}{5x-6} + \frac{6}{5x-6} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$1 + \frac{6}{5x-6} \geq 1 \mid -1 \Leftrightarrow \frac{6}{5x-6} \geq 0$, folglich ist $5x - 6 > 0$, die Lösungsmenge ist $(1{,}2; \infty)$.

Die Dimensionen des Quadrates und die des Rechtecks sind positive Zahlen, also $x > 0$ und $5x - 14 > 0$, mit den Lösungsmengen $(0; \infty)$, bzw. $(2{,}8; \infty)$.

Die für x gesuchten Werte liegen im Durchschnitt der Intervalle $(1{,}2; \infty) \cap (0; \infty) \cap (2{,}8; \infty)$, also $x \in (2{,}8; \infty)$. Die kleinste natürliche Zahl x aus diesem Intervall ist 3. Die kleinste Seitenlänge des Quadrates ist 3 cm.

Aufgaben

1 Prüft, ob Elemente der Menge $A = \{-3, -1, 0, 2, 5\}$ Lösungen der Ungleichung $5 \cdot x - 2 < x + 6, x \in \mathbb{R}$ sind.

2 Bestimmt die Elemente der Menge $B = \{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{4}{3}, \sqrt{5}\}$, welche keine Lösungen der Ungleichung $4 \cdot x > 2 + x$ sind

3 Löst in der Menge der reellen Zahlen folgende Ungleichungen.

a) $2 \cdot x + 3 < x + 1$;

b) $-3 \cdot y + 7 > -5 \cdot y + 3$;

c) $-10 \geq 2 \cdot (z + 1) + z$;

d) $0{,}5 \cdot t + \frac{1}{2} \leq 1{,}5 \cdot t + 4$.

4 Löst die Ungleichungen:

a) $\frac{2}{3} \cdot x - \frac{1}{5} > \frac{7}{15}$;

b) $1{,}3 \cdot x - 13 < 2 \cdot x + 8$;

c) $\frac{-2 \cdot x + 1}{5} \geq \frac{-5 \cdot x + 1}{2}$;

d) $\frac{4(x+3)}{-3} \leq \frac{2 \cdot x - 2}{9}$.

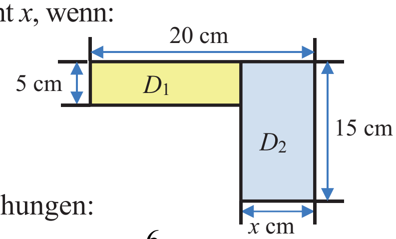
5 Die Punkte O, A, B, C werden auf der Zahlenachse dargestellt. Bestimmt die ganzen Werte der Zahl x, sodass $A(x-1)$ und $B(x+2)$ auf der Strecke OC liegen, $O(0)$ und $C(6)$.

6 In der unteren Zeichnung sind die rechteckigen Flächen D_1 und D_2 dargestellt. Wir bezeichnen $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$ die Flächeninhalte der Flächen D_1 bzw D_2. Bestimmt x, wenn:

a) $\mathcal{A}_1 < \mathcal{A}_2$

b) $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$

c) $\mathcal{A}_1 > \mathcal{A}_2$



7 Löst die Ungleichungen:

a) $\frac{4}{9x-18} < 0$; **b)** $\frac{6}{-2x-5} > 0$;

c) $\frac{3}{-5x-2} \leq 0$; **d)** $\frac{\sqrt{2}}{1{,}6x - 3{,}2} \leq 0$;

e) $\frac{15}{0{,}(3)x - 0{,}(6)} \geq 0$; **f)** $\frac{10}{-2x+1} \geq 0$.

8 **a)** Zeigt, dass
$-8x+17=-2(4x-7)+3$;

b) Löst die Ungleichung $\frac{-8x+17}{4x-7} \le -2$.

9 Löst die Ungleichungen:
a) $|-4x+3|<2$;
b) $|-3x-5| \le 3$;
c) $-\sqrt{2}\,|0{,}5x-0{,}2| \ge -\frac{\sqrt{18}}{10}$;
d) $\left|x-\frac{3x+2}{5}\right| \le 0$;
e) $\left|5-\frac{x+6}{2}\right| < 0$;
f) $\left|5-\frac{x+6}{2}\right| < 1$.

10 Wenn man $2 \cdot (z+1) - 3 \cdot (z-2)$ berechnet, erhält man eine Zahl kleiner als 10.
Bestimmt die negative ganze Zahl z.

11 Bestimmt die Werte der natürlichen Zahl n, für die $\frac{0{,}1}{5-1{,}2\cdot n}$ eine positive Zahl ist.

12 **a)** Schreibt die ganzen Zahlen mit dem absoluten Betrag höchstens 3.
b) Schreibt vier irrationale Zahlen, die den absoluten Betrag kleiner als 1,8 haben.

13 Löst die Ungleichungen:
a) $|x|<2$;
b) $|x-2| \le 3$;
c) $|1-x| \le 0$;
d) $-15 \cdot |x-1| > -105$;
e) $3-|4\cdot x-1| \ge 0$;
f) $|x| \cdot (x-4) > 0$.

14 Sei ABC ein Dreieck, $AB = 8$ cm, $BC = (3 \cdot x - 10)$ cm, $AC = (10-x)$ cm.
Bestimmt die Werte der natürlichen Zahl x, sodass das Dreieck gleichschenklig ist.

15 Drei Hefte und vier Kugelschreiber kosten 27 Lei. Bestimmt den kleinstmöglichen und den größtmögichen Preis eines Heftes, wenn dieser Preis als eine natürliche Zahl, in Lei, ausgedrückt wird.

16 Sandu löst die Ungleichung $\frac{x-2}{-6} \le 0,(6)$ in der Menge der reellen Zahlen. Er schreibt in seinem Heft:
$\frac{x-2}{-6} \le {}^{-2)}\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-6} \le \frac{-4}{-6} \Leftrightarrow x \le -4+2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \le -2$,
$S = (-\infty, -2]$
Analysiert die Lösung und bestimmt, ob Sandu die Ungleichung richtig gelöst hat.
Begründet eure Antwort.

17 **a)** Wenn $a \in \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$, zeigt, dass $15 \cdot a - 3 > 0$.

b) Wenn $\frac{2\cdot b-1}{3} \in (-\infty, 3)$, zeigt, dass
$-3 \cdot b + 16 > 1$.

18 Löst die Ungleichungen:
a) $\frac{x+1}{3}-\frac{1}{2} \ge \frac{x}{6}$;
b) $x\sqrt{2}-1 < x\sqrt{8}+|-1|$;
c) $\frac{2\cdot x}{-3}+\frac{1}{-4} < -\frac{x}{-6}+\frac{5}{-12}$;
d) $3 \cdot (x-\frac{1}{3}) - 2 \cdot (x+\frac{1}{2}) \le 4 \cdot (x-\frac{1}{4})$.

19 **a)** Bestimmt die Mengen
$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2+1}{4\cdot x-12} > 0\right\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \cdot x + 8 \ge 4 \cdot x + 5 \ge 2 \cdot x - 1\}$ und
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le \frac{3\cdot x+1}{4} \le 4\}$.
b) Zeigt, dass $C \setminus A = B$.

20 Bestimmt, zu welchem Intervall die Zahlen der Form $1-a\sqrt{6}$ gehören, wenn $a \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

21 Bestimmt $x \in \mathbb{R}$, wenn $3-2x \in (-1, 1]$.

22 $I_1 = \left(-\infty, \frac{1+a}{2}\right]$ und $I_2 = [a-1, +\infty)$ sind Intervalle.
a) Bestimmt a, sodass $I_1 \cap I_2 \ne \varnothing$.
b) Bestimmt, für welche Werte von a der Durchschnitt der Intervalle $(I_1 \cap I_2)$ nur natürliche Zahlen enthält.

SELBSBEWERTUNGSTEST *Von Amts wegen: 10 Punkte*

1. Teil

Wählt den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht, aus. Nur eine Antwort ist richtig.

5P **1.** Die Menge der Werte der natürlichen Zahl n, für welche der Ausdruck $\sqrt{1,5-0,75\cdot n}$ einen Sinn hat, ist:

A. $\{0\}$; B. $\{0, 1\}$; C. $\{1, 2\}$; D. $\{0, 1, 2\}$.

5P **2.** Die kleinste Zahl der Menge $\{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 3\}$ ist:

A. -2; B. -1; C. 0; D. 1.

5P **3.** Die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid 3^{-1} < x < 3^{0}\}$, als Intervall geschrieben, ist:

A. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$; B. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$; C. $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$; D. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

5P **4.** Die Summe der ganzen Zahlen des Intervalls $\left(-\frac{7}{3}, \frac{3}{7}\right)$ ist:

A. -3; B. -2; C. -1; D. 0.

5P **5.** Wenn $a = b + 2$ und $b \in [-3,2]$, dann gehört a zu dem Intervall:

A. $[-1, 0]$; B. $[1, 0]$; C. $[1, 4]$; D. $[-1, 4]$.

5P **6.** Die größte reelle Zahl x, welche die Ungleichung $\frac{x}{\sqrt{3}} - \sqrt{12} \geq x \cdot \sqrt{3}$ erfüllt, ist:

A. -4; B. -3; C. -2; D. 0.

5P **7.** Die Lösungsmenge der Ungleichung $44 \cdot x - 484 \leq 0$ enthält n natürliche Zahlen. Dann ist n:

A. 10; B. 11; C. 12; D. 13.

5P **8.** Die Lösungsmenge der Ungleichung $2 \cdot x + 1 \geq -3 \cdot x - 9$ ist:

A. $[-2, +\infty)$; B. $(-\infty, -2]$; C. $[2, +\infty)$; D. $\varnothing$.

2. Teil. *Schreibt die vollständige Lösung.*

10P **1.** Seien $\mathcal{C}_1(O_1, r)$ und $\mathcal{C}_2(O_2, 3\text{ cm})$ Kreise, sodass $O_1O_2 = 10$ cm. Bestimmt die Werte der natürlichen Zahl r, sodass sich die Kreise $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ schneiden.

10P **2.** Sei $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 5\}$ eine Menge und $I = (a, b)$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, ein Intervall. Bestimmt die Zahlen a und b, wenn die Summe der Elemente der Menge $M \cap I$ gleich 5 ist.

3. Teil. *Schreibt die vollständige Lösung.*

1. Gegeben sind $A = \left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ und B, die Menge der reellen Zahlen mit dem ganzen Teil -3.

5P **a)** Bestimmt die Menge B.

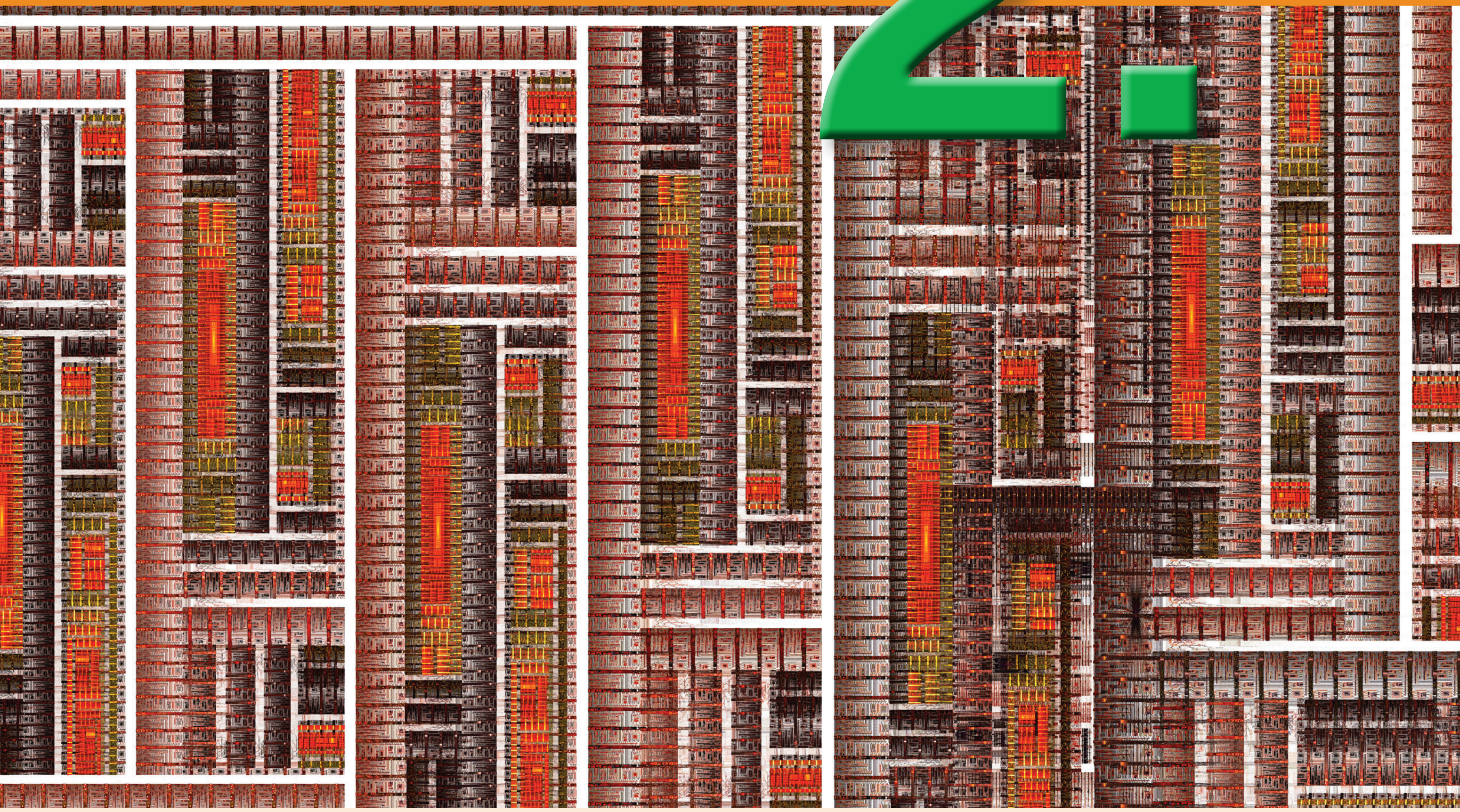
10P **b)** Berechnet $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

10P **2. a)** Löst die Ungleichungen: (1) $4 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) < x - 0,25$ (2) $2 \cdot x - 2^{-1} > x - 3^{-1}$

und bezeichnet die Lösungsmengen dieser Ungleichungen S_1 bzw. S_2.

5P **b)** Bestimmt die natürliche Zahl n, sodass $\frac{1}{n} \in S_1 \cap S_2$.

2. KAPITEL



Algebraische Rechnen in $\mathbb{R}$

1 Operationen mit reellen Zahlen

2 Formeln zum schnellen Rechnen

3 Faktorzerlegung mithilfe der Formeln

4 Algebraische Brüche. Operationen mit algebraischen Brüchen

5 Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$

Spezifische Kompetenzen

1.2 | 2.2 | 3.2 | 4.2 | 5.2 | 6.2

1 Operationen mit reellen Zahlen

L1. Operationen mit reellen Zahlen

Aus der Geschichte Das Wort *Algebra* stammt aus der arabischen Sprache (*al-jabr*). Schon im Altertum entwickelten Griechen und Inder verschiedene Rechenmethoden. Die Methoden der klassischen Algebra, der Wissenschaft vom Lösen von Gleichungen, verdankt man dem Mathematiker *Al-Horezmi* (Muhammad ibn Musa Khwārizmī) aus Bagdad, der in der Zeitspanne zwischen 780 und 850 sein *Buch der Addition und Subtraktion mithilfe indischer Methoden* schrieb.

In der Menge der reellen Zahlen gibt es folgende Operationen: *die Addition*, *die Subtraktion*, *die Multiplikation, die Division aber auch die Potenzen und das Wurzelziehen.*

Anwendungen

1 Führt folgende Rechnungen aus. Nennt die jeweils verwendete Eigenschaft.

FU **a)** $\left(-\sqrt{7}+5\right)+\sqrt{7}$. **b)** $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 5\right)\cdot\sqrt{3}$.

a) *Lösung*	*Begründung*
$\left(-\sqrt{7}+5\right)+\sqrt{7}=$	Start
$=\left[5+\left(-\sqrt{7}\right)\right]+\sqrt{7}=$	Wir verwenden die Kommutativität der Addition der reellen Zahlen.
$=5+\left[\left(-\sqrt{7}\right)+\sqrt{7}\right]=$	Wir verwenden die Assoziativität der Addition der reellen Zahlen.
$=5+0=$	Die Gegenzahl zu $-\sqrt{7}$ ist $\sqrt{7}$ und $\left(-\sqrt{7}\right)+\sqrt{7}=0$.
$=5$	0 ist das neutrale Element der Addition der reellen Zahlen.
$\left(-\sqrt{7}+5\right)+\sqrt{7}=5$	Ende

b) *Lösung*	*Begründung*
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 5\right)\cdot\sqrt{3}=$	Start
$=\left(5\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{3}=$	Wir verwenden die Kommutativität der Multiplikation der reellen Zahlen.
$=5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\right)=$	Wir verwenden die Assoziativität der Multiplikation der reellen Zahlen.
$=5\cdot 1=$	Der Kehrwert von $\sqrt{3}$ ist $\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}=1$.
$=5$	1 ist das neutrale Element der Multiplikation der reellen Zahlen.
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 5\right)\cdot\sqrt{3}=5$	Ende

2 $S=\frac{7}{6}+\left(-\frac{2}{3}\right)+\sqrt{14}+\left(-\sqrt{27}\right)$ ist eine Summe von reellen Zahlen.

a) Schreibt den unteren Näherungswert mit einer Genauigkeit von einem Zehntel, einen Rechner zu verwenden::

$\frac{7}{6}+\left(-\frac{2}{3}\right)$.

b) Rundet die Zahlen $\sqrt{14}$ und $\sqrt{27}$ mithilfe eines Taschenrechners auf Zehntel ab.

c) *Schätzt*[1] den Wert der Summe S, indem ihr die Näherungswerte von Punkt a) und b) verwendet.

[1] Wenn wir mit Näherungswerten rechnen, dann erhalten wir eine Schätzung des Ergebnisses.

Lösung: **a)** $\frac{7}{6}+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{6}-{}^{2)}\frac{4}{3}=\frac{7}{6}-\frac{8}{6}=-\frac{1}{3}\approx -0{,}4$. **b)** $\sqrt{14}\approx 3{,}7$ und $\sqrt{27}\approx 5{,}1$.
Also ist $S\approx -0{,}4+3{,}7-5{,}1=-5{,}5+3{,}7=-1{,}8$. Folglich $S\approx -1{,}8$.

Fürs Portfolio

1. Beschreibt die Reihenfolge der Rechenoperationen mit reellen Zahlen und das Verwenden der Klammern.
2. Erfindet zwei Rechnungen. Löst sie. Erklärt die jeweils verwendete Eigenschaft.

Aufgaben

1 Berechnet:

a) $5\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}$;
b) $4\sqrt{2}-5\sqrt{2}+3\sqrt{2}$;
c) $-2\sqrt{5}+10\sqrt{5}-6\sqrt{5}$
d) $3\sqrt{7}-\left(2\sqrt{7}-5\sqrt{7}+\sqrt{7}\right)-4\sqrt{7}$;
e) $4+\sqrt{4}$; **f)** $9+\sqrt{9}$.

2 Ergänzt die Tabelle:

a	$2\sqrt{3}$	$7\sqrt{2}$	$4\sqrt{5}$			$-9\sqrt{6}$
b		$-4\sqrt{2}$			$3\sqrt{7}$	$4\sqrt{6}$
$a+b$			$11\sqrt{5}$			
$a-b$				$4\sqrt{11}$	$-5\sqrt{7}$	
$-b$	$-5\sqrt{3}$			$14\sqrt{11}$		

3 Ergänzt die Tabelle:

a	$3\sqrt{3}$	$5\sqrt{2}$			$6\sqrt{7}$	
b	$2\sqrt{2}$		$-4\sqrt{5}$			$-8\sqrt{3}$
$a\cdot b$		$10\sqrt{10}$		$36\sqrt{2}$		
$a:b$			$2\sqrt{2}$		2	$2\sqrt{3}$
b^{-1}				$\frac{1}{9}$		

4 Berechnet:

a) $2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$; **b)** $4\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}$;
c) $6\sqrt{11}:2\sqrt{11}$; **d)** $108\sqrt{19}:36\sqrt{19}$.

5 Berechnet:

a) $6\sqrt{12}:3\sqrt{2}$; **b)** $-10\sqrt{18}:5\sqrt{6}$;
c) $27\sqrt{9}:9\sqrt{3}$; **d)** $4\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{2}$;
e) $-2\sqrt{10}\cdot 5\sqrt{5}$; **f)** $8\sqrt{8}\cdot 4\sqrt{2}$.

6 Berechnet:

a) $\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3$; **b)** $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{10}}{\left(\sqrt{3}\right)^{8}}$;
c) $\left[\left(\sqrt{5}\right)^2\right]^3$; **d)** $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)^3$;
e) $\left(\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}\right)^2$; **f)** $\sqrt{27^2}$.

7 Berechnet:

a) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; **b)** $\left(-3\sqrt{2}\right)^2$;
c) $\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2$; **d)** $\left(-2\sqrt{5}\right)^3$.

8 Ergänzt die Tabelle:

a	$\sqrt{2}$				
$-a$		$-\sqrt{3}$			
a^{-1}			$\sqrt{5}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
a^2					
a^3				$16\sqrt{2}$	

9 Berechnet $a+b-c$ für:

a) $a=2\sqrt{3}-5$, $b=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, $c=-5+3\sqrt{2}$.
b) $a=2-\sqrt{5}$, $b=-4\sqrt{7}+2\sqrt{5}$, $c=\sqrt{5}-4\sqrt{7}$.

10 Berechnet: **a)** $12\sqrt{6}:2\sqrt{3}$;
b) $-20\sqrt{27}:4\sqrt{9}$; **c)** $72\sqrt{63}:\left(-4\sqrt{7}\right):\left(-\sqrt{3}\right)$.

11 Vergleicht die Zahlen:

a) $7 + 3\sqrt{2}$ und $7 + 2\sqrt{3}$;

b) $-5\sqrt{2} + 11$ und $-\sqrt{49} + 11$.

12 Rationalisiert die Nenner und kürzt, falls möglich:

a) $-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; **b)** $\frac{10}{2\sqrt{5}}$;

c) $\frac{-4\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}$; **d)** $\frac{15}{2\sqrt{15}}$.

13 Berechnet:

a) $\left(-2\sqrt{6}\right)^2$; **b)** $\left(\frac{1}{5}\cdot\sqrt{10}\right)^2$;

c) $\left(\frac{7}{\sqrt{7}}\right)^2$; **d)** $\left(\frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)^2$.

14 Rechnet auf zwei Arten:

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{6}-\left(\frac{2}{\sqrt{12}}-\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt{24}-6$;

b) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{10}+\left(\frac{5}{\sqrt{10}}-\frac{2}{5}\right)\cdot\sqrt{50}$.

15 Berechnet:

a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$;

b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$.

16 Bestimmt x aus den Gleichungen:

a) $\frac{x}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$; **b)** $\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

c) $\frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}$.

17 Berechnet:

a) $\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}\right):\sqrt{6}$;

b) $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{90}}+\frac{5}{\sqrt{98}}-\frac{4}{\sqrt{32}}\right):\left(\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}-1\right)$.

18 Wenn $a = 4\sqrt{2}-\sqrt{32}+\sqrt{128}$ und $b = 5\sqrt{3}+\sqrt{27}-6\sqrt{12}$, berechnet:

a) $a - b$; **b)** $a \cdot b$; **c)** $a : b$; **d)** $a^2 + b^2$.

19 Zeigt, dass folgende Zahlen rational sind:

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}$; **b)** $\frac{2}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}$;

c) $\frac{14}{\sqrt{7}}-\sqrt{28}$.

20 Wenn $a = 0{,}1(6)+\sqrt{0{,}36}+1\frac{1}{3}\cdot\sqrt{0{,}09}$, berechnet $\sqrt{\frac{6}{7}\cdot a}$.

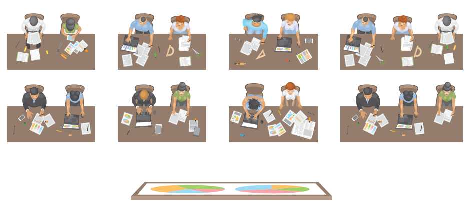
L2. Rechnen mit reellen Zahlen, die durch Buchstaben vertreten werden

Wir lösen und stellen fest

1 FU

a) In einer Klasse sind drei Reihen mit je zwei Bänken und je zwei Schülern in jeder Bank, und eine Reihe mit zwei Bänken und je drei Schülern in jeder Bank. Bestimmt die Anzahl der Schüler der Klasse.

b) Bestimmt die Schüleranzahl, wenn in der Klasse x Reihen mit y Bänken mit je 2 Schülern, und eine Reihe mit z Bänken mit je 3 Schülern sind.



Lösung. **a)** $(3 \cdot 2) \cdot 2 + (1 \cdot 2) \cdot 3 = 18$

In der Klasse sind 18 Schüler.

b) $(x \cdot y) \cdot 2 + (1 \cdot z) \cdot 3 = 2xy + 3z$

In der Klasse sind $2xy + 3z$ Schüler.

2 FU

Ein Rechteck hat die Länge $a = 3$ Meter und die Breite $b = 6$ Meter. Ein anderes Rechteck hat den gleichen Flächeninhalt und die Breite um $c = 2$ Meter kürzer als die Länge des ersten Rechtecks. Berechnet die Länge des zweiten Rechtecks.

Lösung. Die zwei Rechtecke haben den gleichen Flächeninhalt ab. Da die Breite des zweiten Rechtecks um c kürzer als die Länge des ersten Rechtecks ist, hat das zweite Rechteck die Länge $\dfrac{ab}{b-c}$.

Wenn $a = 3$, $b = 6$ und $c = 2$, ist die Länge $\dfrac{3 \cdot 6}{6-2} = 4{,}5$ (m).

> $2xy + 3z$ und $\dfrac{ab}{b-c}$ sind *algebraische Ausdrücke*.

Wir verstehen anhand von Beispielen

A. Algebraische Ausdrücke

> Ein *algebraischer Ausdruck* ist ein Term, der Operationen mit bekannten reellen Zahlen und unbekannten reellen Zahlen, die mithilfe von Buchstaben ausgedrückt werden, enthält. Die Unbekannten heißen auch *Variablen*.

Beispiele von Variablen:
$a, b, \ldots, x, y, \ldots$ (unbekannte reelle Zahlen)

> Die Elemente der Menge $\mathbb{R}$ und die *Variablen* sind *algebraische Ausdrücke*. *Die Summe, die Differenz, das Produkt und das Verhältnis* zweier algebraischer Ausdrücke ist ein *algebraischer Ausdruck*. Die Division durch 0 wird ausgeschlossen.
> Die Potenz eines algebraischen Ausdrucks ist ein algebraischer Ausdruck.
> Die Quadratwurzel eines algebraischen Ausdruck ist auch ein algebraischer Ausdruck, wenn sie einen Sinn hat.
> Der absolute Betrag eines algebraischen Ausdrucks ist auch ein algebraischer Ausdruck.

Beispiele von algebraischen Ausdrücken:

6; $\dfrac{2}{3}$; a; $5 \cdot x - 4$; $-6(x+y)$;
$ab + 3x - 2$; $\sqrt{x-2y}$;
$\dfrac{x^2 y - 1}{a}$; $\left|\dfrac{1}{3} \cdot x - 2y\right|$.

Ein algebraischer Ausdruck kann eine, zwei oder mehrere *Variablen* enthalten. Ein algebraischer Ausdruck mit einer Variablen x wird meistens E oder $E(x)$, lies „E von x“, bezeichnet. Einen algebraischen Ausdruck mit zwei Unbekannten x und y bezeichnet man E oder $E(x, y)$ und liest „E von x und y“. Statt E kann ein anderer Buchstabe verwendet werden, eventuell auch Indizes (E_1) . Ebenso bei mehreren Variablen.
Bemerkung. In der Praxis werden wir die algebraischen Ausdrücke einfach *Ausdrücke* nennen.

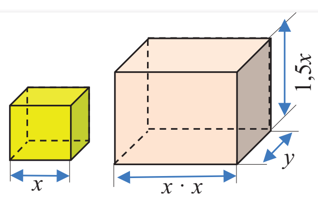
1. Beispiel: Wir können den algebraischen Ausdruck $-2x + 3$ mit E, mit $E(x)$ oder mit $E_1(x)$ bezeichnen.
Wir schreiben:
$E = -2x + 3$ oder $E(x) = -2x + 3$ oder $E_1(x) = -2x + 3$.

2. Beispiel: Wir können den algebraischen Ausdruck $u^2 - 2uv + 3$, F, $F_2(u,v)$, $F(u,v)$, $A(u,v)$ usw. bezeichnen.
Wir schreiben:
$F = u^2 - 2uv + 3$ oder $F_2(u,v) = u^2 - 2uv + 3$ usw.

B. Die Multiplikation der Terme und die Potenz eines Terms

Algebraisches Produkt. Reduziertes algebraisches Produkt

1. Aufgabe. Die Kantenlänge eines Würfels beträgt x cm. Die Länge eines Quaders ist x-mal die Kante des Würfels, seine Höhe 1,5-mal die Kante des Würfels, und seine Breite y cm. Berechnet das Volumen des Quaders.



Lösung. Das Volumen eines Quaders ist das Produkt der Länge, der Breite und der Höhe, in derselben Maßeinheit ausgedrückt. Die Dimensionen des Quaders in Zentimeter sind:

Länge $= x \cdot x$, Breite $= y$, Höhe $= 1{,}5 \cdot x$.

Das Volumen des Quaders in cm³ ist $\mathcal{V} = (x \cdot x) \cdot y \cdot (1{,}5 \cdot x)$.

Das Assoziativgesetz der Multiplikation der reellen Zahlen erlaubt uns, die Klammern wegzulassen, $\mathcal{V} = x \cdot x \cdot y \cdot 1{,}5 \cdot x$. Man verwendet das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz der Multiplikation und erhält $\mathcal{V} = 1{,}5 \cdot (x \cdot x \cdot x) \cdot y$, also $\mathcal{V} = 1{,}5x^3y$.

> Ein Produkt, dessen Faktoren reelle Zahlen oder Buchstaben (die reelle Zahlen darstellen) sind, ist ein *algebraisches Produkt.*

Beispiele: $x \cdot x \cdot y \cdot 1{,}5 \cdot x$

$$(-2) \cdot x \cdot y \cdot z \cdot x \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x \cdot z$$

Für die natürliche von null verschiedene Zahl n ist die n-te Potenz einer reellen Zahl x das algebraische Produkt $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ mit n identischen Faktoren und wird mit x^n bezeichnet.
Für die von null verschiedenen Werte von x findet die Beziehung $x^{-n} = (x^{-1})^n$ statt.

❗ *Achtung!* 0^0 hat keinen Sinn.

Ein algebraisches Produkt kann mithilfe der Rechenregeln für reelle Zahlen *reduziert* werden.
Ein algebraisches Produkt *ist ein reduziertes algebraisches Produkt,* wenn ein einziger Faktor des Produktes (*Koeffizient* genannt), eine reelle Zahl ist und die anderen Faktoren die *Variablen* (*Buchstabenteil*) sind, die ein einziges Mal vorkommen und natürliche Zahlen als Exponenten haben. Ein algebraisches Produkt *auszuführen* oder *zu berechnen*, bedeutet, es als *reduziertes Produkt* zu schreiben.

> Ein reduziertes algebraisches Produkt hat einen *Koeffizienten* und *Variablen* (*Buchstabenteil*).

Beispiele: 1). Das algebraische Produkt $x \cdot x \cdot y \cdot 1{,}5 \cdot x$ ist nicht reduziert.
Man rechnet und erhält das reduzierte algebraische Produkt $1{,}5x^3y$. Folglich ist: $x \cdot x \cdot y \cdot 1{,}5 \cdot x = 1{,}5x^3y$.

2) $(-2) \cdot x \cdot 3 \cdot y \cdot z \cdot x \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x \cdot z =$

$= 3 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3x^3y^2z^2$.

das algebraische Produkt

der Koeffizient ← $\boxed{-4}\ \boxed{x^5y^4}$ → die Variablen

C. Reduzieren gleichnamiger Terme

Algebraische Summe. Gleichnamige Terme

Werden mehrere algebraische Produkte addiert und subtrahiert, erhält man eine *algebraische Summe*. Die algebraischen Produkte sind die *Terme der algebraischen Summe* und ihre Koeffizienten sind die *Koeffizienten der Terme der Summe*.

$$\overbrace{-\frac{1}{2}x^5y^3 \quad +2xy^3 \quad -7x \quad +9}^{\text{die algebraische Summe}}$$

die Terme der Summe

die Koefizienten

$-\frac{1}{2}$, 2, -7, 9

> Zwei oder mehrere reduzierte Terme sind gleichnamig, wenn sie *denselben Buchstabenteil* haben.

$2xy^3 - 7xy + 3{,}5x + 2{,}3xy - 5xy^3 + 8 - \sqrt{3}\,xy$

Gleichnamige Terme: $2xy^3$ und $-5xy^3$

Gleichnamige Terme: $-7xy$, $2{,}3xy$ und $-\sqrt{3}\,xy$

Das Reduzieren der gleichnamigen Terme

Mithilfe der Methode des gemeinsamen Faktors kann man eine algebraische Summe mit gleichnamigen Termen in ein algebraisches Produkt umwandeln.

Beispiel:

$S_1 = 2\,xyz^2 - 3xyz^2 + 0{,}2\,xyz^2$	1	Algebraische Summe mit gleichnamigen Termen
$S_1 = (2 - 3 + 0{,}2)\,xyz^2$	2	Die Methode des gemeinsamen Faktors
$S_1 = -\,0{,}8xyz^2$	3	Algebraisches Produkt

Die Operation, bei der eine algebraische Summe mit gleichnamigen Termen in ein algebraisches Produkt umgewandelt wird, heißt *Reduzieren der gleichnamigen Terme.*

Ausführen des Produktes von zwei algebraischen Summen

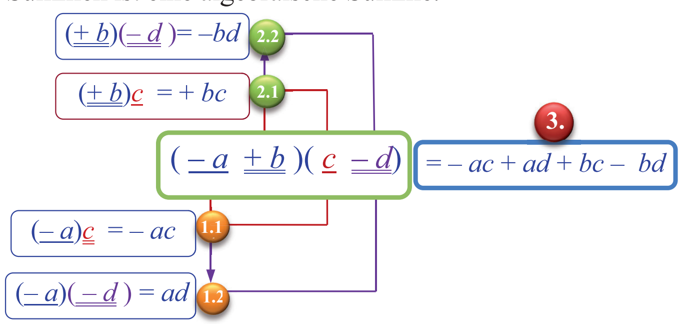
Berechnet: $(-a+b)(c-d)$		*Rechenetappen*
$(-a+b)\underbrace{(c-d)}_{x}$	1	Man bezeichnet $(c-d)$ mit x
$(-a+b)\,x$	2	Man verwendet das Distributivgesetz der Multiplikation in Bezug auf die Addition
$-ax+bx$	3	Man ersetzt x durch $(c-d)$
$-a\,(c-d)+b(c-d)$	4	Man verwendet das Distributivgesetz der Multiplikation in Bezug auf die Addition / Subtraktion
$-(ac-ad)+bc-bd$ $(-a+b)(c-d)=-ac+ad+bc-bd$	5	Ende

Bemerkungen: **1.** Das Produkt von zwei algebraischen Summen ist eine algebraische Summe.

2. Das Produkt zweier algebraischer Summen auszuführen, bedeutet, die Klammern aufzulösen und das Endergebnis als reduzierte algebraische Summe zu schreiben.

3. Die reduzierte algebraische Summe ist eine algebraische Summe, die keine gleichnamigen Terme hat.

4. In dem Schema nebenan ist die Multiplikation zweier algebraischer Summen S_1 und S_2, wobei $S_1=-a+b$ und $S_2=c-d$, grafisch dargestellt.



Regel		*Beispiel:* Berechnet das Produkt $(-2x-3)(4-3x)$
Man multipliziert jeden Term der ersten Summe mit jedem Term der zweiten Summe.	$\Rightarrow$	$(-2x)\cdot 4$ | $(-2x)\cdot(-3x)$ | $(-3)\cdot 4$ | $(-3)(-3x)$
Man addiert die erhaltenen algebraischen Produkte.	$\Rightarrow$	$(-2x)\cdot 4+(-2x)\cdot(-3x)+(-3)\cdot 4+(-3)(-3x)$
Man rechnet aus.	$\Rightarrow$	$-\underline{8x}+6x^2-12+\underline{9x}$
Man reduziert die gleichnamigen Terme.	$\Rightarrow$	$x+6x^2-12$
Man schreibt das Ergebnis.		$(-2x-3)(4-3x)=6x^2+x-12$

Kommentar.

Das Ergebnis einer Rechnung mit reellen Zahlen, bei der Buchstaben vorkommen, ist ein *algebraischer Ausdruck*. Die algebraischen Summen und Produkte sind algebraische Ausdrücke

Anwendungen

Wir rechnen:	Wir identifizieren die Eigenschaften/die verwendeten Regeln.
1. $(-3x^2y)^3 = (-3)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = -27x^6y^3$	• Operationen mit Potenzen • Vorzeichenregel
2. $\frac{-27x^6y^3}{3x^2y^4z} = -\frac{27}{3}\cdot\frac{x^6}{x^2}\cdot\frac{y^3}{y^4}\cdot\frac{1}{z} = = -9\,x^4\,y^{-1}z^{-1}$	• Multiplikation der Brüche • Operationen mit Potenzen
3. $(-x^2y + 5xy + 7x) - (3xy + x^2y - 3x - 2z) =$ $= -x^2y + 5xy + 7x - 3xy - x^2y + 3x + 2z =$ $= (-1-1)\,x^2y + (5-3)\,xy + (7+3)\,x + 2z =$ $= -2x^2y + 2xy + 10x + 2z$	• Assoziativgesetz der Addition; Minus vor einer Klammer ist äquivalent mit der Multiplikation der Zahl –1 mit der Summe aus der Klammer, man verwendet das Distributivgesetz der Multiplikation in Bezug auf die Addition. • Reduzieren gleichnamiger Terme.
4. $x(2x - y) = x \cdot 2x + x \cdot (-y) = 2x^2 - xy$	• Distributivgesetz der Multiplikation in Bezug auf die Addition: $a(b + c) = ab + ac$
5. $-2x(x - 3y + 1) = -2x \cdot x - 2x \cdot (-3y) - 2x \cdot 1 =$ $= -2x^2 + 6xy - 2x$	• Distributivgesetz der Multiplikation in Bezug auf die Addition:: $a(b+c+d) = ab + ac + ad$

MINITEST Wählt die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort ist richtig.

1. Das Ergebnis der Rechnung $4x^2 + [x \cdot (x + 6) - (5x^2 + 2x)]$ ist:			
A. $2x$	B. $-4x$	C. $4x$	D. $6x$
2. Wenn $A = 3x - y$ und $B = 2x + 5y$, dann ist das Ergebnis der Rechnung $2x \cdot A + y \cdot B$:			
A. $x^2 + 5y^2$	B. $6x^2 + y^2$	C. $x^2 + y^2$	D. $6x^2 + 5y^2$
3. Der Umfang eines Rechtecks ist $4a + 2b$, $a > 0$, $b > 0$, die Länge einer Seite ist $2a$ cm. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist:			
A. $a \cdot b$ cm²	B. $-2 \cdot a \cdot b$ cm²	C. $2 \cdot a \cdot b$ cm²	D. $a^2 \cdot b^2$ cm²

Aufgaben

1 Berechnet das algebraische Produkt:

a) $3a \cdot 6 \cdot (-2ab)$ **b)** $-3 \cdot 2x \cdot (-x)$

c) $\frac{1}{3}a \cdot \frac{2}{5}b \cdot \left(-\frac{21}{4}a\right)$ **d)** $-\frac{1}{2}x^2a \cdot (-6x^2a^2)$

2 Gegeben werden die Summen:

$S_1 = 3xyz^2 - \frac{1}{2}xyz^2 + 0{,}2xyz^2$ und

$S_2 = -3ax + \frac{1}{2}ax - \frac{5}{2}ax + 7ax.$

Schreibt jede Summe mithilfe der Methode des gemeinsamen Faktors als ein algebraisches Produkt.

3 Schreibt die Summe in eure Hefte ab

$S_1 = 3x^2 - 7x - x^3 - 5x^2 + 9x + 15.$

a) Unterstreicht die gleichnamigen Terme der Summe mit einer Linie bzw. mit zwei Linien.

b) Dasselbe wie bei **a)** für die Summe

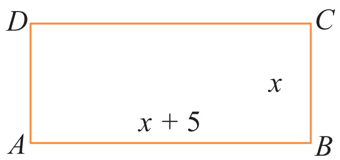
$S_2 = -2ab^2 + 3cd - 7ab^2 + \sqrt{3}\,cd - ab^2.$

4 Reduziert die gleichnamigen Terme:

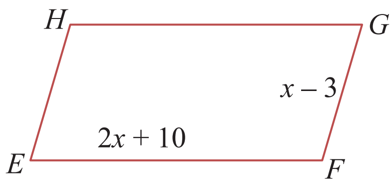
a) $3x - x + 5x - 7x$;
b) $x - 2 - 3x + 5$;
c) $0{,}2 - 0{,}3x + 0{,}5 - 0{,}7x$.

5 Berechnet mithilfe von x den Umfang der folgenden geometrischen Figuren:

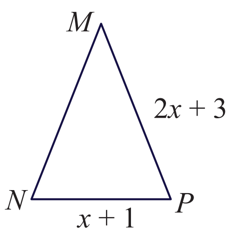
ABCD ist ein Rechteck.



EFGH ist ein Parallelogramm und $x > 3$.



ΔMNP ist ein gleichschenkliges Dreieck und $x > 0$.



6 Reduziert die gleichnamigen Terme:

a) $5x + (-4x + 2y) - (5x - 7y) - (9y + 3x)$;
b) $y^2 - 2y + 3 - (3y - 1 + y^2) + (1 + 5y)$;
c) $-\sqrt{2}\,x^2y + 2xy^2 + 3\sqrt{2}\,x^2y - 2xy^2$;
d) $(0{,}1x + 0{,}7x^2 - 0{,}3) + (0{,}3x^2 + 0{,}9x + 1{,}3)$;
e) $(3\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{3}\,y + \sqrt{6}\,) - (\sqrt{18}\,x - \sqrt{12}\,y)$.

7 Führt die Multiplikationen aus:

a) $2ab^2 \cdot (-3a^2b)$; **b)** $-5x^2 \cdot \frac{1}{2}xy^2 \cdot (-x)$;
c) $\sqrt{2a} \cdot \frac{1}{2}a^2b \cdot \sqrt{8b}$; **d)** $x(x - 2)$;
e) $x(-x + y - 1)$; **f)** $-4xy(3x - 2y)$.

8 Seien $A = -x + y^2 - 2$ und $B = 3 + y^2 - 2x$.

a) Schreibt die Summe $A + B$ als eine reduzierte algebraische Summe.
b) Vereinfacht den Ausdruck $3A - B$.
c) Berechnet die Zahlen A und B, wenn $x = -1$ und $y = 2$.

9 Führt die Divisionen aus:

a) $(2x^2 + 3x) : x$;
b) $(x^2y - xy^2 + x^2y^2) : xy$;
c) $(2x^3y - x^2y^2 + 4x^2y) : 2xy$.

10 x ist eine natürliche Zahl und $A = 3x - 1$, $B = -x$.

a) Zeigt, dass $A + B$ eine natürliche ungerade Zahl ist, für jedes natürliche von null verschiedene x.
b) Schreibt den algebraischen Ausdruck $-2A + 5B$ in reduzierter Form.
c) Zeigt, dass $A + 3B$ eine ganze Zahl ist.

11 Führt die Multiplikationen aus und reduziert die gleichnamigen Terme.

a) $(x + 1)(2x - 1)$;
b) $(x - 2)(-2x + 3)$;
c) $(0{,}5x - 1)(10x + 2)$;
d) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$;
e) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$.

12 a, b, c sind reelle Zahlen, $c \neq 0$.
Prüft die Gleichungen $(a + b) : c = a : c + b : c$ und $(a - b) : c = a : c - b : c$, für:

1) $a = 25$, $b = 30$, $c = -5$.
2) $a = 6x$, $b = 9x$, $c = -3x$.

13 Berechnet die Potenzen:

a) $(-a^2b)^3$;
b) $\left(\frac{1}{3}xy^2z^3\right)^2$;
c) $\left(\sqrt{2}ab^2c\right)^3$.

14 Seien $A = -3x^2y$, $B = \frac{1}{3}xy^2$, $C = xy$.
Führt die Rechnungen aus und schreibt das Ergebnis in reduzierter Form:

a) $A \cdot B \cdot C$ **b)** $A \cdot B : C$ **c)** $A^2 \cdot B : C^1$

15 Gegeben werden $A = -\sqrt{2}xyz^2$, $B = \sqrt{6}x^2yz$ und $C = \sqrt{3}\,xy^2z$. Berechnet:

a) $A \cdot B \cdot C$;
b) $A \cdot C : B$;
c) $(A \cdot B^2) : (\sqrt{3} \cdot C)$.

16 Vereinfacht:

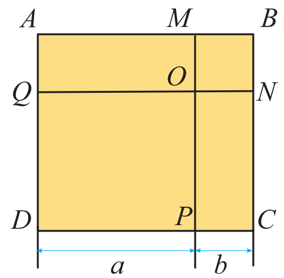
a) $x(-2x + 1) + 3x(x - 2)$;
b) $(2x + 3)(x - 1) + (3x - 2)(-x + 5)$;
c) $(-5x + 2)(3x - 1) + (15x + 7)(x - 3)$;
d) $(x - 1)(-5x + 3) + 5x(x - 1)$;
e) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x^3 + 8$;
f) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) + 1 - 8x^3$.

2 Formeln zum schnellen Rechnen

L1. Das Quadrat eines Binoms. Das Produkt von Summe und Differenz zweier Terme

1. Aufgabe In der Abbildung nebenan ist $ABCD$ eine quadratische Fläche,
SA bestehend aus den quadratischen Flächen $MONB$ und $OQDP$ und den rechteckigen Flächen $ONCP$ und $AMOQ$ mit den Längen a und b, die in derselben Maßeinheit ausgedrückt sind.

a) Berechnet den Flächeninhalt der quadratischen Flächen $OQDP$ und $MONB$.
b) Berechnet den Flächeninhalt der rechteckigen Flächen $ONCP$ und $AMOQ$.
c) Berechnet den Flächeninhalt der quadratischen Fläche $ABCD$ auf zwei Arten und leitet ab, dass $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ für alle reellen positiven Zahlen a und b.

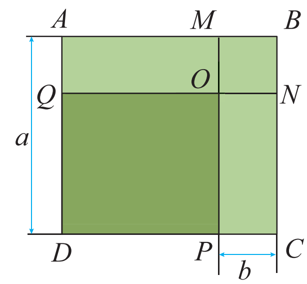


Lösung. **a)** $\mathcal{A}_{(OQDP)} = a^2$; $\mathcal{A}_{(MONB)} = b^2$.
b) $\mathcal{A}_{(ONCP)} = a \cdot b$; $\mathcal{A}_{(AMOQ)} = a \cdot b$.
c) Wir stellen fest, dass $\mathcal{A}_{(ABCD)} = \mathcal{A}_{(OQDP)} + \mathcal{A}_{(MONB)} + \mathcal{A}_{(ONCP)} + \mathcal{A}_{(AMOQ)}$. Aber, $\mathcal{A}_{(ABCD)} = (a+b)^2$. Es folgt, dass $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ für alle reellen positiven Zahl a und b.

Schlussfolgerung. Das Quadrat der Summe zweier positiver Terme ist gleich mit der Summe der Quadrate der Terme und dem *Doppelten des Produktes der Terme*.

2. Aufgabe In der Abbildung nebenan sind $ABCD$, $MONB$ und $OQDP$
SA quadratische Flächen und $ABNQ$ und $MBCP$ rechteckige Flächen. Die Längen a und b sind in derselben Maßeinheit ausgedrückt.

a) Berechnet die Flächeninhalte der Flächen $OQDP$, $MBCP$, $ABNQ$ und $MONB$.
b) Berechnet den Flächeninhalt des Quadrates $OQDP$ auf zwei Arten und leitet ab, dass $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, für alle positiven Zahlen a und b.

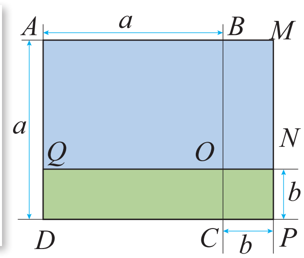


Lösung. **a)** $\mathcal{A}_{(OQDP)} = (a-b)^2$; $\mathcal{A}_{(MBCP)} = ab$; $\mathcal{A}_{(ABNQ)} = ab$; $\mathcal{A}_{(MONB)} = b^2$.
b) Wir beobachten, dass $\mathcal{A}_{(OQDP)} = \mathcal{A}_{(ABCD)} - \mathcal{A}_{(MBCP)} - \mathcal{A}_{(ABNQ)} + \mathcal{A}_{(MONB)}$.
Aus $\mathcal{A}_{(ABCD)} = a^2$ und den vorherigen Ergebnissen folgt, dass $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ für alle reellen positiven Zahlen a und b.

Schlussfolgerung. Das Quadrat der Differenz zweier positiver Terme ist gleich mit der *Differenz* gebildet aus der *Summe der Quadrate der Terme* und *dem doppelten Produkt der Terme*.

3. Aufgabe In der Abbildung nebenan sind $ABCD$ und $ONPC$ quadratische Flächen
SA und $ONMB$ und $OCDQ$ rechteckige Flächen. Die Längen a und b sind in derselben Maßeinheit ausgedrückt.

a) Berechnet die Flächeninhalte der Flächen $AMNQ$, $ABCD$, $BMPC$, $OCDQ$ und $ONPC$.
b) Drückt den Flächeninhalt der Fläche $AMNQ$ auf zwei Arten aus und leitet ab, dass $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ für alle reellen positiven Zahlen a und b, wobei $a > b$.



Lösung. **a)** $\mathcal{A}_{(AMNQ)} = (a+b)(a-b)$; $\mathcal{A}_{(ABCD)} = a^2$; $\mathcal{A}_{(MBCP)} = ab$; $\mathcal{A}_{(OCDQ)} = ab$; $\mathcal{A}_{(ONPC)} = b^2$.
b) Wir stellen fest, dass $\mathcal{A}_{(AMNQ)} = \mathcal{A}_{(ABCD)} + \mathcal{A}_{(BMPC)} - \mathcal{A}_{(OCDQ)} - \mathcal{A}_{(ONPC)} = a^2 + ab - ab - b^2$.
Aus $\mathcal{A}_{(AMNQ))} = (a+b)(a-b)$ und den vorherigen Ergebnissen folgt, dass $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ für alle reellen positiven Zahlen a und b, wobei $a > b$.

Schlussfolgerung. Das Produkt der Summe und der Differenz zweier positiver Terme ist gleich mit der *Differenz der Quadrate der Terme*.

Wir verstehen anhand von Beispielen

Da die Längen der Strecken positive Zahlen sind, wurden die Formeln aus den vorigen Aufgaben nur für Zahlen a und b bewiesen, die größer als null sind. Wir werden die Gültigkeit der Formeln für algebraisches Rechnen für *alle reellen Zahlen* beweisen.

4. Aufgabe Erhebt zum Quadrat, rechnet aus und beweist die Formeln für *alle reellen Zahlen a* und *b*.

SA

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Lösung:

a) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2$.

b) $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 =$
$= a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Bemerkung. Die drei Gleichungen wurden bewiesen, ohne Bedingungen für die Variablen a und b zu stellen. Diese Gleichungen heißen *Identitäten* oder *Formeln.* Die drei obigen Identitäten nennen wir *Formeln zum schnellen Rechnen*. Diese werden oft für das Berechnen der algebraischen Ausdrücke verwendet.

Schlussfolgerung. Für alle reellen Zahlen a und b gelten folgende *Formeln zum schnellen Rechnen*:

1 Das Quadrat der Summe zweier Terme:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2 Das Quadrat der Differenz zweier Terme:

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3 Das Produkt von Summe und Differenz zweier Terme:

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beispiele:

1) $(\underline{a}\ \underline{-b})^2 = \underline{a}^2 + (\underline{-b})^2 + 2 \cdot a \cdot (\underline{-b}) = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$.

2) $(\underline{-2x}\ \underline{+3})^2 = (\underline{-2x})^2 + \underline{3}^2 + 2 \cdot (\underline{-2x}) \cdot \underline{3} = 4x^2 + 9 - 12x = 4x^2 - 12x + 9$

Anwendungen

1 Rechnet folgende algebraische Ausdrücke aus: $E_1 = (-2x^2y + xy^2)^2$ und $E_2 = (2x^2 - 5x)(2x^2 + 5x)$.

$E_1 = (-2x^2y + xy^2)^2$

Lösungsetappen:	*Lösung*
Wir identifizieren die zwei Terme der algebraischen Summe.	$E_1 = (\underline{-2x^2y} + \underline{xy^2})^2$
Wir wenden die Formel für *das Quadrat eines Binoms* an.	$E_1 = (\underline{-2x^2y})^2 + (\underline{xy^2})^2 + 2(\underline{-2x^2y}) \cdot (\underline{xy^2})$
Wir rechnen aus:	$E_1 = 4x^4y^2 + x^2y^4 - 4x^3y^3$.
Ende	$(-2x^2y + xy^2)^2 = 4x^4y^2 + x^2y^4 - 4x^3y^3$

$E_2 = (2x^2 - 5x)(2x^2 + 5x)$

Lösungsetappen:	*Lösung*
Wir identifizieren zwei Terme der Summe, die auch Terme der Differenz sind.	$E_2 = (\underline{2x^2} - \underline{5x})(\underline{2x^2} + \underline{5x})$
Wir verwenden das Produkt von Summe und Differenz.	$E_2 = (\underline{2x^2})^2 - (\underline{5x})^2$
Wir rechnen aus:	$E_2 = 4x^4 - 25x^2$
Ende	$(2x^2 - 5x)(2x^2 + 5x) = 4x^4 - 25x^2$

2 Verwendet die Formeln zum schnellen Rechnen und berechnet : **a)** 61^2; **b)** 59^2; **c)** $61 \cdot 59$.

Lösung.

a) $61^2 = (60 + 1)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3600 + 120 + 1 = 3721$
b) $59^2 = (60 - 1)^2 = 60^2 - 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3600 - 120 + 1 = 3481$
c) $61 \cdot 59 = (60 + 1)(60 - 1) = 60^2 - 1^2 = 3600 - 1 = 3599$

Aufgaben

1 Gegeben sind die algebraischen Summen:
$2x + 3y$; $\sqrt{2}\cdot t - 2\sqrt{2}$; $-2xy + 4z$; $-4u - 0{,}5v$:
a) Unterstreicht mit einer Linie den ersten Term und mit zwei Linien den zweiten Term einer jeden Summe.
b) Berechnet das Quadrat einer jeden Summe und schreibt den erhaltenen Ausdruck in reduzierter Form.

2 Berechnet mithilfe des Quadrat eines Binoms:
a) $(3x + 1)^2$; **b)** $(2a + 3b)^2$;
c) $(5a - 2b)^2$; **d)** $(-4u + 3v)^2$;
e) $(-4xy - 3z)^2$; **f)** $(4xy + 3z)^2$.

3 Berechnet mithilfe der Formeln zum schnellen Rechnen:
a) 101^2; 102^2; 105^2;
b) 99^2; 199^2; 57^2;
c) $1{,}1^2$; $0{,}9^2$; 1001^2.

4 Schreibt die Tabellen in eure Hefte ab, ergänzt die *Lösungsetappen und die Lösungen*.

Berechnet den Ausdruck $(-ax + by)^2$	
Lösungsetappen	*Lösung*
...	...

Berechnet den Ausdruck $(ax - by)^2$	
Lösungsetappen	*Lösung*
...	...

5 Berechnet mithilfe der Formeln:
a) $(x^2 + 2y)^2$; **b)** $(4x - 3y)^2$;
c) $(\sqrt{2}x + \sqrt{3})^2$; **d)** $(x - \sqrt{5}y)^2$.
e) $\left(\frac{1}{2}x - y\right)^2$; **f)** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

6 Berechnet mithilfe der Formel:
a) $(3x + y)(3x - y)$; **b)** $\left(5x - \frac{1}{2}\right)\left(5x + \frac{1}{2}\right)$;
c) $\left(\sqrt{3} - x\right)\left(\sqrt{3} + x\right)$.

7 Verwendet die Formeln zum schnellen Rechnen und berechnet
a) $101\cdot 99$; **b)** $102 \cdot 98$;
c) $299 \cdot 301$; **d)** $805 \cdot 795$; **e)** $4{,}1 \cdot 3{,}9$.

8 Verwendet die Formeln zum schnellen Rechnen und berechnet:
a) $(7a + 5)^2$; $(3b - 5c)^2$; $(2u + v)(2u - v)$;
b) $\left(\frac{1}{2}a + 3\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}x - 3y\right)^2$;
$\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b\right)$;
c) $(\sqrt{5}\,a + 3)^2$; $(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)^2$;
$(\sqrt{2}\,p + \sqrt{5}\,q)(\sqrt{2}\,p - \sqrt{5}\,q)$.

9 Rechnet mithilfe der Formeln aus.
a) $(x + 2y)^2 + (x - 2y)(x + 2y)$;
b) $(3x - y)^2 - (3x + 5)(3x - 5)$;
c) $(1 - 5y)^2 + (1 + 5y)^2 - 25y^2 - 2$;
d) $(2 + x)^2 + (1 + x)^2 - (3 + x)^2$.

10 Gegeben wird der algebraische Ausdruck
$E(x) = (2x - 3)^2 + 2(2x - 3)(2x + 3) + (2x + 3)^2$.
a) Zeigt, dass der Ausdruck $E(x)$ für jede reelle Zahl x das Quadrat eines algebraischen Ausdrucks ist.
b) Zeigt, dass für $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$n = (2x - 3)^2 + 2(2x - 3)(2x + 3) + (2x + 3)^2$ eine natürliche Zahl ist.

11 Rechnet aus und reduziert die gleichnamigen Terme:
a) $3x(x + 1)^2 - (2x - 3)(2x + 3)^2 + x^2(5x + 6)$;
b) $-2x(x^2 - x + 1) - 2x(x + 1) + (x + 1)^2 +$
$+ 2x(x^2 + 1)$;
c) $11x(2x - 3) - (25x^2) : (-5x) + (2x + y)^2 -$
$- 4x(x + y) - 2x(11x - 14)$.

12 Berechnet mithilfe der Formeln
a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$;
b) $(2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9)$;
c) $(\sqrt{2}\,x + 5)(\sqrt{2}\,x - 5)(2x^2 + 25)$.

13 **a)** Sei $k \in \mathbb{R}$. Berechnet $(4 \cdot k)^2$, $(4 \cdot k + 1)^2$, $(4 \cdot k + 2)^2$, $(4 \cdot k + 3)^2$.
b) Zeigt, dass der Rest der Division eines vollständigen Quadrates durch 4, gleich 0 oder 1 ist.
c) Zeigt, dass die Zahl $a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 10$ für keinen Wert von $a \in \mathbb{N}$ ein vollständiges Quadrat ist.

L2. Anwenden der Formeln zum schnellen Rechnen beim Rationalisieren der Nenner einiger Brüche

Wir erinnern uns!

1. Wenn a eine von null verschiedene rationale Zahl ist und $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann $a \cdot \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Wenn die Zahlen a, b, c rational sind, $a > 0$, $c > 0$, dann sind die Zahlen $\left(\sqrt{a}\right)^2$ und $(b\sqrt{c}) \cdot \sqrt{c}$ rational.
3. Wenn $m \in \mathbb{Q}$ und $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann sind die Zahlen $m + \sqrt{n}$, $m - \sqrt{n}$ irrational.
4. Wenn n und p positive rationale Zahlen sind, sodass $\sqrt{n}$, $\sqrt{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann ist die Zahl $\sqrt{n} + \sqrt{p}$ irrational. Wenn, $n \neq p$, dann ist die Zahl $\sqrt{n} - \sqrt{p}$ irrational.

Bemerkung. Die Summe zweier irrationaler Zahlen kann eine rationale oder eine irrationale Zahl sein.
Das Produkt zweier irrationaler Zahlen kann eine rationale oder eine irrationale Zahl sein.

5. a) Wenn $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Q}^*$, dann rationalisieren wir den Nenner des Bruches $\frac{a}{\sqrt{b}}$ wie folgt: ${}^{\sqrt{b})}\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$

$$^{\sqrt{3})}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Wenn $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Q}^+$ und $c \in \mathbb{Q}^*$, dann rationalisieren wir den Nenner des Bruches $\frac{a}{c\sqrt{b}}$ wie folgt: ${}^{\sqrt{b})}\frac{a}{c\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{c\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{bc}$

$$^{\sqrt{2})}\frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

Wir lösen und stellen fest

Aufgabe. Seien $a = (2 + \sqrt{3})^2$, $b = \left(\sqrt{2} - 3\right)^2$, $c = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$, $d = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2$,

$e = (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})$ und $f = (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Bestimmt die Mengen $\{a, b, c, d, e, f\} \cap \mathbb{Q}$ und $\{a, b, c, d, e, f\} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Lösung: Wir wenden die Formeln zum schnellen Rechnen an und erhalten:

$a = 7 + 4\sqrt{3}$, $b = 11 - 6\sqrt{2}$, $c = 5 + 2\sqrt{6}$, $d = 5 - 2\sqrt{6}$, $e = 4 - 3 = 1$, $f = 2 - 3 = -1$.

Dann gilt: $\{a, d, c, d, e, f\} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{a, b, c, d\}$ und $\{a, d, c, d, e, f\} \cap \mathbb{Q} = \{e, f\}$.

Wir verstehen anhand von Beispielen

Wir stellen Folgendes fest:

1. Wenn $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}_+$ und $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b \in \mathbb{Q}$.
2. Wenn $a \in \mathbb{Q}_+$, $b \in \mathbb{Q}_+$ und $\sqrt{a}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a \neq b$, dann $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \in \mathbb{Q}$.

Die Formel zum schnellen Rechnen für die Differenz von Quadraten hilft beim Rationalisieren der Nenner verschiedener Brüche.

Anwendung: (Rationalisieren der Nenner)
a) Für $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}_+$, sodass $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, schreibt den Bruch $\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}$ mit rationalem Nenner.

Lösung. Wir wissen, dass $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - b$ eine rationale Zahl ist. Wir können den Bruch mit $a-\sqrt{b}$ erweitern und erhalten einen Bruch mit rationalem Nenner $^{a-\sqrt{b})}\dfrac{1}{a+\sqrt{b}} = \dfrac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$.

Bemerkung. Analog gilt $^{a+\sqrt{b})}\dfrac{1}{a-\sqrt{b}} = \dfrac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}$, wobei $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}_+$, und $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b) Wenn $a \in \mathbb{Q}_+$, $b \in \mathbb{Q}_+$, sodass $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, schreibt den Bruch $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ mit rationalem Nenner.

Lösung. Wir wissen, dass $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$ eine rationale Zahl ist. Wir erweitern den Bruch mit $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ und erhalten einen Bruch mit rationalem Nenner $^{\sqrt{a}-\sqrt{b})}\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$.

Bemerkung. Analog gilt $^{\sqrt{a}+\sqrt{b})}\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$, wobei $a \in \mathbb{Q}_+$, $b \in \mathbb{Q}_+$ und $\sqrt{a}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $a \neq b$.

Aufgaben

1 Rationalisiert die Nenner der Brüche: $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$, $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$, $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$, $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$, $\dfrac{-9}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

2 Holt die Faktoren aus der Wurzel heraus und rationalisiert die Nenner:
$\dfrac{4}{\sqrt{12}+2}$, $\dfrac{6}{3-\sqrt{27}}$, $\dfrac{3\sqrt{12}}{\sqrt{12}-\sqrt{9}}$, $\dfrac{10}{\sqrt{3}-\sqrt{8}}$, $\dfrac{6}{\sqrt{20}+\sqrt{8}}$.

3 Berechnet: **a)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$.

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{1}{3-\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

c) $\dfrac{18}{\sqrt{6}} - \dfrac{5}{\sqrt{6}-1} - \sqrt{24}$.

4 Rationalisiert die Nenner $\dfrac{11}{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-5\sqrt{2}}$

5 Zeigt, dass die Zahl $\dfrac{-2}{\sqrt{9}-\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ irrational ist.

6 Vergleicht die Zahlen $a = \left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^{-1}$ und $b = \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^{-1}$.

7 Führt die Rechnungen aus:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \dfrac{5}{\sqrt{10}+\sqrt{5}} + \dfrac{15}{\sqrt{25}+\sqrt{10}}$;

c) $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} - \dfrac{6}{3\sqrt{3}+5}\right) : \left(\dfrac{1}{3-2\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

8 Berechnet das arithmetische und das geometrische Mittel der Zahlen $m = \dfrac{2}{3+\sqrt{7}} - \dfrac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}$ und $n = \sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}$.

9 Gegeben ist
$$p = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \left[\frac{1}{3\sqrt{2}} - (2\sqrt{2})^{-1}\right] \cdot 2\sqrt{2}.$$
a) Zeigt, dass p eine rationale Zahl ist.

b) Berechnet $\dfrac{1}{\sqrt{p+6}}$.

10 Seien $a = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right)^{-1}$

und $b = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right) : (\sqrt{7}-\sqrt{5}) : \dfrac{5}{\sqrt{5}}$.

Stellt fest, ob die Zahl $b-a$ rational ist oder nicht.

3 Faktorzerlegung mithilfe der Rechenregeln

L1. Faktorzerlegung mithilfe des gemeinsamen Faktors

Wir erinnern uns!

In der Menge der reellen Zahlen ist die Multiplikation distributiv in Bezug auf die Addition.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$
für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$

Beispiele:
1. $3 \cdot (x + 2) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3x + 6$
2. $7y \cdot (y + 3) = 7y \cdot y + 7y \cdot 3 = 7y^2 + 21y$
3. $-5ab \cdot (a - 2) = (-5ab) \cdot a + (-5ab) \cdot (-2) = -5a^2b + 10ab$

Wir lösen und stellen fest

Das Distributivgesetz der Multiplikation in Bezug auf die Addition erlaubt uns, *das Produkt* $a \cdot (b + c)$ als *algebraische Summe* zu schreiben.

Der algebraische Ausdruck $a \cdot (b + c)$ wird in die Summe $a \cdot b + a \cdot c$ umgewandelt. So haben wir *ein Produkt von Faktoren berechnet (entwickelt).*

Beispiel: Berechne das Produkt
$x(1 + x)(2 - x)$

Lösung:
$x(1 + x)(2 - x) = (x + x^2)(2 - x) =$
$= 2x - x^2 + 2x^2 - x^3 = -x^3 + x^2 + 2x.$

Wir möchten nun Methoden finden, um einen Ausdruck als *Produkt* von Faktoren zu schreiben.
Wir schreiben die Identität $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ in äquivalenter Form $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$.
1. Der linke Teil der Gleichung ist eine Summe, wobei a ein *gemeinsamer Faktor* der Terme ab und ac ist;
2. Der rechte Teil der Gleichung ist das Produkt aus dem gemeinsamen Faktor a und dem Faktor $(b + c)$.
In der Schreibweise $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$, sagen wir, dass wir „die Summe $a \cdot b + a \cdot c$ in das Produkt $a \cdot (b + c)$ umgewandelt haben, indem wir den *gemeinsamen Faktor a* ausgeklammert haben“ oder „wir haben die Summe $a \cdot b + a \cdot c$ mithilfe des *gemeinsamen Faktors* in Faktoren zerlegt“.
Allgemein ist die *Faktorzerlegung* einer algebraischen Summe das Umwandeln der Summe in ein Produkt von *algebraischen Ausdrücken*.
Die vorherigen Beispiele können dann auch so betrachtet werden:

Ausdruck	***Faktorzerlegung***
$a \cdot b + a \cdot c$	$a \cdot (b + c)$
$3x + 6 = 3 \cdot x + 3 \cdot 2$	$3 \cdot (x + 2)$
$7y^2 + 21y = 7y \cdot y + 7y \cdot 3$	$7y \cdot (y + 3)$
$-5a^2b + 10ab = -5ab \cdot a + (-5ab) \cdot (-2)$	$-5ab \cdot (a - 2)$
$-x^3 + x^2 + 2x$	$x(1 + x)(2 - x)$

Bemerkung.

1. Wenn S eine algebraische Summe ist, dann kann sie als $S = \frac{1}{a} \cdot (aS)$ geschrieben werden, wobei a eine reelle von null verschiedene Zahl ist, die durch die *Unbestimmte a* dargestellt wird. Folglich: Wenn eine von null verschiedene Zahl ausgeklammert wird, wobei der Faktor nicht unbedingt gemeinsam ist, kann jede algebraische Summe in ein Produkt von zwei Faktoren zerlegt werden.
2. Wenn die *Faktorzerlegung einer Summe* gemeint ist, dann betrachten wir nur den Fall, wo der Faktor a gemeinsam für alle Terme der Summe, die zerlegt werden soll, ist.

Wir verstehen anhand von Beispielen

Die Faktorzerlegung einer algebraischen Summe ist nicht immer einfach. Es gibt keine allgemeingültige *Methode für die Faktorzerlegung,* und nicht jede algebraische Summe kann in Faktoren zerlegt werden. Mithilfe von konkreten Beispielen werden wir einige *Methoden der Faktorzerlegung* kennenlernen.

Anwendung: Zerlegt in Faktoren: **a)** $12x^2 - 28x$; **b)** $(2x + 3)(x - 2) - (2x + 3)(-2x + 1)$.

a) $12x^2 - 28x$	Start
$= \underline{4x} \cdot 3x - \underline{4x} \cdot 7$	Identifizieren von $4x$ als gemeinsamen Faktor.
$= \underline{4x}(3x - 7)$	Ausklammern des gemeinsamen Faktors $4x$.

b) $(2x + 3)(x - 2) - (2x + 3)(-2x + 1)$	Start
$= \underline{(2x + 3)}(x - 2) - \underline{(2x + 3)}(-2x + 1)$	Identifizieren von $(2x + 3)$ als gemeinsamen Faktor.
$= (2x + 3)[(x - 2) - (-2x + 1)]$	Ausklammern des gemeinsamen Faktors $(2x + 3)$.
$= (2x + 3)(x - 2 + 2x - 1)$	Reduzieren der gleichnamigen Terme.
$= (2x + 3)(3x - 3)$	In der zweiten Klammer ist 3 gemeinsamer Faktor.
$= (2x + 3) \cdot 3 \cdot (x - 1)$	Ausklammern des gemeinsamen Faktors 3.

Aufgaben

1 Zerlegt mithilfe des gemeinsamen Faktors in Faktoren:
a) $6x + 6y$; **b)** $-8x - 8z$;
c) $3n - 30m$; **d)** $a^3 + 5a$;
e) $9ab + 6a^2$; **f)** $-5abc + 25bc$;
g) $4u^2 - 3uv + 6u$; **h)** $8x^3 - 6x^2 + 2x$.

2 Zerlegt die Ausdrücke in Faktoren:
a) $am + bm$; **b)** $5nmp + 10mp$;
c) $p^2 - pq$; **d)** $\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}$;
e) $\sqrt{2}\, a^2 + a$; **f)** $3ab - 9bcd$;
g) $11x^3 - 22ax$; **h)** $4d^2 - \sqrt{3}\, d$.

3 Zerlegt in Faktoren:
a) $x - x^2$; **b)** $\frac{3}{2}xy - \frac{9}{2}y$;
c) $-\sqrt{6uv} + \sqrt{3v}$; **d)** $0,(3)t - 0,(6)\, t^2$.

4 Bestimmt den unbekannten Term, sodass die Sätze wahr sind:
a) $7x - 7y + ... = 7 \cdot (x - y + 3)$;
b) $6x - 12xy + 18xyz = 6x \cdot (1 - 2y + ...)$;
c) $x^3 + x^2 + ... = x(... + ... + 1)$.

5 Schreibt als Produkt von Faktoren:
a) $x(x + 4) + 3(x + 4)$;
b) $2x(x + \sqrt{3}\,) - 5(x + \sqrt{3}\,)$;
c) $(x + 6)(x - 3) + (x + 6)(x + 5)$.

6 Für $x \in \mathbb{R}$ werden die algebraischen Ausdrücke $E(x) = (x - 1)(x + 2) + (x - 1)(2x + 5)$ und $F(x) = (x - 11)(x - 2) - (11 - x)$ gegeben.
a) Zeigt, dass $a - x = -(x - a)$.
b) Zerlegt die Ausdrücke $E(x)$, $F(x)$ und $E(x) + F(x)$ in Faktoren.
c) Zeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{Z}$, die Zahl $E(n) + F(n)$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

7 Zerlegt in Faktoren:
$E(x) = 3x(x - 3) - (x - 3)(2x - 1)$;
$F(a) = (a + 1)^2 - 3a(a + 1)$;
$G(x) = (x + 2\,)(x + 1) - (x + 2\,)(2x - 1)$;
$H(x) = (\,x + 1)^2 - x(\,x + 1)$.

8 Berechnet mithilfe des gemeinsamen Faktors:

a) $2009^2 + 2008 \cdot 2009 - 4018 \cdot 2009$;

b) $1957 \cdot 1959 - 1958 \cdot 1957$;

c) $2009 \cdot 2010 + 2009 \cdot 2008 - 2009 \cdot 4018$;

d) $2009^2 + 2009 \cdot 2008 - 2009 \cdot 4017$.

9 **a)** Wenn $a + b + c = 15$ und $d = 2$, berechnet $ad + bd + cd$.

b) Wenn $ab = ac = -3$, berechnet $a(b + c)$.

c) Wenn $ac = ad = bc = bd = -2$, berechnet $(a + b)(c + d)$ şi $(a + b)(c - d)$.

10 Gegeben ist der Ausdruck: $E(t) = (3t - 7)^2 + (4t + 9)(3t - 7)$.

a) Schreibt den Ausdruck $(3t - 7)^2$ als Produkt von zwei Faktoren.

b) Zerlegt den Ausdruck $E(t)$ mithilfe des gemeinsamen Faktors.

11 Zerlegt in Faktoren:

a) $1 + \frac{3}{5}a + \frac{9}{25}a^2 + \frac{27}{125}a^3$;

b) $(3x + 1)^2 - (3x + 1)(3x + 2) - 6x(3x + 1)$.

L2. Faktorzerlegung mithilfe der Formeln zum schnellen Rechnen

Wir erinnern uns!

In den vorigen Lektionen haben wir gezeigt, dass *das Quadrat eines Binoms* (algebraische Summe zweier Terme) *und das Produkt von Summe und Differenz zweier Terme* auch mithilfe der Formeln $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ beziehungsweise $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ geschrieben werden können.

Die Formeln können auch folgendermaßen gelesen werden:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2, \qquad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

So erhalten wir die Formeln für die Faktorzerlegung der Ausdrücke $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ oder $a^2 - b^2$.

Berechnen des Quadrates eines Binoms
$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

Faktorzerlegung mithilfe der Formel
$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$
$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$

Bemerkung. Es gelten die Gleichungen: $a^2 + b^2 - 2ab = (-a)^2 + b^2 + 2(-a)b = b^2 + (-a)^2 + 2(-b)a$.
Wir verwenden die erste Formel und erhalten $a^2 + b^2 - 2ab = (-a + b)^2 = (a - b)^2$.

Berechnen des Produktes der Summe und der Differenz zweier Terme
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Faktorzerlegung mithilfe der Differenz von Quadraten
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Gegeben sind die Ausdrücke $A = a^2 + 2ax + x^2$, $B = x^2 + 2x + 1$, $C = 4 - 12y + 9y^2$, $D = 4 - x^2$, $E = 4x^2 - 9$. Wir werden sie mithilfe der *Formeln zum schnellen Rechnen* in Faktoren zerlegen. Wir werden für jeden Ausdruck die Terme identifizieren und die passende Formel bestimmen.

Ausdruck	Vorbereitung der Terme und Identifizieren der Formel	Faktorzerlegung	Verwendete Formel
$A = a^2 + 2ax + x^2$	$A = a^2 + 2ax + x^2$	$A = (a + x)^2$	$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$
$B = x^2 + 2x + 1$	$B = x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2$	$B = (x + 1)^2$	
$C = 4 - 12y + 9y^2$	$C = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot (3y) + (3y)^2$	$C = (2 - 3y)^2$ oder $C = (3y - 2)^2$	$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$
$D = 4 - x^2$	$D = 2^2 - x^2$	$D = (2 + x)(2 - x)$	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$E = 4x^2 - 9$	$E = (2x)^2 - 3^2$	$E = (2x + 3)(2x - 3)$	

Anwendungen

A. Faktorzerlegung mithilfe der binomischen Formel

1. Übung Zerlegt den Ausdruck $9 - 3xy + \frac{1}{4}x^2y^2$ in Faktoren.

Lösung:

$9 = 3^2 = (-3)^2$. Folglich ist *ein Term* 3 oder -3

$\frac{1}{4}x^2y^2 = \left(\frac{1}{2}xy\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}xy\right)^2$, also ist der *andere Term* $-\frac{1}{2}xy$ oder $\frac{1}{2}xy$

Wir schreiben: $-3xy = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}xy\right)$ oder $-3xy = 2 \cdot (-3) \cdot \left(\frac{1}{2}xy\right)$

Folgende Fälle sind möglich:

a) $9 - 3xy + \frac{1}{4}x^2y^2 = 3^2 + \left(-\frac{1}{2}xy\right)^2 + 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}xy\right) = \left(3 - \frac{1}{2}xy\right)^2$

b) $9 - 3xy + \frac{1}{4}x^2y^2 = (-3)^2 + \left(\frac{1}{2}xy\right)^2 + 2 \cdot (-3) \cdot \left(\frac{1}{2}xy\right) = \left(-3 + \frac{1}{2}xy\right)^2$

Lösungsetappen:

1. Man identifiziert zwei Terme des Ausdrucks, die Quadrate der algebraischen Ausdrücke sind.

2. Man prüft, ob man einen Term durch die Multiplikation mit 2 und dem Produkt der anderen beiden Terme erhalten kann.

3. Man verwendet *Formeln* und markiert die Terme.

Die Zerlegung des Ausdrucks ist $9 - 3xy + \frac{1}{4}x^2y^2 = \left(3 - \frac{1}{2}xy\right)^2$ oder $9 - 3xy + \frac{1}{4}x^2y^2 = \left(-3 + \frac{1}{2}xy\right)^2$.

Bemerkung:
Falls die Etappen 1) und 2) nicht gleichzeitig wahr sind, kann die beschriebene Methode für die Faktorzerlegung nicht angewendet werden. Man verwendet meistens die Variante a), doch beide Varianten sind korrekt.

B. Faktorzerlegung mithilfe der Differenz von Quadraten

2. Übung Zerlegt den Ausdruck $3x^4y^2 - 4z^2$ in Faktoren.

Lösung

$3x^4y^2 = (\sqrt{3}x^2y)^2$ und $4z^2 = (2z)^2$

$3x^4y^2 - 4z^2 = (\sqrt{3}x^2y)^2 - (2z)^2$

$(\sqrt{3}x^2y)^2 - (2z)^2 = (\sqrt{3}x^2y + 2z)(\sqrt{3}x^2y - 2z)$

$3x^4y^2 - 4z^2 = (\sqrt{3}x^2y + 2z)(\sqrt{3}x^2y - 2z)$.

Lösungsetappen:

1. Wir bemerken, dass man die zwei Terme der Differenz als Quadrate zweier Ausdrücke schreiben kann.

2. Wir schreiben den Ausdruck als Differenz von zwei Quadraten.

3. Wir wenden die Formel an.

4. Wir schreiben die Zerlegung des Ausdrucks.

3. Übung Zerlegt in Faktoren: **a)** $16x^4y^2 + 40x^2y + 25$; **b)** $4x^2 - 14x + 12$; **c)** $25 - 16x^2$; **d)** $x^4 + 4$.

Lösung:

a) $16x^4y^2 + 40x^2y + 25$
$= (4x^2y)^2 + 40x^2y + (5)^2$
$= (4x^2y)^2 + 2 \cdot (4x^2y) \cdot 5 + 5^2 = (4x^2y + 5)^2$

Lösungsetappen:

$16x^4y^2 = (4x^2y)^2$ und $25 = 5^2$
$40x^2y^2 = 2 \cdot (4x^2y) \cdot 5$

b) $4x^2 - 14x + 12$
$= (2x)^2 - 14x + \left(\sqrt{12}\right)^2$

$4x^2 = (2x)^2$, $12 = \left(\sqrt{12}\right)^2$, wobei $-14x$ der dritte Term ist und $-14x \neq -2(2x) \cdot \sqrt{12}$.

Schlussfolgerung: Der Ausdruck $4x^2 - 14x + 12$ kann nicht mit der binomischen Formel in Faktoren zerlegt werden. Es folgen *andere Methoden zur Faktorzerlegung* (siehe *Anwendung 2 a* der nächsten Lektion).

c) $25 - 16x^2 = 5^2 - (4x)^2 = (5 - 4x)(5 + 4x)$, also $25 - 16x^2 = (5 - 4x)(5 + 4x)$

d) $x^4 + 4$; $x^4 = (x^2)^2$ und $4 = 2^2$; $x^4 + 4 = (x^2)^2 + 2^2$. Wir können die Formel nicht anwenden, weil der Ausdruck keine Differenz von Quadraten ist. Der Ausdruck ist eine Summe von Quadraten und kann nicht mit dieser Methode in Faktoren zerlegt werden (siehe *Anwendung* 2 b der nächsten Lektion).

Aufgaben

1 Zerlegt folgende Ausdrücke in Faktoren:
a) $x^2 + 10x + 25$; **b)** $y^2 - 6y + 9$;
c) $x^2y^2 + 4xy + 4$; **d)** $100 - 20ab + a^2b^2$;
e) $16x^2 + 8x + 1$; **f)** $81y^2 - 18y + 1$;
g) $4x^2 - 28x + 49$; **h)** $9x^2 - 12xy + 4y^2$;
i) $5x^2 + 2\sqrt{5}x + 1$; **j)** $3y^2 - \sqrt{24}\,xy + 2x^2$.

2 Ergänzt den fehlenden Term, um das Quadrat eines Binoms zu erhalten:
a) $9a^2 - 6a + ...$; **b)** $25x^2 + 4 + ...$;
c) $9y^2 - 12y + ...$; **d)** $x^2 + 5 + ...$;
e) $3 - 2\sqrt{6}\,y + ...$; **f)** $1 - 6b + ...$.

3 Zerlegt folgende Ausdrücke in Faktoren:
a) $(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 1$;
b) $(m + 5)^2 - 4(m + 5) + 4$;
c) $(x + 3)^2 - 2(x + 3)(x - 1) + (x - 1)^2$;
d) $9x^4y^2z^2 + 24x^2yz + 16$;
e) $4(x - 2)^2 - 12(x - 2) + 9$.

4 Zerlegt in Faktoren:
a) $x^2 - 64$; **b)** $121 - y^2$;
c) $4x^2 - 25$; **d)** $9x^4y^2 - 16$;
e) $4(2x - 1)^2 - 49$; **f)** $81x^6y^2 - 4$.

5 Zerlegt in Faktoren:
a) $a^2b^2 - 9$; **b)** $x^2y^2 - 1{,}21$;
c) $x^2 - 2$; **d)** $5a^2 - 3$.

6 Verwendet die Faktorzerlegung und berechnet:
a) $98^2 + 2 \cdot 98 \cdot 2 + 2^2$; **b)** $201^2 - 2 \cdot 201 + 1$;
c) $104^2 - 96^2$; **d)** $4^2 \cdot 19^2 - 24^2$.

7 Zerlegt die Differenz von Quadraten in Faktoren:
a) $y^2 - 25$; **b)** $4x^2 - 1$;
c) $25 - 4y^2$; **d)** $81x^2 - 16y^2$;
e) $1{,}69x^2 - 1{,}44$; **f)** $1 - 2{,}25x^2y^2$.

8 Schreibt als Quadrat einer Summe oder Differenz:
a) $a^4 + 8a^2 + 16$; **b)** $81 - 72b^2 + 16b^4$;
c) $2x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 1$; **d)** $y^2 + 2\sqrt{3}\,y + 3$.

9 Schreibt als Produkt von zwei reellen Zahlen (mithilfe der Formeln zum schnellen Rechnen):
a) $99^2 - 1^2$; **b)** $996^2 - 4^2$;
c) $199^2 - 198^2$; **d)** $74^2 - 2 \cdot 74 \cdot 49 + 49^2$;
e) $999^2 + 2 \cdot 999 \cdot 1001 + 1001^2$.

10 Zerlegt in Faktoren:
a) $x^2 - x + \frac{1}{4}$; **b)** $7x^2 - 2\sqrt{7}x + 1$;
c) $x^2 + \frac{1}{9} - 0{,}(6)x$; **d)** $9x^2 - \frac{1}{4}$;
e) $(x + 2)^2 - 1$; **f)** $x^2 + 10xy + 25y^2$;
g) $(\sqrt{3})^2 - x^2$; **h)** $3x^2 - 2$ **i)** $2x^2 - 5$.

11 Zeigt, dass die Differenz der Quadrate zweier natürlicher aufeinanderfolgender Zahlen eine ungerade Zahl ist.

L3. Andere Methoden für die Faktorzerlegung

In den vorigen Lektionen haben wir verschiedene Techniken für die Faktorzerlegung der algebraischen Ausdrücke kennengelernt: der gemeinsame Faktor oder die Formeln zum schnellen Rechnen. Wir haben festgestellt, dass es in manchen Situationen vorteilhaft ist, die Terme zu gruppieren, um nachher mehrmals das Ausklammern zu verwenden.
Man kann die Techniken kombinieren, die Terme der algebraischen Ausdrücke vorteilhaft gruppieren oder *Kunstgriffe*[1] anwenden.

[1] *Kunstgriff* = einen Ausdruck so schreiben, dass ein gemeinsamer Faktor identifiziert wird, oder Terme einer Formel erkannt werden

Wir lösen und stellen fest

1. *Übung* SA

Schreibt $(x+2)(x+3)$ als algebraische Summe.

Lösungsetappen	*Lösung*
Start	$(x+2)(x+3)$
Rechnung	$= x^2 + 3x + 2x + 2 \cdot 3$
Reduzieren der	$= x^2 + 3x + 2x + 6$
gleichnamigen Terme	$= x^2 + 5x + 6$

Schlussfolgerung: $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$.
Bemerkung. $x^2 + 5x + 6$ ist die *Entwicklung des algebraischen Ausdrucks* $(x+2)(x+3)$.

2. Übung SA

Schreibt $x^2 + 5x + 6$ als Produkt von Faktoren.

Lösungsetappen	*Lösung*
Start	$x^2 + 5x + 6$
$5x = 3x + 2x$	$= x^2 + (3x + 2x) + 2 \cdot 3$
$6 = 2 \cdot 3$	$= \underline{x^2} + \underline{3x} + \underline{2x} + \underline{2} \cdot 3$
Gemeinsamer Faktor x	$= x\,(x+3) + 2\,(x+3)$
Gemeinsamer Faktor 2	$= x\,\underline{(x+3)} + 2\,\underline{(x+3)}$
Gemeinsamer Faktor $(x+3)$	$= (x+2)\,(x+3)$

Schlussfolgerung: $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$.
Bemerkung. $(x+2)(x+3)$ ist die *Faktorzerlegung des algebraischen Ausdrucks* $x^2 + 5x + 6$.

3. Übung SA Zeigt, dass jeder algebraische Ausdruck der Form $x^2 + mx$ als Differenz von Quadraten geschrieben werden kann.

Methode in drei Schritten:

1. Wir schreiben $mx = \frac{2mx}{2} = 2 \cdot x \cdot \frac{m}{2}$.
2. Wir identifizieren den fehlenden Term für das Quadrat einer Summe. Wir schreiben den Ausdruck und markieren das Quadrat der Summe.
3. Wir wenden die binomische Formel für das Quadrat einer Summe an und erhalten eine Differenz von Quadraten.

$$\underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{m}{2} + \left(\frac{m}{2}\right)^2}_{\text{Das Quadrat der Summe}} - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$x^2 + mx = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

1. Anwendung Zerlegt in Faktoren: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Lösungsschritte	*Lösung:*
	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
Wir gruppieren die Terme vorteilhaft.	$= (a^2 + 2ab + b^2) + (ac + bc) + (ac + bc + c^2)$
Wir wenden die Formeln an und klammern	$= \underline{(a+b)}^2 + c\underline{(a+b)} + c(a+b+c)$
den gemeinsamen Faktor aus und noch einmal den gemeinsamen Faktor ausklammern	$= (a+b)\underline{(a+b+c)} + c\underline{(a+b+c)}$
Rechenregel.	$= (a+b+c)(a+b+c) = (a+b+c)^2$

Schlussfolgerung. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$.

2. Anwendung Zerlegt in Faktoren: **a)** $4x^2 - 14x + 12$; **b)** $x^4 + 4$; **c)** $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

Lösungsschritte	*Lösung:*
Wir schreiben den Ausdruck und wenden *einen Kunstgriff an.*	**a)** $4x^2 - 14x + 12$
Wir gruppieren die Terme	$= 4x^2 - 8x - 6x + 12$
Wir klammern $2x$ aus der ersten Gruppe aus und 3 aus der zweiten Gruppe	$= (4x^2 - 8x) - (6x - 12)$
	$= 2x(2x-4) - 3(2x-4)$
Wir klammern $(2x-4)$ aus	$= (2x-4)(2x-3)$
Wir klammern 2 der ersten Klammer aus	$= 2(x-2)(2x-3)$

Wir wenden *einen Kunstgriff an*.
Wir gruppieren die ersten drei Terme.
Wir schreiben die erste Klammer als ein Quadrat.
Wir schreiben den Ausdruck als Differenz von Quadraten.
Wir zerlegen die Differenz von Quadraten in Faktoren.
Wir wenden die Rechenregeln an.

b) $x^4 + 4$
$= (x^2)^2 + 2^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 - 4x^2$
$= [(x^2)^2 + 2^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2] - 4x^2$
$= (x^2 + 2)^2 - 4x^2$
$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$
$= [(x^2 + 2) + (2x)] \cdot [(x^2 + 2) - (2x)]$
$= (x^2 + 2 + 2x) \cdot (x^2 + 2 - 2x)$

Man wendet die *Methode in drei Schritten* an und schreibt den Ausdruck $x^2 - \frac{4}{3}x$ als Differenz von Quadraten.

c) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

$$x^2 - \frac{4}{3}x = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{2}{3} = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} =$$

$$= \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$= \left(x - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$$

Wir ersetzen $x^2 - \frac{4}{3}x$ durch $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$,

berechnen $-\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = -\frac{4}{9} + \frac{1}{3} = -\left(\frac{1}{3}\right)^2$,

zerlegen die Differenz von Quadraten in Faktoren und berechnen die Klammern.

3. Anwendung

SA

a) Schreibt den Ausdruck $E_1 = x^2 + 10x + 26$ als Summe von Quadraten und berechnet den Wert für $x = -5$.

b) Schreibt den Ausdruck $E_2 = x^2 - 20x + 104$ als Summe von Quadraten und berechnet den Wert für $x = 10$.

c) Zeigt mithilfe der Ungleichung $a^2 \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, dass $x^2 + 10x + 26 \geq 1$, für alle reellen Zahlen x.

d) Zeigt mithilfe der Ungleichung $-a^2 \leq 0$, $a \in \mathbb{R}$, dass $-x^2 + 20x - 104 \leq -4$, für alle reellen Zahlen x.

a) $E_1 = x^2 + 10x + 26 = x^2 + 10x + 25 + 1$
$E_1 = (x + 5)^2 + 1^2$ und $E_1(-5) = 1$.

b) $E_2 = x^2 - 20x + 104 = x^2 - 20x + 100 + 4$
$E_2 = (x - 10)^2 + 2^2$ und $E_2(10) = 4$.

c) Aus $(x + 5)^2 \geq 0$, folgt, dass $(x + 5)^2 + 1^2 \geq 1$ und $x^2 + 10x + 26 \geq 1$, für jedes $x \in \mathbb{R}$.

d) $-x^2 + 20x - 104 = -(x^2 - 20x + 104) =$
$= -[(x - 10)^2 + 2^2] = -(x - 10)^2 - 2^2$.
Aus $-(x - 10)^2 \leq 0$ folgt, dass $-(x - 10)^2 - 2^2 \leq -4$, also ist $-x^2 + 20x - 104 \leq -4$, für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. Man stellt Folgendes fest:

1. $E_1(-5) = 1$ und $E_1(x) \geq 1$, für jedes reelle x. Wir sagen, dass 1 der *kleinste Wert* des Ausdrucks E_1 ist.

2. $E_2(10) = -4$ und $E_2(x) \leq -4$, für jedes reelle x. Wir sagen, dass -4 der *größte Wert* des Ausdrucks E_2 ist.

Fürs Portofolio

a) Zeigt, dass der kleinste Wert des Ausdrucks $x^2 - 4x + 7$ drei ist.
b) Zeigt, dass der kleinste Wert des Ausdrucks $x^2 + 6x + 10$ eins ist.
Zeigt, dass $(x^2 - 4x + 7)(x^2 + 6x + 10) \geq 3$, für jedes $x \in \mathbb{R}$, mithilfe der Aussage „Wenn a und b positive Zahlen sind, sodass $E_1 \geq a$ und $E_2 \geq b$, dann ist $E_1 \cdot E_2 \geq ab$".

Aufgaben

1 Zerlegt in Faktoren:

a) $(x + y) \cdot a^2 - (x + y) \cdot b^2$;

b) $ax^2 + bx^2 - ay^2 - by^2$;

c) $49a^2 + 14a(2x + 1) + (2x + 1)^2$;

d) $(\sqrt{3} - x)^2 + 6(\sqrt{3} - x) + 9$.

2 Zerlegt in Faktoren, indem ihr vorteilhaft gruppiert.

a) $3ax^2 + 4ax^3 + 6a^2x + 8a^2x^2$;

b) $12a^2b^3 + 4a^2b + 9ab^2 + 3a$;

c) $2xy + 3x^2y - 4x^2y^2 - 6x^3y^2$;

d) $5x^2 + 2a^2x - 10ax - 4a^3$.

3 Zerlegt in Faktoren:

a) $x^2 - 2x - 35$; **b)** $x^2 + 16x + 63$;

c) $x^2 - x - 2$; **d)** $y^4 + 64$;

e) $15x^2 + 7x - 2$; **f)** $3x^2 - 5x - 2$;

g) $5x^2 + 13x - 6$; **h)** $x^2 - 12x + 35$.

4 Zerlegt in Faktoren:

a) $81x^4 - 16$;

b) $256x^4y^4 - 1$;

c) $x^2 + 6x + 9 - y^2$;

d) $(3x + 2)^2 - 2 \cdot (3x - 2)(3x + 2) - 12 - 18x$;

e) $(3x - 2)(2x + 1) - 3(2x + 1)^2 + 2x(2x + 1)$;

f) $4(x - 2)^2 - (x + 1)^2$;

g) $16(x + 3)^2 - 9(x + 2)^2$;

5 Gegeben sind $E = x^2 - 9$ und $F = (x + 3)(3x - 4) - (x + 3)(2x - 1)$.

a) Berechnet den Zahlenwert des Ausdrucks E für $x = 0$, danach für $x = -1$.

b) Berechnet den Zahlenwert des Ausdrucks F für $x = 0$, danach für $x = -1$.

c) Zerlegt die Ausdrücke in Faktoren und prüft, ob $E = F$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

6 Zerlegt den Ausdruck in Faktoren:

$E = 9x^2 - 4 + (3x + 2)(x - 2)$.

7 Verwendet die Identität $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b) \cdot x + a \cdot b$ und zerlegt in Faktoren:

a) $x^2 + 5x + 6$; **b)** $x^2 - 9x + 20$;

c) $x^2 + 6x - 7$; **d)** $x^2 - 12x + 20$;

e) $x^2 - 8x + 15$; **f)** $x^2 - 3x - 28$.

8 a, b und c sind die Seiten eines Dreiecks. Zeigt:

a) Wenn $a^4 + b^4 - c^4 = 2a^2b^2$, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

b) Wenn $a^2b - b^2a + b^2c - c^2b = a^2c - c^2a$, dann ist das Dreieck gleichschenklig.

c) Wenn $ab + bc + ac = a^2 + b^2 + c^2$, dann ist das Dreieck gleichseitig.

9 Zeigt, dass die Zahl $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + (x^2 + 2x)(x^2 - 1)$ für jede ganze Zahl x durch 24 teilbar ist.

10 Zeigt, dass für jede reelle Zahl a folgende Beziehungen stattfinden:

a) $a^2 + 4a + 4 \geq 0$ **b)** $a^2 - 6a \geq -9$.

11 Bestimmt den kleinsten Wert des Ausdrucks:

a) $x^2 + 2x + 2,\ x \in \mathbb{R}$; **b)** $9x^2 - 6x - 3,\ x \in \mathbb{R}$;

c) $(3x - 2)(3x + 4),\ x \in \mathbb{R}$.

12 Bestimmt den größten Wert des Ausdrucks:

a) $-x^2,\ x \in \mathbb{R}$; **b)** $-7 - 6x - x^2,\ x \in \mathbb{R}$;

c) $(2x - 1)(3 - 2x),\ x \in \mathbb{R}$.

13 **a)** Zeigt, dass $1 + x + x^2 \geq \frac{3}{4}$, für jede reelle Zahl x.

b) Berechnet den kleinsten Wert des Ausdrucks $(1 + x + x^2)(1 - x + x^2)$, wenn $x \in \mathbb{R}$.

L4. Praktische Anwendungen

In der Praxis muss oft mit großen Zahlen schnell gerechnet werden. Formeln zum „schnellen Rechnen“ helfen uns dabei.

1. Anwendung: Berechnen der Flächeninhalte rechteckiger oder quadratischer Flächen, deren Dimensionen die Anwendung der Formeln ermöglichen.

1.1. Berechnet den Flächeninhalt eines rechteckigen Grundstückes, wenn:
a) $a = 1005$ m und $b = 995$ m;
b) $a = 693$ m und $b = 707$ m.

Lösung. Der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Dimensionen a und b ist $\mathcal{A} = ab$.
a) $\mathcal{A} = ab = 1005 \cdot 995 = (1000 + 5) \cdot (1000 - 5) =$
$= 1000^2 - 25 = 1\,000\,000 - 25 = 999\,975$ (m²).
b) $\mathcal{A} = ab = 693 \cdot 707 = (700 - 7) \cdot (700 + 7) =$
$= 700^2 - 49 = 490\,000 - 49 = 489\,951$ (m²).

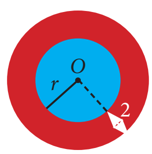
1.2. Berechnet den Flächeninhalt eines quadratischen Grundstückes, wenn:
a) die Seite des Quadrates $a = 51$ m;
b) die Seite des Quadrates $a = 48$ m.

Lösung. Der Flächeninhalt des Quadrates mit der Seitenlänge a ist $\mathcal{A} = a^2$.
a) $\mathcal{A} = a^2 = 51^2 = (50 + 1)^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$ (m²).
b) $\mathcal{A} = a^2 = 48^2 = (50 - 2)^2 = 2500 - 200 + 4 = 2304$ (m²).

Bemerkung. Mit ein wenig Übung werden diese Rechnungen sehr schnell als Kopfrechnungen ausgeführt.

2. Anwendung: Berechnen von Flächeninhalten mithilfe der Formeln zum schnellen Rechnen.

Unten ist ein altes Spielzeug aus Holz dargestellt. Die Flächen der Räder werden als zwei konzentrische Diskusse dargestellt. Der Radius des blauen Diskus ist r cm und die Differenz zwischen den beiden Radien beträgt 2 cm. Für die rote Fläche wird der algebraische Ausdruck $\mathcal{A}(\pi, r)$ verwendet.



a) Schreibt $\mathcal{A}(\pi, r)$ als algebraische Summe.
b) Schreibt $\mathcal{A}(\pi, r)$ als Differenz zweier Quadrate.
c) Verwendet **a)** und **b)** und zerlegt $\mathcal{A}(\pi, r)$ auf zwei Arten.
d) Um eine Fläche von 1 cm² anzumalen, benötigt man 1 Gramm Farbe. Wenn $r = 5$ cm, prüft, ob 75,4 g Farbe zum Bemalen der roten Fläche reichen. Begründet eure Antwort.

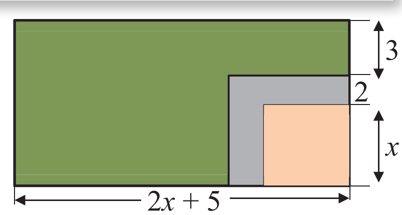
Lösung.
a) $\mathcal{A}(\pi, r) = \pi(r + 2)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 4r + 4) - \pi r^2 =$
$= 4\pi r + 4\pi$, also $\mathcal{A}(\pi, r) = 4\pi r + 4\pi$.
b) $\mathcal{A}(\pi, r) = \left[\sqrt{\pi}(r+2)\right]^2 - \left(\sqrt{\pi r}\right)^2$.
c) **I.** Laut **a)** und Ausklammern der gemeinsamen Faktoren ist $\mathcal{A}(\pi, r) = 4\pi\,(r + 1)$.
II. Wir zerlegen die Differenz der Quadrate von **b)**
$\mathcal{A}(\pi, r) = \left[\sqrt{\pi}(r+2) + \sqrt{\pi r}\right]\left[\sqrt{\pi}(r+2) - \sqrt{\pi r}\right]$,
erhalten $\mathcal{A}(\pi, r) = \left(2\sqrt{\pi r} + 2\sqrt{\pi}\right) \cdot 2\sqrt{\pi}$,
klammern den gemeinsamen Faktor $2\sqrt{\pi}$ aus und erhalten $\mathcal{A}(\pi, r) = 4\pi(r + 1)$.
d) $\mathcal{A}(\pi, r) = 4\pi(r + 1)$, $r = 5$ cm. Die rote Fläche hat den Inhalt $\mathcal{A} = 24\pi$ cm². Dafür benötigt man 24π Gramm Farbe.

Bekannt ist: $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$
$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416 \mid \cdot 24$
$24 \cdot 3{,}1415 < 24 \cdot \pi < 3{,}1416 \cdot 24$
$75{,}3960 < 24 \cdot \pi < 75{,}3984 < 75{,}4$
$24 \cdot \pi < 75{,}4$

Antwort: 75,4 Gramm rote Farbe reichen aus, um die Fläche zu bemalen.

3. Anwendung: Flächen in algebraischer Form mithilfe der Formeln zum schnellen Rechnen ausgedrückt.

Auf einem rechteckigen Grundstück soll ein Haus wie in der nebenstehenden Skizze gebaut werden.
– Die Grundfläche des Hauses ist quadratisch, die Seitenlänge ist x;
– die graue Fläche soll 2 m breit sein;
– die grüne Fläche soll den Garten darstellen;
– die Maßeinheit für die Längen ist der Meter.



$\mathcal{A}$ ist der Flächeninhalt des Grundstücks, $\mathcal{A}_1$ der des Weges und $\mathcal{A}_2$ der des Gartens.

a) Berechnet $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ in Funktion von x und schreibt $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ als algebraische Ausdrücke.
b) Berechnet $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$, wenn $x = 10$ m.
c) Zeigt, dass $\mathcal{A}_2$ eine Differenz von Quadraten ist.

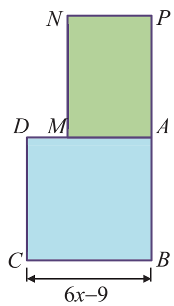
Lösung.
a) $\mathcal{A} = (2x + 5)\cdot(x + 2 + 3) = 2x^2 + 15x + 25$. Wir stellen fest, dass das Haus und der Weg eine quadratische Fläche mit der Seitenlänge $x + 2$ einnehmen.
Dann ist $x^2 + \mathcal{A}_1 = (x + 2)^2$, also $\mathcal{A}_1 = (x + 2)^2 - x^2 = 4x + 4$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} - (x + 2)^2 = (2x + 5)(x + 5) - (x + 2)^2 =$
$= x^2 + 11x + 21$.
b) Wenn x mit 10 ersetzt wird, ist $\mathcal{A} = 375$ m²; $\mathcal{A}_1 = 44$ m²; $\mathcal{A}_2 = 331$ m².
c) $\mathcal{A}_2 = x^2 + 11x + 21$

$x^2 + 11x$ als Differenz von Quadraten geschrieben $\longleftrightarrow$ $\mathcal{A}_2 = \left(x + \dfrac{11}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{11}{2}\right)^2 + 21$

Folglich $\longleftrightarrow$ $\mathcal{A}_2 = \left(x + \dfrac{11}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{37}}{2}\right)^2$.

Aufgaben

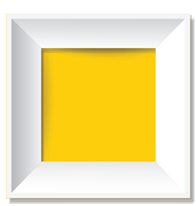
1 Ein Grundstück besteht aus einer quadratischen Fläche $ABCD$ und einer rechteckigen Fläche $AMNP$, wobei AM zwei Drittel von AB ist und $PA = AB$. $\mathcal{A}_1$ sei der Flächeninhalt der quadratischen Fläche, $\mathcal{A}_2$ der der rechteckigen Fläche und $\mathcal{A}$ der des gesamten Grundstücks.



a) Beweist, dass $x \in [1{,}5; \infty)$.
b) Berechnet $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}$. Schreibt jedes Ergebnis in algebraischer Form.
c) Prüft, ob $\mathcal{A} = 15\,(2x - 3)^2$.
d) Berechnet den Flächeninhalt des Grundstücks, wenn $x = 15$ m.

2 Sei n eine natürliche Zahl, $n \geq 2$.
a) Zeigt, dass: $n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$.
b) Berechnet die Differenz der Quadrate der Zahlen 272 und 271 mithilfe von a).

3 Die äußere Seitenlänge des quadratischen Bilderrahmens aus der Abbildung beträgt 143 cm, und die innere Seitenlänge 133 cm. Berechnet den Flächeninhalt des Bilderrahmens mithilfe einer Formel zum schnellen Rechnen.

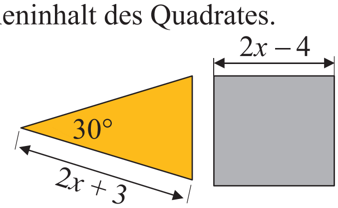


4 Die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ABC sind $AB = x$ cm und $AC = 3$ cm. Die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks MNP sind MN und MP. MN ist doppelt so lang wie AB und NP ist um x cm kürzer als AC.
a) Berechnet das Quadrat der Länge von MP.
b) Berechnet das Quadrat des Flächeninhaltes des Dreiecks MNP.
c) Beweist, dass $x \in (0, 1)$.

5 Berechnet mithilfe der Formeln:
a) $397 \cdot 403$; **b)** 53^2; **c)** 54^2; **d)** 56^2; **e)** 57^2.

6 **a)** Sei $n^2 - (n + 1)(n - 1)$. Vereinfacht den Ausdruck.
b) Nennt den Wert von $4{,}13^2 - 5{,}13 \cdot 3{,}13$, ohne die Rechnungen auszuführen.

7 In der unteren Zeichnung sind ein gleichschenkliges Dreieck und ein Quadrat dargestellt. Die Maßeinheit der Seitenlängen ist dieselbe. Bestimmt die reellen Zahlen x, für welche ein Viertel des Flächeninhaltes des Dreiecks mindestens gleich ist mit dem Flächeninhalt des Quadrates.



4 Algebraische Brüche. Operationen mit algebraischen Brüchen

L1. Algebraische Brüche. Der Definitionsbereich eines algebraischen Bruchs. Der Wert eines algebraischen Bruchs

Wir lösen und stellen fest

1. Aufgabe
Tudor will Hefte kaufen. Er weiß, dass ein Heft y Lei kostet. Im Laden erfährt er, dass er für jedes gekaufte Heft um 0,5 Lei weniger zahlen muss. Tudor verfügt über x Lei. Er stellt fest, dass er für das gesamte Geld Hefte kaufen kann.

a) Schreibt für die Anzahl der Hefte, die er mit dem gesamten Geld kaufen kann, einen algebraischen Ausdruck.

b) Tudors Freund Mihai meint, dass Tudor $\frac{2x}{2y-1}$ Hefte kaufen kann. Hat Mihai recht?

c) Falls $x = 10{,}50$ und $y = 2$, berechnet, wie viele Hefte Tudor für das ganze Geld kaufen kann.

Lösung

a) Sei n die Anzahl der Hefte, die Tudor kaufen kann, p der Preis eines Heftes und c der Preis aller gekauften Hefte.
Tudor wusste, dass ein Heft y Lei kostet, aber es kostet $(y - 0{,}5)$ Lei, also ist $p = y - 0{,}5$.
Tudor hat x Lei, deshalb ist $c = x$. Dann ist $n = \frac{c}{p}$, das heißt, die *Anzahl der Hefte,* die er kaufen kann, ist $n = \frac{x}{y-0{,}5}$.

b) Wir erweitern den Bruch $\frac{x}{y-0{,}5}$ mit 2

$$^{2)}\frac{x}{y-0{,}5} = \frac{2\cdot x}{2\cdot(y-0{,}5)} = \frac{2x}{2y-1}.$$ Mihai hat recht.

c) Wir ersetzen x und y im vorigen algebraischen Ausdruck und erhalten

$$n = \frac{10{,}5}{2-0{,}5} = {}^{2)}\frac{10{,}5}{1{,}5} = \frac{10{,}5\cdot 2}{1{,}5\cdot 2} = \frac{21}{3} = 7 \text{ (Hefte)}.$$

2. Aufgabe
Die Seitenlänge eines Quadrates ist a und die Grundlinie eines Rechtecks ist b. Wenn man die Grundlinie des Rechtecks um zwei Einheiten verkleinert, entsteht ein neues Rechteck, dessen Flächeninhalt gleich ist mit dem Flächeninhalt des Quadrates.

a) Berechnet die Höhe und den Umfang des neuen Rechtecks.

b) Löst die Aufgabe, wenn $a = 2$ cm und $b = 4$ cm.

Lösung

a) A ist der Flächeninhalt des neuen Rechtecks und h seine Höhe.
Der Flächeninhalt des Quadrates ist a^2.
Da $A = (b - 2) \cdot h$, ist $a^2 = (b - 2) \cdot h$, also $h = \frac{a^2}{b-2}$.
Der Umfang des neuen Rechtecks ist

$$P = 2\cdot\left[(b-2) + \frac{a^2}{b-2}\right] = 2\cdot\left[\frac{(b-2)^2}{b-2} + \frac{a^2}{b-2}\right]$$

$$= 2\cdot\frac{b^2-4b+4+a^2}{b-2} = \frac{2a^2+2b^2-8b+8}{b-2}.$$

b) $h = \frac{2^2}{4-2} = 2\,(\text{cm})$; $P = \frac{2\cdot 2^2 + 2\cdot 4^2 - 8\cdot 4 + 8}{4-2} = 8\,(\text{cm})$.

Bemerkungen:

1. Die algebraischen Ausdrücke $\frac{x}{y-0{,}5}$; $\frac{2x}{2y-1}$; $\frac{a^2}{b-2}$; $\frac{2a^2-8b+2b^2+8}{b-2}$ aus den vorherigen Aufgaben heißen *Verhältnisse von reellen Zahlen, die durch Buchstaben ausgedrückt werden* oder *algebraische Brüche.*

2. Um zu zeigen, dass der algebraische Bruch $\frac{2x}{2y-1}$ von den reellen Zahlen x und y, *Unbekannte* oder *Variablen* genannt, abhängig ist, bezeichnen wir ihn mit $F(x, y)$ (lies „F von x und y“) *und schreiben* $F(x,y)=\frac{2x}{2y-1}$.

2.1. Wenn wir im algebraischen Bruch $\frac{2x}{2y-1}$ die Unbekannte x durch 10,5 und die Unbekannte y durch 2 ersetzen, gilt $\frac{2\cdot 10{,}5}{2\cdot 2-1}=\frac{21}{3}=7$. Wir schreiben $F(10{,}5; 2) = 7$ und sagen, dass der Wert des algebraischen Bruchs $F(x, y)$ 7 ist, wenn $x = 10{,}5$ und $y = 2$.

2.2. Wenn wir y in $\frac{2x}{2y-1}$ durch 0,5 ersetzen, dann wird der Nenner 0. Aber die Division durch 0 hat keinen Sinn. Man sagt, dass der algebraische Bruch für $y = 2$ *nicht definiert ist* oder *keinen Sinn hat* unabhängig von dem Wert, den x annehmen würde.

3. Da algebraische Brüche Verhältnisse reeller Zahlen sind, können damit alle Rechenoperationen mit reellen Zahlen ausgeführt werden.

Wir verstehen anhand von Beispielen

1 Das Verhältnis zweier algebraischer Ausdrücke mit dem Teiler verschieden von null ist ein *algebraischer Bruch*.

$\frac{x}{y}$, $\frac{x+1}{xy}$, $\frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$, $-\frac{a^3+b^2-4}{abc}$ sind algebraische Brüche. $\frac{x+y}{0}$; $\frac{xyz+3(x+y)+z}{0}$ sind keine algebraischen Brüche.

2 Ein algebraischer Bruch *ist definiert* (*hat einen Sinn*), wenn der Nenner verschieden von null ist.

Der algebraische Bruch $\frac{x+1}{x^2+(y-1)^2+2z}$ *ist definiert,* wenn $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $x^2 + (y-1)^2 + 2z \neq 0$.

3 Wird die Variable (oder die Variablen) eines algebraischen Ausdrucks durch Zahlenwerte ersetzt, sodass der Nenner nicht null wird, erhält man den *Wert (Zahlenwert)* des Ausdrucks für die entsprechenden Werte der Variablen.

Für $x = -2$ ist der Wert des Ausdrucks $F(x)=\frac{3x+1}{x^2+4}$ gleich

$$F(-2)=\frac{3\cdot(-2)+1}{(-2)^2+4}=\frac{-5}{8}.$$

Der Wert von $E(x, y) = 2x - 5y$ ist für $x = 1$ und $y = 2$ gleich $E(1, 2) = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = 8$.

4 Die Menge aller reeller Werte, die eine Variable annehmen kann, sodass der algebraische Bruch einen Sinn hat, heißt *Definitionsbereich* des Bruches.

a) Für $\frac{E(x)}{F(x)}$ ist der Definitionsbereich $\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \neq 0\}$.

b) Für $\frac{E(x,y)}{F(x,y)}$ ist der Definitionsbereich $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid F(x, y) \neq 0\}$.

1) Der Definitionsbereich für $\frac{3x+1}{3x^2-12}$ ist $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 12 \neq 0\}$.

2) Der Definitionsbereich für $\frac{xy}{x^2+y^2}$ ist $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$.

3) Der Definitionsbereich für $\frac{x}{y+3}$ ist $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y + 3 \neq 0\}$.

Anwendungen

1 Gegeben ist der algebraische Bruch $F(x, y) = \dfrac{9x^2 - 4y^2}{3x + 2y}$.

a) Berechnet den Wert des algebraischen Bruches für $x = 2$ und $y = 1{,}5$.

Lösung. $F(2;\, 1{,}5) = \dfrac{9 \cdot 2^2 - 4 \cdot 1{,}5^2}{3 \cdot 2 + 2 \cdot 1{,}5} = \dfrac{9 \cdot 4 - 4 \cdot 2{,}25}{6+3} = \dfrac{36-9}{6+3} = \dfrac{27}{9} = 3$, also $F(2;\, 1{,}5) = 3$.

b) Stellt fest, ob $F(x, y)$ für $x = -2$ und $y = 3$ definiert ist.

Lösung. Wir berechnen $3x + 2y$ für $x = -2$ und $y = 3$ und erhalten $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 0$.
Da der Nenner des Bruches null ist, ist der algebraische Bruch *nicht definiert,* wenn $x = -2$ und $y = 3$.

2 Bestimmt den Definitionsbereich des algebraischen Bruches $F(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{(2x-5)^2 - 4x^2}$.

Lösung. $(2x - 5)^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow -20x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}25$.

Der algebraische Bruch hat keinen Sinn, wenn $x = 1{,}25$. Der Definitionsbereich ist: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1{,}25\} = \mathbb{R} - \{1{,}25\}$.

Aufgaben

1 Schreibt die Tabelle ab und ergänzt sie laut Muster.

Das Verhältnis	$\dfrac{6}{6x}$	$\dfrac{x}{x-1}$	$\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$	$\dfrac{x}{x^2-1}$	$\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$	$\dfrac{6x-1}{x^2-36}$
Der Definitionsbereich		$\mathbb{R} - \{1\}$				
Begründung		$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$				

2 Bestimmt für jedes Verhältnis die Werte von x so, dass der Ausdruck einen Sinn hat:

a) $\dfrac{x+5}{x}$ **b)** $\dfrac{x-3}{-3x}$ **c)** $\dfrac{7x^4}{x^2}$

d) $\dfrac{2x-7}{x+1}$ **e)** $\dfrac{2-x}{-x-2}$ **f)** $\dfrac{101}{x^2+1}$

g) $\dfrac{x^2+x}{3x+8}$ **h)** $\dfrac{x-12}{(x+1)(x-2)}$

i) $\dfrac{x+4}{x^2-4x+4}$ **j)** $\dfrac{5x-7}{x^2-25}$

3 Wenn der Ausdruck $\dfrac{5+x}{x^2+ax-16}$ für alle $x \in \mathbb{R} - \{-4;\, 4\}$ definiert ist, bestimmt a.

4 Bestimmt die Werte des Verhältnisses $\dfrac{5}{x}$ für $x = -1$ und für $x = \sqrt{5}$.

5 Schreibt die Tabelle ab und ergänzt sie nach dem Muster.

$\dfrac{3+x}{x-2}$	$\dfrac{x}{x+3}$	$\dfrac{x+6}{2x-10}$	$\dfrac{4x+5}{3x^2-48}$
$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Die Menge der Werte x, für die der Ausdruck *keinen Sinn hat,* ist $\{2\}$.			

6 Berechnet die Werte des Ausdrucks für die gegebenen Werte der Variablen:

a) $\dfrac{4}{x+2}$ für $x \in \{0{,}2\}$

b) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ für $x \in \{-1, \sqrt{2}, \sqrt{3} - 1\}$.

7 Sei $F(x)=\dfrac{x^3-x^2+x}{x^2+x+1}$. Berechnet den Wert des Bruches für:

a) $x=-1$; **b)** $x=0$; **c)** $x=\dfrac{1}{2}$

8 Gegeben sind die algebraischen Brüche:

1) $\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-2x+1}$; **2)** $\dfrac{x^2+x-2}{x(x+2)-3}$;

3) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; **4)** $\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}$.

a) Zerlegt die Nenner in Faktoren.

b) Berechnet für jeden Bruch die reellen Werte x, für die der Nenner 0 ist.

c) Bestimmt für jeden Bruch die reellen Werte x, für die der Bruch keinen Sinn hat.

d) Bestimmt den Definitionsbereich eines jeden Bruchs.

9 Bestimmt den Definitionsbereich der Brüche:

a) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2-4x+6y+13}$;

b) $\dfrac{x+y}{xy+3x-2y-6}$.

L2. Erweitern und Kürzen eines Verhältnisses von reellen Zahlen, das mithilfe von Buchstaben gegeben ist

Wir erinnern uns!

Einen Bruch mit einer reellen von null verschiedenen Zahl m *erweitern,* bedeutet, Zähler und Nenner mit m zu multiplizieren.

Einen Bruch mit einer reellen von null verschiedenen Zahl p *kürzen,* bedeutet, Zähler und Nenner durch p zu teilen.

Durch Erweitern oder Kürzen eines Bruches wird ein *äquivalenter Bruch* erhalten.

Wenn $a, c \in \mathbb{R}$ und $b, d \in \mathbb{R}^*$, dann:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$$

1) Erweitern wir $\frac{6}{8}$ mit 3, erhalten wir den äquivalenten Bruch $\frac{18}{24}$. Wir schreiben $^{3)}\frac{6}{8}=\frac{18}{24}$.

2) Kürzen wir $\frac{6}{8}$ durch 2, erhalten wir den äquivalenten Bruch $\frac{3}{4}$. Wir schreiben $\frac{6}{8}^{(2}=\frac{3}{4}$.

3) $^{m)}\dfrac{a}{b}=\dfrac{m\cdot a}{m\cdot b}$ | $\dfrac{a}{b}^{(p}=\dfrac{a:p}{b:p}$

4) $\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow 6\cdot 4=8\cdot 3$

Wir verstehen anhand von Beispielen

In der Menge der algebraischen Brüche werden die *Gleichheitsbeziehung*, das *Erweitern* und das *Kürzen* der algebraischen Brüche definiert. Dann kann man Operationen mit algebraischen Brüchen ausführen.

i Zwei algebraische Brüche, $\frac{E}{F}$ und $\frac{G}{H}$, sind genau dann gleich, wenn $E\cdot H=F\cdot G$.

$$\frac{E}{F}=\frac{G}{H} \Leftrightarrow E\cdot H=F\cdot G$$

Beispiel: Beweist, dass $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x}{x-1}$.

Lösung. $(x^2+x)(x-1)=x^3-x^2+x^2-x=x^3-x$ und
$(x^2-1)\,x=x^3-x$.

Folglich $(x^2+x)(x-1)=(x^2-1)\,x$, also $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x}{x-1}$.

Bemerkung. Wenn zwei algebraische Brüche gleich sind, dann haben sie auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich gleiche Werte. Im obigen Beispiel auf der Menge $\mathbb{R}-\{-1; 1\}$.

2 Erweitern eines algebraischen Bruchs $\frac{E}{F}$ mit $G \neq 0$:

$$^{G)}\frac{E}{F} = \frac{E \cdot G}{F \cdot G}$$

Beispiel: Erweitert den algebraischen Bruch $\frac{x}{x-1}$ mit dem Ausdruck $x + 1$, $x + 1 \neq 0$.

Lösung. $^{x+1)}\frac{x}{x-1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x}{x^2-1}$

Bemerkung. Die Gleichheit zweier algebraischer Brüche setzt voraus, dass ihre Werte auf dem gemeinsamen Definitionsbereich gleich sind. Im obigen Beispiel auf $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

3 Kürzen eines algebraischen Bruchs $\frac{E}{F}$ mit $G \neq 0$:

$$\frac{E}{F}^{(G} = \frac{E:G}{F:G}$$

Beispiel: Kürzt den algebraischen Bruch $\frac{x^2+x}{x^2-1}$ mit dem Ausdruck $x + 1$, wenn $x + 1 \neq 0$.

Lösung. $\frac{x^2+x}{x^2-1} = \frac{x \cdot \cancel{(x+1)}}{(x-1) \cdot \cancel{(x+1)}}^{(x+1} = \frac{x}{x-1}$

Bemerkung. Um einen algebraischen Bruch zu kürzen, ist es praktisch, Zähler und Nenner in Faktoren zu zerlegen.

Anwendungen

Gegeben sind die algebraischen Brüche $F_1(x) = \frac{x-1}{x+1}$ und $F_2(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$.

a) Bestimmt den Definitionsbereich von $F_1(x)$ und $F_2(x)$.

Lösungsetappen:	*Lösung:*
Wir bestimmen den Definitionsbereich von $F_1(x)$.	$x + 1 = 0$, wenn $x = -1$. Der Definitionsbereich von $F_1(x)$ ist $\mathbb{R} - \{-1\}$.
Wir bestimmen den Definitionsbereich von $F_2(x)$.	$x^2 - 1 = 0$, wenn $x = -1$ oder $x = 1$. Der Definitionsbereich von $F_2(x)$ ist $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

b) Beweist, dass $F_1(x) = F_2(x)$.
Die algebraischen Brüche $F_1(x)$ und $F_2(x)$ können nur für $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ gleich sein.

Lösungsetappen:	*Lösung:*
Wir beginnen	$F_1(x) = F_2(x) \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;
Wir berechnen: $(x-1)(x^2-1)$ und $(x+1)(x^2-2x+1)$	$(x-1)(x^2-1) = x^3 - x - x^2 + 1 = x^3 - x^2 - x + 1$; $(x+1)(x^2-2x+1) = x^3 - 2x^2 + x + x^2 - 2x + 1 = x^3 - x^2 - x + 1$.
Wir beenden	Da $(x-1)(x^2-1) = (x+1)(x^2-2x+1)$, folgt $F_1(x) = F_2(x)$

c) Wir erweitern $F_1(x)$ mit $(x - 1)$. Zeigt, dass $F_1(x) = F_2(x)$.

Lösung. $F_1(x) = {}^{x-1)}\frac{x-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = F_2(x)$

d) Kürzt $F_2(x)$ und beweist, dass $F_1(x) = F_2(x)$.

Lösungsetappen:	*Lösung:*
Wir zerlegen Zähler und Nenner von $F_2(x)$ in Faktoren	$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (x-1)(x-1)$; $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$
Wir kürzen $F_2(x)$	$F_2(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \dfrac{x-1}{x+1} = F_1(x)$
Wir beenden	Nach Kürzen von $F_2(x)$ mit $(x-1)$ folgt $F_1(x) = F_2(x)$.

Aufgaben

1 Erweitert

a) $\dfrac{x^2}{x-1}$ mit $2x$;

b) $\dfrac{2x-3}{x+2}$ mit $x-1$.

2 Erweitert

a) $\dfrac{x}{2x+1}$ mit 4;

b) $\dfrac{x-1}{x+1}$ mit $x+1$;

c) $\dfrac{x}{2x+1}$ mit 5;

d) $\dfrac{x-1}{x+1}$ mit $x-1$ und berechnet.

3 Erweitert mit $x+3$:

a) $\dfrac{7}{x^2}$; **b)** $\dfrac{x}{x+1}$;

c) $\dfrac{1-x}{x^2-3x}$; **d)** $\dfrac{x-3}{x^2-3x+9}$.

4 Bringt auf den gemeinsamen Nenner:

a) $\dfrac{1}{x}, \dfrac{3}{x^2}$; **b)** $\dfrac{3}{2y}, \dfrac{-4}{3y}$;

c) $\dfrac{1}{9x^2}, \dfrac{5}{12x}, \dfrac{1}{18x}$; **d)** $\dfrac{a}{8x^2y}, \dfrac{5b}{6xy^3}, \dfrac{c}{3x^3}$.

5 Kürzt:

a) $\dfrac{2x^2}{x^3}$; **b)** $\dfrac{5x^2y}{xy^3}$;

c) $\dfrac{-3ab^2c^3}{15a^3b^2c}$; **d)** $\dfrac{x-1}{1-x}$.

6 **a)** Zerlegt die Ausdrücke $x^2 + x$, $x^2 - x$ und $x^3 - x$ in Faktoren.

b) Kürzt:

$\dfrac{x^2+x}{x^2-x}, \dfrac{x^2-x}{x^3-x}, \dfrac{x^3-x}{x^2+x}$.

7 Kürzt:

a) $\dfrac{24}{8x-16}$; **b)** $\dfrac{2x^2-6x}{4x-12}$;

c) $\dfrac{y^2-10y+25}{y^2-25}$;

d) $\dfrac{a^2-4}{a^2-4a+4}$; **e)** $\dfrac{(2b-3)^2-b^2}{3b^2-9b}$.

8 Beweist, dass $F_1(x)$ und $F_2(x)$ auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich gleich sind:

a) $F_1(x) = \dfrac{7x}{6}$ und

$F_2(x) = \dfrac{14x^2-7x}{12x-6}$;

b) $F_1(x) = \dfrac{6x^2+x-1}{4x^2+8x+3}$ und

$F_2(x) = \dfrac{3x-1}{2x+3}$;

c) $F_1(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}$ und

$F_2(x) = \dfrac{x-3}{x+3}$;

d) $F_1(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3-7x+6}$ und

$F_2(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2x-3}$.

L3. Operationen mit algebraischen Brüchen

Algebraische Brüche sind Verhältnisse reeller Zahlen, die mithilfe von Buchstaben ausgedrückt werden. Die Rechenoperationen mit algebraischen Brüchen erfolgen entsprechend den Regeln der Operationen mit reellen Zahlen.

Wir lösen und stellen fest

1 **a)** Zerlegt die Zahlen 132 und 198 in Primfaktoren und bestimmt ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches.

b) Bringt die Brüche $\frac{1}{132}$ und $\frac{5}{198}$ auf den gemeinsamen Nenner.

2 **a)** Zerlegt die algebraischen Ausdrücke $x^4 - x^2$ und $x^4 + x^3 - x^2 - x$.

b) Bringt die Brüche $\frac{1}{x^4 - x^2}$ und $\frac{5}{x^4 + x^3 - x^2 - x}$ auf gemeinsamen Nenner.

Lösung.

a) $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$

$198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 396$.
(Das Produkt der größten Potenzen der gemeinsamen oder nicht gemeinsamen Primfaktoren)

b) $^{3)}\frac{1}{132} = \frac{3}{396}$ und $^{2)}\frac{5}{198} = \frac{10}{396}$.

a) $x^4 - x^2 = x^2(x+1)(x-1)$

$x^4 + x^3 - x^2 - x = (x^4 - x^2) + (x^3 - x) = x^2(x^2-1) + x(x^2-1) = (x^2-1)(x^2+x) = x(x+1)^2(x-1)$

b) *Der gemeinsame Nenner* ist $x^2(x+1)^2(x-1)$. (Das Produkt der größten Potenzen der gemeinsamen oder nicht gemeinsamen Faktoren)

$$\frac{1}{x^4 - x^2} = {}^{x+1)}\frac{1}{x^2(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x^2(x+1)^2(x-1)}$$

$$\frac{5}{x^4 + x^3 - x^2 - x-1} = {}^{x)}\frac{5}{x(x+1)^2(x-1)} = \frac{5x}{x^2(x+1)^2(x-1)}.$$

Schlussfolgerung.

Die Zerlegung der Nenner gemeiner Brüche in Primfaktoren hilft, den gemeinsamen Nenner mehrerer Brüche zu finden.

Die Zerlegung der Nenner algebraischer Brüche hilft, den gemeinsamen Nenner mehrerer algebraischer Brüche zu finden.

Wir verstehen anhand von Beispielen

1 Addition und Subtraktion algebraischer Brüche mit gleichem Nenner:
Wenn A, B, P algebraische Ausdrücke sind und $P \neq 0$, gilt:

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{P} = \frac{A+B}{P} \text{ und } \frac{A}{P} - \frac{B}{P} = \frac{A-B}{P}.$$

Berechnet: $\frac{2x+1}{x-1} + \frac{x}{x-1} - \frac{5-x}{x-1}$

Lösung:

$$\frac{2x+1}{x-1} + \frac{x}{x-1} - \frac{5-x}{x-1} = \frac{(2x+1)+x-(5-x)}{x-1} =$$

$$= \frac{2x+1+x-5+x}{x-1} = \frac{4x-4}{x-1} = \frac{4\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 4.$$

2 Addition und Subtraktion algebraischer Brüche, die keinen gleichen Nenner haben:
Schritt 1. Man zerlegt die Nenner in Faktoren
Schritt 2. Man bestimmt den gemeinsamen Nenner:
Schritt 3. Man bringt auf den gemeinsamen Nenner und führt die Rechnungen aus

Falls A, B, P, Q algebraische Ausdrücke sind, $P \neq 0$, $Q \neq 0$, gilt:

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{Q} = {}^{Q)}\frac{A}{P} + {}^{P)}\frac{B}{Q} = \frac{AQ+BP}{PQ}$$

Berechnet: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^3-x^2}$.

$x^2 + x = x(x+1)$ und $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$

$x^2(x+1)(x-1) = x^2(x^2-1)$

$$^{x^2-1)}\frac{1}{x^2} + {}^{x(x-1))}\frac{1}{x(x+1)} + {}^{x+1)}\frac{1}{x^2(x-1)} =$$

$$= \frac{x^2-1}{x^2(x^2-1)} + \frac{x(x-1)}{x^2(x+1)(x-1)} + \frac{x+1}{x^2(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2-1+x^2-x+x+1}{x^2(x^2-1)} = \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x^2-1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

Bemerkung. Nachdem die Rechnungen ausgeführt wurden, wird der Bruch, falls möglich, gekürzt.

Folglich $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^3-x^2}=\dfrac{2}{x^2-1}$.

3 Die Multiplikation algebraischer Brüche:

Wenn A, B, P, Q algebraische Ausdrücke sind, $P \neq 0$, $Q \neq 0$, dann gilt: $\dfrac{A}{P}\cdot\dfrac{B}{Q}=\dfrac{A\cdot B}{P\cdot Q}$

Falls $P = 1$, ist: $A\cdot\dfrac{B}{Q}=\dfrac{A}{1}\cdot\dfrac{B}{Q}=\dfrac{A\cdot B}{Q}$.

Berechnet: **a)** $\dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot\dfrac{x}{5x-5}$; **b)** $\dfrac{3x^2+1}{2x^3-3x}\cdot(2x^2-3)$.

Lösung.

a) $\dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot\dfrac{x}{5x-5}=\dfrac{(x^2-1)\cdot x}{(x+2)(5x-5)}=\dfrac{(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}\cdot x}{(x+2)\cdot 5\cdot\cancel{(x-1)}}=\dfrac{(x+1)\cdot x}{(x+2)\cdot 5}=\dfrac{x^2+x}{5x+10}$.

b) $\dfrac{3x^2+1}{2x^3-3x}\cdot(2x^2-3)=\dfrac{3x^2+1}{x\,\cancel{(2x^2-3)}}\cdot\dfrac{\cancel{(2x^2-3)}}{1}=\dfrac{3x^2+1}{x}$.

Bemerkung. Wie auch bei der Multiplikation reeller Zahlen können gemeinsame Faktoren von einem Zähler und einem Nenner der Brüche, die man multiplizieren muss, gekürzt werden.

4 Die Potenz eines algebraischen Bruchs

Wenn n eine natürliche Zahl ist, $n \geq 1$, und A, P algebraische Ausdrücke sind, $P \neq 0$, dann gilt:

$$\left(\frac{A}{P}\right)^1=\frac{A}{P} \text{ und } \left(\frac{A}{P}\right)^n=\underbrace{\frac{A}{P}\cdots\frac{A}{P}}_{n\ \textit{Faktoren},\, n\geq 2}=\frac{A^n}{P^n}$$

Falls $A \neq 0$ ist:

$$\left(\frac{A}{P}\right)^{-n}=\left(\frac{P}{A}\right)^n \text{ und } \left(\frac{A}{P}\right)^0=1.$$

Berechnet: $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$.

Lösung: a) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^3}$

$=\dfrac{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)}=\dfrac{(x-1)^2\cdot(x-1)}{(x+1)^2\cdot(x+1)}$

$=\dfrac{(x-1)^2\cdot(x-1)}{(x+1)^2\cdot(x+1)}=\dfrac{(x^2-2x+1)\cdot(x-1)}{(x^2+2x+1)\cdot(x+1)}$

$=\dfrac{x^3-x^2-2x^2+2x+x-1}{x^3+x^2+2x^2+2x+x+1}=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3+3x^2+3x+1}$.

5 Die Division algebraischer Brüche

Wenn P, Q, R, S algebraische Ausdrücke sind, $Q \neq 0$, $R \neq 0$, $S \neq 0$ dann gilt:

Der Kehrwert des Bruches $\dfrac{R}{S}$ ist der Bruch $\dfrac{S}{R}$.

Den Bruch $\dfrac{P}{Q}$ durch den Bruch $\dfrac{R}{S}$ zu teilen, bedeutet, den ersten Bruch mit dem *Kehrwert des zweiten zu multiplizieren* $\dfrac{P}{Q}:\dfrac{R}{S}=\dfrac{P}{Q}\cdot\dfrac{S}{R}$.

Berechnet: $\dfrac{x^2-16}{x^2}:\dfrac{x-4}{3x}$.

Lösung: $\dfrac{x^2-16}{x^2}:\dfrac{x-4}{3x}=\dfrac{x^2-16}{x^2}\cdot\dfrac{3x}{x-4}=$

$=\dfrac{(x+4)\,\cancel{(x-4)}}{x^2}\cdot\dfrac{3x}{\cancel{x-4}}=\dfrac{3x(x+4)^{(x}}{x^2}=$

$=\dfrac{3(x+4)}{x}$.

Anwendungen

Die Reihenfolge der Operationen und der Klammern ist beim Rechnen mit algebraischen Brüchen dieselbe wie in der Menge der reellen Zahlen.

Anwendung: Gegeben ist der Ausdruck $E(x, y) = \frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $x \neq -y$.

a) Zeigt, dass $E(x, y) = \frac{x}{x-y}$, für alle reellen Zahlenpaare (x, y), wobei x verschieden ist von y und von $-y$.

b) Berechnet den Wert des Ausdrucks, wenn $x = 2$ und $y = \sqrt{2}$.

Lösung. **a)** $E(x, y) = \frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right) = \frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \cdot \left({}^{x+y)}\frac{x}{x-y} - {}^{x-y)}\frac{y}{x+y}\right) =$

$\frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x^2+xy}{(x-y)(x+y)} - \frac{xy-y^2}{(x-y)(x+y)}\right) = \frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+xy-(xy-y^2)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x(x+y)}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+xy-xy+y^2}{(x-y)(x+y)} =$

$\frac{x}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{(x-y)} = \frac{x}{x-y}$. $E(x, y) = \frac{x}{x-y}$, für alle reellen Zahlenpaare (x, y), $x \neq y$ und $x \neq -y$.

b) $E(2, \sqrt{2}) = \frac{2}{2-\sqrt{2}}$.

Anmerkung. Es wird empfohlen, den Nenner des Bruches zu rationalisieren, also

$E(2, \sqrt{2}) = {}^{2+\sqrt{2})}\frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{4-2} = 2+\sqrt{2}$.

Bemerkung. Man kann die Zahlenwerte der Variablen auch zu Beginn in den Ausdruck einsetzen und dann die Rechnungen ausführen. Der Wert des Ausdrucks wird am Ende derselbe sein.

Aufgaben

1 Berechnet:

a) $\frac{x}{5} + \frac{3x}{5}$; b) $\frac{x}{7} + \frac{3-x}{7}$;

c) $\frac{x+2}{x} + \frac{x-1}{x}$; d) $\frac{y}{4} - \frac{5y}{4}$;

e) $\frac{y}{y-2} - \frac{2}{y-2}$; f) $\frac{-2y}{y^2+4} - \frac{6-2y}{y^2+4}$.

2 Berechnet und kürzt das Ergebnis.

a) $\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1}$;

b) $\frac{ax+a}{a-b} - \frac{bx+b}{a-b}$;

c) $\frac{11x}{6x^2-xy} - \frac{7x}{6x^2-xy} - \frac{2x}{xy-6x^2}$.

3 **3.1.** Bringt auf den gemeinsamen Nenner:

a) $E(x) = \frac{3}{2x}$, $F(x) = \frac{1}{5x}$;

b) $E(x) = \frac{x+1}{3x}$, $F(x) = \frac{1}{6x^2}$;

c) $E(x) = \frac{1}{2x-1}$, $F(x) = \frac{1}{2x+1}$.

3.2. Berechnet $E(x) + F(x)$ und $E(x) - F(x)$ für a), b) und c).

4 Berechnet:

a) $\frac{-2}{x-2} + \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x^2-4x+4}$;

b) $\frac{x^2+2}{2x} - \frac{x^2}{2x+4} + \frac{4}{x^2+2x}$;

c) $\frac{x}{2-x} - \frac{2-x}{x} + \frac{4x-4}{(x-1)^2-1}$.

5 Gegeben ist der algebraische Ausdruck

$$E(x)=\frac{1}{2x-3}-\frac{1}{4x-6}+\frac{1}{12-8x}.$$

a) Bestimmt seinen Definitionsbereich.

b) Vereinfacht $E(x)$.

6 Berechnet die Potenzen:

a) $\left(\frac{x}{4}\right)^2$; **b)** $\left(-\frac{2}{y}\right)^3$; **c)** $\left(\frac{2ab}{13c}\right)^{-1}$;

d) $-\left(-\frac{x}{y}\right)^{-2}$; **e)** $\left(\frac{x-2}{2x}\right)^2$; **f)** $\left[\left(\frac{3a}{x+1}\right)^2\right]^3$.

7 Führt die Multiplikationen aus:

a) $\frac{5}{3}\cdot\frac{x}{y}$; **b)** $\frac{x}{10}\cdot\left(-\frac{3}{x}\right)$; **c)** $\frac{2y}{3x}\cdot\frac{6x}{7y}$;

d) $-\frac{x^2}{y}\cdot\frac{y^3}{x}$; **e)** $\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{3}{x+1}\cdot\frac{x+2}{-6}$.

f) $\frac{ax+ay}{x^2-4x}\cdot\frac{x-4}{x+y}$ **g)** $\frac{x^2-4}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{x^2+2x}$.

8 Führt die Divisionen aus:

a) $-\frac{x}{y}:\frac{4}{3}$; **b)** $\frac{6a^2b}{66c}:\frac{2a^3b^2}{11c^2}$;

c) $-\frac{x^2-1}{x}:\frac{x+1}{x^2}$; **d)** $\frac{x^3-9x}{2x}:\frac{x+3}{-3x}$.

9 Berechnet, beachtet die Reihenfolge der Operationen:

a) $\frac{x^2-1}{x^2+1}:\frac{4x-4}{3x^2}\cdot\frac{4}{x^2+x}$;

b) $\frac{x^2-1}{x^2+1}:\frac{3x-3}{4x^2}\cdot\frac{3}{x^2+x}$;

c) $\left(\frac{x}{4}\right)^{-1}:\left(x-\frac{x}{2}\right)^{-1}$; **d)** $\left(\frac{x}{6}\right)^{-2}:\left(x-\frac{x}{3}\right)^{-2}$.

10 Berechnet:

a) $\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)\cdot\frac{a^2}{a^2-9}+\frac{6-a}{3}$;

b) $\left(\frac{1}{a-1}-\frac{2}{a-2}\right)\cdot\frac{(a-3)^2-1}{a}$;

c) $\left[\frac{a}{a-1}+\frac{1}{a+1}+\frac{2}{a^2-1}-\frac{2a}{(a-1)(a+1)}\right]:\frac{a^3+a}{a^2-1}$;

d) $\left(a-\frac{4ab}{a+b}+b\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$.

11 Gegeben sind $A(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ und $B(x)=-\frac{x^2-1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$. Zeigt, dass:

a) $B(x) = 1 - x \cdot A(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$

b) $[A(x)]^2 + [B(x)]^2 = 1$, für alle $x \in \mathbb{R}$

12 Gegeben ist der Ausdruck

$$E(x)=\left(\frac{1+x}{2x}-\frac{1+2x}{5x}\right)\cdot\frac{10x}{x+3},$$

$x \in \mathbb{R}$, $x \neq -3$, $x \neq 0$.

Zeigt, dass $E(x) = 1$, für alle x, $x \neq -3$ und $x \neq 0$.

13 Gegeben ist der Ausdruck

$$E(x)=\left(\frac{x^2-x+4}{x^2-4}-\frac{x-2}{x+2}+\frac{1}{x-2}\right)\cdot\frac{x^2+2x-8}{4x+2},$$

$x \in \mathbb{R} - \{-2, -\frac{1}{2}, 2\}$.

a) Zerlegt $x^2 + 2x - 8$ in Faktoren.

b) Zeigt, dass $E(x)=\frac{x+4}{x+2}$.

14 Gegeben ist der Ausdruck

$$E(x)=\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}-\frac{1-x^2}{1+x^2}\right):\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right).$$

a) Bestimmt die Menge D, den Definitionsbereich von $E(x)$.

b) Vereinfacht den Ausdruck.

c) Zeigt, dass $E(x) < \frac{1}{2}$, für alle $x \in D$.

15 Gegeben ist der Ausdruck

$$F(x)=\left(\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+x}-\frac{x+1}{x^2-x}+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^2-1}{2x^2-x-3}.$$

a) Bestimmt M, die Menge der reellen Zahlen x, für die $F(x)$ definiert ist.

b) Vereinfacht den Ausdruck.

c) Zeigt, dass $F(a)$ für keinen Wert $a \in M \cap \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl sein kann.

16 Gegeben ist der Ausdruck

$$E(x)=\left(\frac{5}{2x+3}+\frac{2}{3-2x}+\frac{2x+9}{4x^2-9}\right):\frac{8}{4x^2+12x+9},$$

$x \in \mathbb{Z}$.

a) Vereinfacht den Ausdruck.

b) Zeigt, dass die Zahl

$1 + 2 \cdot [E(0) + E(1) + ... + E(18)]$

ein vollständiges Quadrat ist.

5 Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$

L1. Die Gleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten

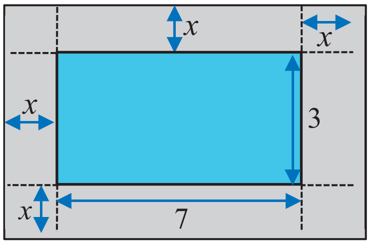
Wir erinnern uns!

Die Lösungen der Gleichung $x^2 = a$, wobei $a \in \mathbb{R}$, hängen von a ab: 1) $a > 0$; 2) $a = 0$; 3) $a < 0$.

1) Falls $a > 0$, ist die Gleichung $x^2 = a$ äquivalent mit $|x| = \sqrt{a}$. Die Gleichung gilt genau dann, wenn $x = \sqrt{a}$ oder $x = -\sqrt{a}$. Man sagt, $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$ sind die reellen Lösungen der Gleichung.
   Die Lösungsmenge der Gleichung ist $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$.
   Beispiel: $x^2 = 15 \Rightarrow x_1 = \sqrt{15}$ und $x_2 = -\sqrt{15}$, also $S = \{-\sqrt{15}, \sqrt{15}\}$
2) Die Gleichung $x^2 = 0$ hat nur die Lösung $x = 0$, also ist $S = \{0\}$.
3) Falls $a < 0$, hat die Gleichung $x^2 = a$ keine reelle Lösung. Da $x^2 \geq 0$ und $a < 0$, gilt $x^2 \neq a$, für alle reellen Zahlen x. Die Lösungsmenge der Gleichung ist $S = \varnothing$.
   Beispiel: Die Gleichung $x^2 = -16$ hat keine reelle Lösung, $S = \varnothing$.

Wir lösen und stellen fest

1. Aufgabe Das abgebildete rechteckige Schwimmbecken ist 7 m lang und 3 m breit. Ringsumher verläuft ein x Meter breiter Weg (siehe rechts). $\mathcal{A}(x)$ ist der Flächeninhalt des Grundstückes, das von Weg und Schwimmbecken eingenommen wird (in Quadratmeter ausgedrückt).



a) Berechnet $\mathcal{A}(x)$ auf zwei Arten und schlussfolgert, dass
$(2x + 3)(2x + 7) = 4x^2 + 20x + 21$.
b) Beweist die obige Gleichung durch algebraisches Rechnen.
c) Wenn die gesamte Fläche 77 m² ist, berechnet die Breite des Weges.

Lösung.

a) Die gesamte Fläche ist rechteckig und hat eine Breite von $(2x + 3)$ m und eine Länge von $(2x + 7)$ m.
Dann ist $\mathcal{A}(x) = (2x + 3)(2x + 7)$.
Andererseits kann die gesamte Fläche als Vereinigung von vier quadratischen und fünf rechteckigen Flächen betrachtet werden. So gesehen ist der gesamte Flächeninhalt die Summe der neun Flächeninhalte.
$\mathcal{A}(x) = 4 \cdot x^2 + 2 \cdot 7x + 2 \cdot 3x + 21 = 4x^2 + 20x + 21$.
Also gilt $A(x) = 4x^2 + 20x + 21 = (2x + 3)(2x + 7)$.

b) $(2x + 3)(2x + 7) = 2x \cdot 2x + 2x \cdot 7 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 7 = 4x^2 + 14x + 6x + 21 = 4x^2 + 20x + 21$, also gilt die Gleichung.

c) Um die Breite des Weges zu berechnen, müssen wir folgende Aufgabe lösen: „Bestimmt x, wenn $A(x) = 77$."
Aus $A(x) = 77$ folgt $4x^2 + 20x - 56 = 0$. Und wir müssen nun in der Menge der reellen positiven Zahlen die Gleichung $4x^2 + 20x - 56 = 0$ lösen.
Die Lösung der Gleichung: $4x^2 + 20x - 56 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ oder $x = -7$.
Weil x die Breite des Weges ist, muss $x > 0$. Da $2 > 0$ und $-7 < 0$, folgt $x = 2$ m.

Wir verstehen anhand von Beispielen

Definition. Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$, wobei a, b und c gegebene reelle Zahlen sind, $a \neq 0$, heißt *Gleichung zweiten Grades mit der Unbekannten* x. a, b und c sind die *Koeffizienten der Gleichung*.

Die Gleichung	Die Koeffizienten
$x^2 - \sqrt{3}x + \frac{5}{2} = 0$	$a = 1,\ b = -\sqrt{3},\ c = \frac{5}{2}$.
$x^2 + 2x = 0$	$a = 1,\ b = 2,\ c = 0$.
$-2x^2 - 7 = 0$	$a = -2,\ b = 0,\ c = -7$.

Eine reelle Zahl, die statt der Unbekannten x in die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ eingesetzt wird und diese erfüllt, heißt *Lösung* der Gleichung.

Die Menge der reellen Werte der Unbekannten x, die die Gleichung erfüllen, heißt *Lösungsmenge der Gleichung*, sie wird oft mit S bezeichnet.

Eine Gleichung lösen bedeutet, ihre Lösungsmenge finden.

Beispiel: Für die Gleichung $x^2 + 3x = 0$ und die reelle Zahl -3 gilt $(-3)^2 + 3(-3) = 0$, also ist -3 *eine Lösung* der Gleichung $x^2 + 3x = 0$.

Beispiel: Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + 3x = 0$ ist $S = \{-3, 0\}$(der Beweis ist weiter unten zu finden).

Beispiel: (Lösen der Gleichung $x^2 + 3x = 0$):
$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x + 3 = 0$, also $x = 0$ oder $x = -3$. Folglich ist $S = \{-3, 0\}$.

Die Bedingung $a \neq 0$ in der Definition der Gleichung zweiten Grades $ax^2 + bx + c = 0$ ist wichtig. Die anderen Koeffizienten können beliebige reelle Zahlen sein. Wenn mindestens ein Koeffizient null ist, gibt es folgende Sonderfälle:

1) Falls $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b = 0$, entsteht die Gleichung $ax^2 + c = 0$.
2) Falls $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $c = 0$, entsteht die Gleichung $ax^2 + bx = 0$.

die Unbekannte

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,\ a \neq 0$$

der Koeffizient von x^2 — der Koeffizient von x — das freie Glied

1 Lösen der Gleichung $ax^2 + c = 0$ ($a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)

$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$.

Falls $-\frac{c}{a} < 0$, gibt es keine Lösung, da $x^2 \geq 0$.

Falls $-\frac{c}{a} \geq 0$, ist $x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-\frac{c}{a}} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, also

$x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ oder $x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Folglich $S = \left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}},\ \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$.

Beispiele:
1) $3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 | : 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow |x| = 2$ und $S = \{-2, 2\}$.
2) $-2x^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = -32 | : (-2)$
$\Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow |x| = 4$ und $S = \{-4, 4\}$.
3) $2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -4 | : 2 \Leftrightarrow x^2 = -2$.
Weil $-2 < 0$, ist $S = \varnothing$.

2 Lösen der Gleichung $ax^2 + bx = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)

Wir klammern den gemeinsamen Faktor aus.
$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x \cdot (ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $ax + b = 0$.

Folglich $S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.

Beispiele:
1) $4x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x - 2 = 0$. Folglich $S = \{0, 2\}$.
2) $-\sqrt{2}\,x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\,x(x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x - \sqrt{2} = 0$. Folglich $S = \{0, \sqrt{2}\}$.

3 Lösen der Gleichung $ax^2+bx+c=0$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

Wir teilen jeden Term der Gleichung durch a und schreiben die äquivalente Gleichung:

$$ax^2+bx+c=0 \;\Big|\cdot \frac{1}{a}$$

$$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Dann schreiben wir $x^2+\dfrac{bx}{a}$ als Differenz von Quadraten

$$x^2+\frac{bx}{a}=x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

und schreiben die äquivalente Gleichung:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Wir berechnen $-\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{c}{a}$, ersetzen das Ergebnis

$$-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Wir bezeichnen $b^2-4ac=\Delta$.

in **(2)** und erhalten die äquivalente Gleichung.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \qquad \textbf{(3)}$$

$\Delta=b^2-4ac$ heißt *Diskriminante der Gleichung* $ax^2+bx+c=0$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.
Die Gleichung (3) und die drei möglichen Fälle für $\Delta<0$, $\Delta=0$, $\Delta>0$ führen zu der Lösungsmenge der Gleichung $ax^2+bx+c=0$.

Fälle	Schlussfolgerungen aus Gleichung (3)	Die Lösungen der Gleichung
$\Delta<0$	$-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0 \Rightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$	Die Gleichung hat keine Lösungen in $\mathbb{R}$, also $S=\varnothing$
$\Delta=0$	$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)=0$	Die Gleichung hat zwei gleiche reelle Lösungen $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$
$\Delta>0$	$\dfrac{\Delta}{4a^2}=\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \Rightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$ $\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$	Die Gleichung hat zwei verschiedene reelle Lösungen. $x_1=-\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ und $x_2=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Bemerkung. Falls $\Delta>0$, sagt man, dass die Lösungen der Gleichung $x^2+bx+c=0$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ mithilfe der Formel $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ berechnet werden.

Anwendungen

1 Löst die Gleichungen:

a) $x^2-x+1=0$
$a=1,\quad b=-1,\quad c=1$
$\Delta=b^2-4ac=$
$=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3$
$\Delta<0$
Also $S=\varnothing$.

b) $4x^2+4x+1=0$
$a=4,\quad b=4,\quad c=1$
$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot4\cdot1=0$
$\Delta=0$ und $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.
Also $x_1=x_2=-\dfrac{1}{2}$ und $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

c) $x^2-5x+6=0$
$a=1,\quad b=-5,\quad c=6$
$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1$
$\Delta>0$ und $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Also $x_1=3$, $x_2=2$ und $S=\{2, 3\}$.

1. Anwendung Zerlegt den algebraischen Ausdruck $E(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$), falls möglich, in Faktoren.

Lösung. Wir klammern a aus und erhalten $E(x) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$.

Mit $b^2 - 4ac = \Delta$ wird $E(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right]$.

Falls $\Delta > 0$, ist $E(x) = a(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}) = a(x - x_1)(x - x_2)$, wobei x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind. (d. h. $E(x) = 0$, *die Gleichung, die dem algebraischen Ausdruck* $E(x)$ zugeordnet wird.)

Falls $\Delta = 0$, ist $E(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Falls $\Delta < 0$, kann $E(x)$ nicht in Faktoren mit reellen Koeffizienten zerlegt werden. Man sagt, $E(x)$ ist *nicht zerlegbar über* $\mathbb{R}$.

2 Zerlegt die Ausdrücke in Faktoren:

a) $E(x) = x^2 + x + 1$
$x^2 + x + 1 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$
Die Gleichung $E(x) = 0$ hat keine reellen Lösungen. Dann ist $E(x) = x^2 + x + 1$ *nicht zerlegbar* über $\mathbb{R}$.

b) $E(x) = 4x^2 + 12x + 9$
$4x^2 + 12x + 9 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$
Die Gleichung $E(x) = 0$ hat zwei gleiche Lösungen $x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}$
und $E(x) = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = (2x + 3)^2$.

c) $E(x) = 6x^2 - 7x + 2$
$6x^2 - 7x + 2 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 1 > 0$.
Die Gleichung $E(x) = 0$ hat zwei verschiedene Lösungen: $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{2}{3}$. $E(x) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) =$
$= (2x - 1)(3x - 2)$.

Oft sind Gleichungen nicht in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ gegeben, aber damit äquivalent. Man sagt dann, die Gleichung sei auf eine Gleichung zweiten Grades zurückführbar.

Damit wir eine solche Gleichung mit der Formel lösen können, müssen wir sie umformen. Die äquivalente Gleichung wird auf dem gemeinsamen Definitionsbereich dieselben Lösungen haben.

2. Anwendung Löst die Gleichung $\frac{3}{x} + x + 4 = 0$.

Schritt 1. Die Gleichung wird in der Form $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, geschrieben

Schritt 2. Man verwendet die Formel.

Schritt 3. Man schreibt die Lösungsmenge, beachtet dabei den Definitionsbereich.

Lösung.
$\frac{3}{x} + x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$ und $x \neq 0$;
$a = 1,\ b = 4,\ c = 3$.
$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0$. Die reellen Lösungen sind
$x_1 = \frac{-4-2}{2} = -3$ und $x_2 = \frac{-4+2}{2} = -1$.

Beide erhaltenen Lösungen erfüllen die Bedingung $x \neq 0$, also $S = \{-3, -1\}$.

Aufgaben

1 Ergänzt in eurem Heft die Tabelle mit den Koeffizienten der Gleichungen.

$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$-3x^2 - 5x + 0{,}4 = 0$			
$\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{3} = 0$			
$4x^2 - 8x = 0$			
$-\sqrt{3}\,x^2 + 4 = 0$			
$4x^2 = 0$			

2 Löst die Gleichungen:
a) $3x^2 = 12$; **b)** $2x^2 - 6 = 0$;
c) $-x^2 + 5 = 0$; **d)** $x^2 + 4 = 0$.

3 Löst die Gleichungen:
a) $x^2 - 6x = 0$; **b)** $2x^2 + x = 0$;
c) $-6x^2 + 4x = 0$; **d)** $-3x^2 = 0$.

4 Löst die Gleichungen:
a) $3x^2 - 48 = 0$; **b)** $-\sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{50} = 0$;
c) $16t^2 + 1 = 0$; **d)** $16(1 - t)^2 - 1 = 0$;
e) $-16(1 - t)^2 - 25 = 0$; **f)** $32 - 2(4x + 3)^2 = 0$.

5 Löst die Gleichungen:
a) $-\sqrt{3}\,x^2 + \sqrt{27}\,x = 0$; **b)** $x^2 - 4x = 0$;
c) $3t^2 + 6t = 0$; **d)** $(1 - x)^2 - 4(1 - x) = 0$;
e) $2(t - 2)^2 - t + 2 = 0$; **f)** $-2x + 3 - 2(2x - 3)^2 = 0$.

6 Stellt fest, welche Gleichungen reelle Lösungen haben: **a)** $3x^2 + 5x + 4 = 0$;
b) $2x^2 + 7x + 5 = 0$; **c)** $9x^2 - 5x - 2 = 0$.

7 Löst die Gleichungen zweiten Grades in der Menge der reellen Zahlen:
a) $2x^2 + 9x + 10 = 0$; **b)** $x^2 - 5x + 4 = 0$;
c) $2x^2 + x\sqrt{7} - 7 = 0$; **d)** $-3x^2 - x + 2 = 0$;
e) $x^2\sqrt{10} - 7x + \sqrt{10} = 0$; **f)** $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$.

8 Schreibt die Gleichungen in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ und löst sie:
a) $x(x + 3) = 4$;
b) $(2x - 1)(-x + 3) = -7$;
c) $(x - 3)^2 = 2(x + 1)$;
d) $(3x + 1)^2 = (-x + 3)^2$;
e) $-2x(x + 3) = 6 + x$;
f) $(5x + \sqrt{7})(\sqrt{7} - 5x) = -24x^2$.

9 Zerlegt $E(x)$ in Faktoren:
a) $E(x) = x^2 - x + 3$;
b) $E(x) = 4x^2 + 20x + 25$;
c) $E(x) = 6x^2 - 11x - 10$.

L2. Aufgaben, die mithilfe von Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, gelöst werden

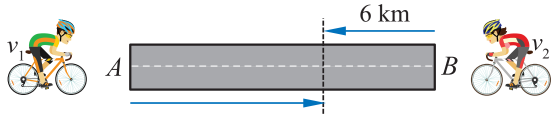
Dank mathematischer Modelle kann man die reale Umwelt besser verstehen. Man löst die mathematischen Probleme und deutet die erhaltenen Lösungen. Die Gleichung zweiten Grades ist dabei unverzichtbar.

Wir lösen und stellen fest

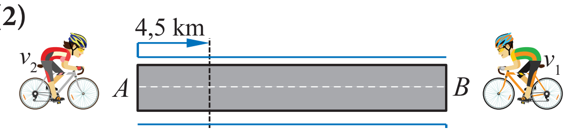
1. Aufgabe Aus zwei Ortschaften A und B fahren zwei Radfahrer gleichzeitig los. Sie fahren mit konstanten,
FU aber unterschiedlichen Geschwindigkeiten hin und zurück.

Wir bezeichnen mit x die Distanz zwischen den zwei Ortschaften, mit d_{11} bzw. d_{21} die Weglängen, die der erste bzw. der zweite Radfahrer bis zum ersten Treffen zurückgelegt haben, und mit d_{12} bzw. d_{22} die Weglängen bis zum zweiten Treffen.
Das erste Treffen findet 6 km von der Ortschaft B entfernt statt. Auf dem Rückweg treffen sie sich 4,5 km von A entfernt.
a) Zeigt, dass d_{11} und d_{12} direkt proportional mit d_{21} und d_{22} sind.
b) Berechnet die Distanz zwischen den zwei Ortschaften.

(1)



(2)



Lösung.

a) Wir bezeichnen mit v_1 bzw. v_2 die Geschwindigkeiten der zwei Radfahrer und mit t_1 bzw. t_2 die Zeit bis zu ihrem ersten bzw. zum zweiten Treffen.

Es gelten $v_1 = \dfrac{d_{11}}{t_1} = \dfrac{d_{12}}{t_2}$ und $v_2 = \dfrac{d_{21}}{t_1} = \dfrac{d_{22}}{t_2}$, also $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{d_{11}}{d_{21}} = \dfrac{d_{12}}{d_{22}}$.

Daraus folgt, dass d_{11} und d_{12} direkt proportional zu d_{21} und d_{22} sind.

b) Schema **(1)** beschreibt die Situation bis zum ersten Treffen. Daraus folgt, dass $d_{11} = x - 6$ und $d_{21} = 6$. Aus Schema **(2)**, das die Situation bis zum zweiten Treffen beschreibt, folgt $d_{12} = 2x - 4{,}5$ und $d_{22} = x + 4{,}5$.

Laut **a)** erhalten wir die Gleichung $\dfrac{x-6}{6} = \dfrac{2x-4{,}5}{x+4{,}5}$, die auf die Gleichung zweiten Grades $x^2 - 13{,}5x = 0$ zurückführbar ist. Die Lösungen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 13{,}5$. Dann ist $AB = 13{,}5$ km ($x = 0$ kommt nicht infrage).

2. Aufgabe Der Punkt C teilt die Strecke AB *im Verhältnis* $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{13}{8}$ (siehe Zeichnung nebenan).

a) Identifiziert das Verhältnis $\dfrac{AB}{AC}$ auf der Zeichnung.

b) Approximiert die entsprechenden Dezimalzahlen auf Hundertstel und entscheidet, ob die beiden Werte nahe aneinander sind.

c) Falls $AB = x$ und $AC = 1$, bestimmt x, sodass $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AB}{AC}$.

d) Berechnet x^2, $x + 1$, $x - 1$ und $\dfrac{1}{x}$.

e) Approximiert x durch einen Dezimalbruch.

AB wird als Ganzes in 21 gleiche Teile geteilt.
Der Punkt C teilt das Ganze in zwei Teile.
AC ist *der größere* Teil, BC ist der *kleinere Teil*

Lösung.

a) $AB = 21$ *ME*, $BC = 8$ *ME*, $AC = 13$ *ME* und $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{21}{13}$

b) $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{13}{8} = 1{,}625$ und $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{21}{13} = 1{,}61\ldots$.

Die beiden Verhältnisse sind fast gleich.

c) Aus $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AB}{AC}$ folgt $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x}{1}$ und die Gleichung

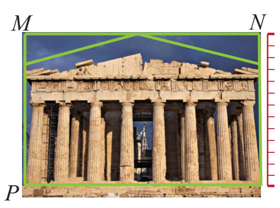
$x^2 - x - 1 = 0$, mit den Lösungen $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ und

$x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Da $x > 0$, gilt $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

d) $x^2 = x + 1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{1}{x} = x - 1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

e) $x = 1{,}618033988749\ldots$

Der Parthenon in Athen
(477–432 v. u. Z.)
$\dfrac{MN}{MP} = \dfrac{21}{13} = 1{,}61\ldots$



Die goldene Zahl.
Mathematiker bezeichnen sie mit φ (Phi), nach dem Architekten Phidias (490 – 431 v. u. Z.), der dieses Verhältnis beim Bau des Parthenon in Athen verwendete.

Anwendungen

Anwendung: $ABCD$ ist ein Rechteck, $AB = 1$ dm, $BC = 3$ dm und die Punkte M, N liegen auf den Seiten BC bzw. CD, sodass $BM - CN = \frac{3}{2}$ dm. Bestimmt die Lage der Punkte M und N, sodass der Flächeninhalt des Dreiecks AMN ein Drittel des Flächeninhalts des Rechtecks ist.

Schritt 1. Wir bezeichnen die Länge einer der Strecken BM oder CN mit einer Unbekannten. Z. B. sei $CN = x$.

Schritt 2. $BM = x + \frac{3}{2}$, $DN = 1 - x$, $CM = \frac{3}{2} - x$.

$\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot BC = 3\ \text{dm}^2$, $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{AMN} + \mathcal{A}_{ABM} + \mathcal{A}_{CMN} + \mathcal{A}_{ADN}$ und $\mathcal{A}_{AMN} = 3 - (\mathcal{A}_{ABM} + \mathcal{A}_{CMN} + \mathcal{A}_{ADN})$.

Andererseits ist $\mathcal{A}_{AMN} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$, also $\mathcal{A}_{ABM} + \mathcal{A}_{CMN} + \mathcal{A}_{ADN} = 2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - x\right) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (1 - x) = 2$, die äquivalent ist mit der Gleichung zweiten Grades $2x^2 + x - 1 = 0$.

Schritt 3. $2x^2 + x - 1 = 0$, $\Delta = 1 + 8 = 9$ und $x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$, $x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$.

Die Lösungen dieser Gleichung sind -1 und $\frac{1}{2}$.

Schritt 4. Da $CD = 1$ dm und N auf DC liegt, muss $0 \le x \le 1$. Es gilt nur die Lösung $x = \frac{1}{2}$.

$CN = \frac{1}{2}$ dm, also ist N die Mitte der Strecke CD und M liegt auf BC, sodass $BM = 2$ dm.

Aufgaben

1 Berechnet den Flächeninhalt und den Umfang des rechtwinkligen Dreiecks, wenn die Hypotenuse 10 cm lang ist und eine Kathete um 2 cm kürzer als die andere ist.

2 Bestimmt die reelle positive Zahl, die um 6 größer als ihr Kehrwert ist.

3 **a)** Die Summe einer reellen Zahl und ihres Kehrwerts ist 2. Bestimmt die Zahl.
b) Beweist, dass die Summe einer positiven reellen Zahl und ihres Kehrwertes mindestens 2 ist.
c) Beweist, dass die Summe einer negativen reellen Zahl und ihres Kehrwertes höchstens –2 ist.

4 Berechnet die Diagonale eines Rechtecks mit dem Umfang 34 m und dem Flächeninhalt 60 m².

5 Das arithmetische Mittel der Zahlen $a^2 + 11$, $2ab$ und $b^2 - 8$ ist 1. Berechnet das Verhältnis der Zahlen a und b.

6 Stellt auf zwei Arten fest, ob es aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, deren Produkt 136 ist.

7 Ein konvexes Vieleck hat 90 Diagonalen. Bestimmt die Anzahl seiner Seiten.

8 **a)** Schreibt eine Gleichung zweiten Grades mit den Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$.
b) Schreibt eine Gleichung zweiten Grades mit den Lösungen $x_1 = a$ und $x_2 = b$, wobei a und b gegebene reelle Zahlen sind.
c) Die Summe zweier Zahlen ist 7 und ihr Produkt 12. Schreibt die Gleichung zweiten Grades, deren Lösungen die zwei Zahlen sind.
d) Die Summe der Zahlen a und b ist s und ihr Produkt ist p. Schreibt mithilfe von s und p die Gleichung mit den Lösungen a und b.

9 Findet die zwei reellen Zahlen, deren geometrisches Mittel 40 und deren harmonisches Mittel 32 ist.

10 Findet die reelle Zahl x, wenn die Differenz zwischen ihr und ihrem Quadrat maximal ist.

11 x ist eine reelle Zahl, x^7 und x^3 sind rationale Zahlen. Zeigt, dass x eine rationale Zahl ist.

SELBSTBEWERTUNGSTEST *Von Amts wegen: 10 Punkte*

1. Teil. *Wählt den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht, aus. Nur eine Antwort ist richtig.*

5P **1.** Die Zahl $a = \dfrac{5}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ ist:

A. 0 B. 1 C. 5 D. − 5

5P **2.** Wenn $a = -3\sqrt{5}$ und $b = \sqrt{180}$, dann ist $a^2 - \sqrt{5}\cdot b$:

A. 10 B. 15 C. 20 D. 30

5P **3.** Das Ergebnis der Rechnung $2a \cdot 3bc + 3b \cdot (-4ac) - 4c \cdot (-2ab)$ ist:

A. abc B. $-2abc$ C. $-abc$ D. $2abc$

5P **4.** Das Ergebnis der Rechnung $(a + b)^2 - (b - 2a)^2 + (2a - 3b)(2a + 3b)$ ist:

A. $a^2 + 6ab - 9b^2$ B. $a^2 - 6ab - 9b^2$ C. $a^2 + 6ab + 9b^2$ D. $a^2 - 6ab + 9b^2$

5P **5.** Nach Kürzen des Bruches $\dfrac{\left(2a^2b^2\right)^2}{a^3b^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, erhält man:

A. $4a^2b^2$ B. $4a^2b$ C. $4ab^2$ D. $4ab$

5P **6.** Der Wert des Bruches $F(x, y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ ist für $x = -1$, $y = 3$, gleich:

A. 0,25 B. 0,5 C. 0,2 D. 0,52

5P **7.** Nach Erweitern des Bruches $\dfrac{x+2}{1+x}$ mit $1 - x$ erhält man $\dfrac{ax^2+bx+c}{1+dx^2}$. $a + b + c + d$ ist:

A. 2 B. −1 C. −2 D. 1

5P **8.** Falls $x = -\sqrt{2}$ eine Lösung der Gleichung $x^2 - 2\sqrt{2}x + m = 0$ ist, dann ist m gleich:

A. $-\sqrt{2}$ B. 4 C. − 6 D. $\sqrt{2}$

2. Teil. *Schreibt die vollständigen Lösungen*

5P **1. a)** Löst die Gleichung in $\mathbb{R}$: $x^2 - 4x + 4 = 0$.

10P **b)** Bestimmt $x, y \in \mathbb{R}$, sodass $x^2 - 4x + 4y^2 + 12y + 13 = 0$.

2. Gegeben ist der Bruch $F(a, b) = \dfrac{a^2 + b\cdot(2a+b)}{a^2 + a + b\cdot(2a+b+1)}$, $a \neq -b$, $a \neq -b - 1$.

10P **a)** Kürzt den Bruch $F(a, b)$.

5P **b)** Berechnet den Wert von F, wenn das arithmetische Mittel der Zahlen a und b $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ ist.

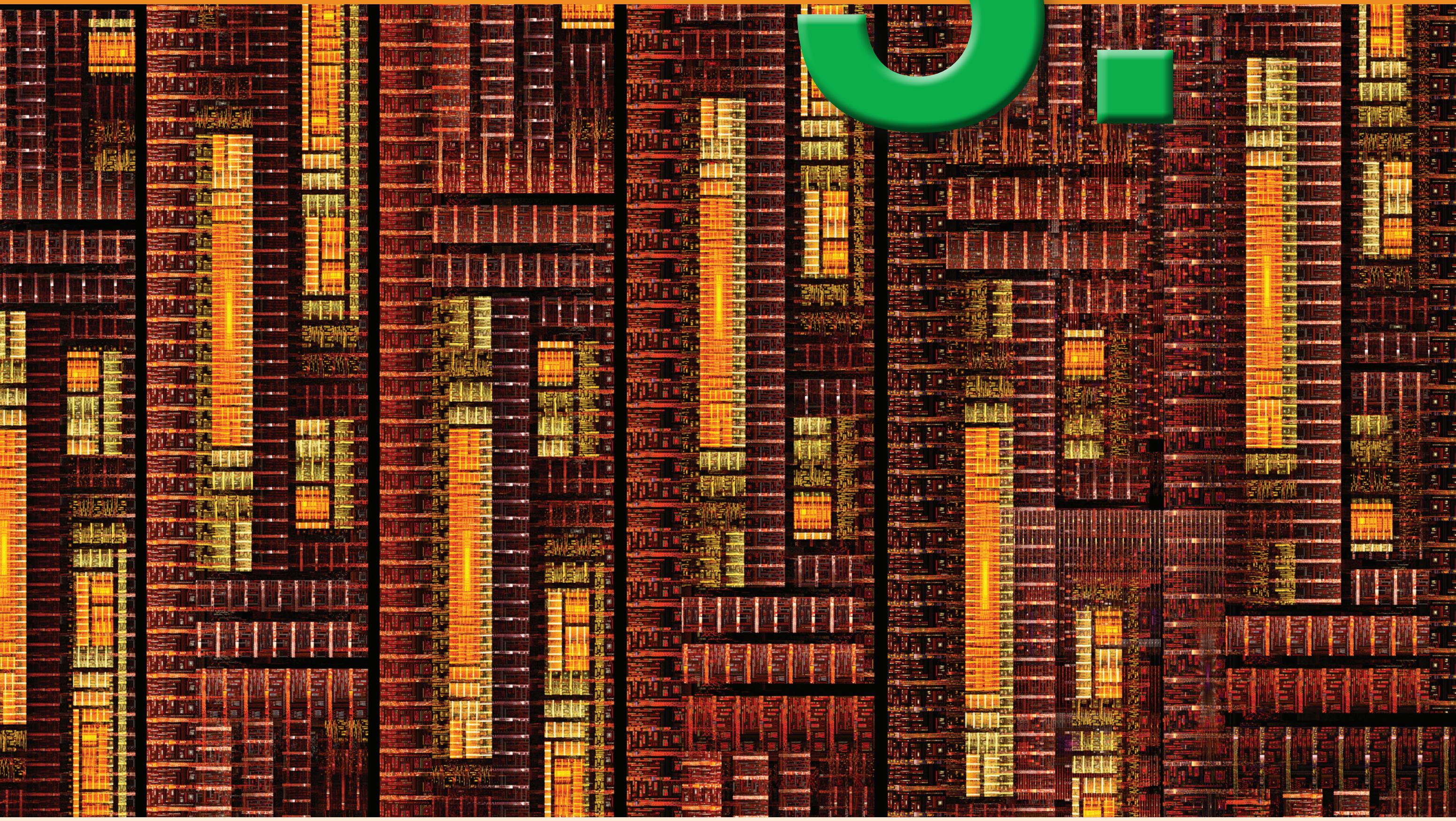
3. Gegeben ist der Ausdruck $E(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}+1\right) : \left(1 - \dfrac{3x^2}{1-x^2}\right)$, $x \in \mathbb{R} - \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

5P **a)** Zeigt, dass: $-\dfrac{3x^2}{1-x^2} = \dfrac{3x^2}{x^2-1}$, $x \neq -1$, $x \neq 1$.

10P **b)** Zeigt, dass $E(x) = \dfrac{x-1}{2x-1}$, für alle $x \in \mathbb{R} - \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

5P **c)** Bestimmt die ganzen Zahlen n, für die $2\cdot E(n)$ eine ganze Zahl ist.

3. KAPITEL



Funktionen

1 **Funktionen, die auf endlichen Mengen definiert sind. Der Graf einer Funktion. Geometrische Darstellung der Grafen einiger numerischer Funktionen**

2 **Funktionen der Form $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Die geometrische Deutung. Grafen lesen**

3 **Elemente der Statistik**

Spezifische Kompetenzen

1.3 2.3 3.3 4.3 5.3 6.3

1 Funktionen, die auf endlichen Mengen definiert sind. Der Graf einer Funktion. Die geometrische Darstellung der Grafen einiger numerischer Funktionen

L1. Der Begriff Funktion. Möglichkeiten, eine Funktion zu definieren

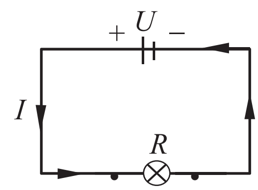
Sowohl im Alltag als auch in wissenschaftlichen Bereichen (Mathematik, Physik, Ökonomie, Soziologie usw.) wird die *Abhängigkeit einer Größe von einer oder mehreren unabhängigen variablen Größen* mithilfe einer Formel ausgedrückt. Diese wird *funktionale Abhängigkeit* dieser Größen genannt.

Beispiele:

1. Der Kehrwert einer von null verschiedenen Zahl hängt funktional von der betreffenden Zahl ab. Falls x die Zahl und y ihr Kehrwert ist, dann drückt man die funktionale Abhängigkeit zwischen x und y mithilfe der Formel $xy = 1$ aus.

   Jede der zwei Zahlen kann in Funktion der anderen ausgedrückt werden: $x = \frac{1}{y}$, $y = \frac{1}{x}$.

2. Zwischen den Größen I, U und R, der Intensität des elektrischen Stroms in einem Stromkreis, in Ampere ausgedrückt, der Spannung, in Volt ausgedrückt, und dem elektrischen Widerstand, in Ohm ausgedrückt, gibt es eine funktionale Abhängigkeit mit der Formel $R = \frac{U}{I}$, das *Gesetz von Ohm*.



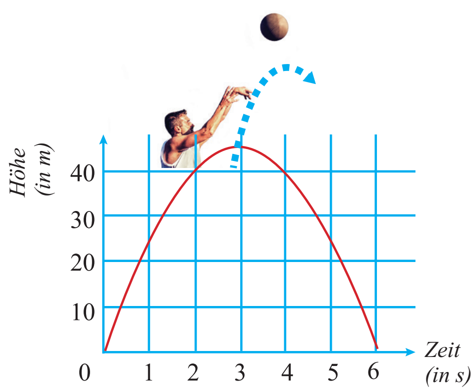
Wir lösen und stellen fest

Aufgabe 1. Ein Ball wird nach oben geworfen. Nach 6 Sekunden berührt er wieder den Boden. Ein Gerät erfasst im Sekundentempo die Höhe des Balls zum Zeitpunkt t, diese wird mit $h(t)$ bezeichnet.

FU

Ein Forscher stellt zwei Listen auf:
- eine Liste A, in der die Zeit von Sekunde zu Sekunde aufgezeichnet wird, von dem Moment 0 des Abwurfes bis zu dem Moment, in dem der Ball den Boden wieder berührt;
- eine Liste B, in der die Höhe des Balls nach t Sekunden aufgezeichnet wird, die er mit $h(t)$ bezeichnet.

Der Forscher erkennt, dass die Abhängigkeit der Höhe h von der Zeit t mithilfe des algebraischen Ausdrucks $h(t) = -5t^2 + 30t$ geschrieben werden kann. Danach stellt er die Paare $(t, h(t))$ grafisch dar.

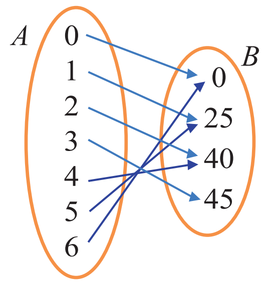


Schreibt die Listen A und B als Zahlenmengen.

a) Die Zeit von Sekunde zu Sekunde ist die Menge $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die Höhe des Balls zum Zeitpunkt t ist $h(t) = -5t^2 + 30t$. Das heißt, im Moment 0 ist $h(0) = 0$ (Meter), nach einer Sekunde beträgt die Höhe $h(1) = 25$ (Meter) und so weiter. Man erhält die Menge $B = \{0, 25, 40, 45\}$.

b) Zeichnet eine Tabelle mit zwei Zeilen: tragt in die erste Zeile die Werte der Variablen t ein und in die zweite Zeile die Höhe des Balls $h(t)$ zum Zeitpunkt t.

t	0	1	2	3	4	5	6
$h(t)$	0	25	40	45	40	25	0

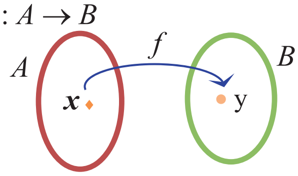


c) Stellt in einem Diagramm die Mengen A und B dar und ordnet jedem Element aus A das entsprechende Element aus B zu.

Wir verstehen anhand von Beispielen

Definition. Gegeben sind die nicht leeren Mengen A und B. Eine *Funktion f definiert auf der Menge A* mit *Werten in der Menge B* wird dann erhalten, wenn jedem Element x aus A genau ein Element y aus B entspricht.
Man schreibt $f: A \to B$ und liest „f definiert auf A mit Werten in B".

$f: A \to B$



$x \in A,\ y \in B$ und $y = f(x)$

Die Menge A heißt *Definitionsmenge* oder *Definitionsbereich* der Funktion.
Die Menge B heißt *Menge, in der die Funktion Werte annimmt* oder *Wertemenge* oder *Wertebereich*.
Die Art und Weise, durch die f jedem Element x aus der Menge A genau ein Element y aus der Menge B zuordnet, heißt *Zuordnungsvorschrift* oder *Funktionsgleichung*.
Wird dem Element x aus A das Element y aus B zugeordnet, sagt man, y ist *der Funktionswert in x* oder y ist *das Bild von x durch die Funktion f*. Man schreibt $y = f(x)$.

Die Menge aller Funktionswerte der Funktion f heißt *Bildmenge der Funktion* f und wird $Im\,f$ bezeichnet.

$y \in Im f \Leftrightarrow$ es gibt ein $x \in A$, sodass $y = f(x)$ oder
$Im f = \{ f(x) \mid x \in A\}$

Je nach Zuordnungsvorschrift kann eine Funktion definiert werden mithilfe:
- eines Diagramms;
- einer Tabelle;
- von Formeln mit algebraischen Ausdrücken.

Beispiel: In der vorigen Aufgabe definiert man $h: A \to B$, wobei $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$ und $B = \{0, 25, 40, 45\}$
- mithilfe eines Diagramms: $h : A \to B$ (siehe das Diagramm in Aufgabe 1);
- mithilfe einer Tabelle: $h : A \to B$;

t	0	1	2	3	4	5	6
$h(t)$	0	25	40	45	40	25	0

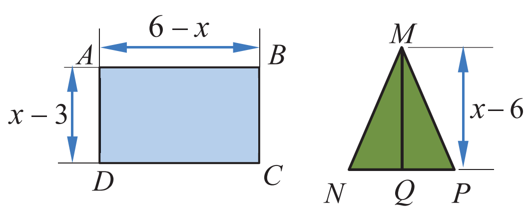
- mithilfe einer Formel mit algebraischem Ausdruck: $h : A \to B,\ h(t) = -5t^2 + 30t$.

Anwendungen

Manchmal definiert man eine Funktion wegen zusätzlicher Bedingungen mithilfe mehrerer Formeln.

Aufgabe 2. FU Nebenan sind das Rechteck $ABCD$ und das gleichschenklige Dreieck MNP mit der Höhe MQ und der Grundlinie $NP = 4$ cm abgebildet. x ist eine reelle Zahl und drückt eine Länge in cm aus.

a) Berechnet den Flächeninhalt des Rechtecks, wenn $x = 5$.
b) Berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks, wenn $x = 7$.
c) Bestimmt die Menge der reellen Zahlen x, für die das Rechteck konstruiert werden kann.
d) Bestimmt die Menge der reellen Zahlen x, für die das Dreieck konstruiert werden kann.



Lösung:
a) $AB = 6 - 5 = 1$ (cm); $AD = 5 - 3 = 2$ (cm). Also ist der Flächeninhalt des Rechtecks 2 cm^2.
b) $MQ = 7 - 6 = 1$ (cm); $NP = 4$ (cm). Also ist der Flächeninhalt des Dreiecks 2 cm^2.
c) $AB = 6 - x > 0$ und $AD = x - 3 > 0$. Also $x \in (3, 6)$.
d) $MQ = x - 6 > 0$. Folglich $x \in (6, \infty)$.

Aus den erhaltenen Lösungen können wir Folgendes feststellen:

1. Die Figuren können für denselben Wert der Zahl x nicht konstruiert werden, folglich kann der Flächeninhalt in dieser Situation nicht berechnet werden.
2. Falls $x \in (3, 6)$, ist der Flächeninhalt des Rechtecks $(x - 3)(6 - x)$.
3. Falls $x \in (6, \infty)$, ist der Flächeninhalt des Dreiecks $2(x - 6)$.

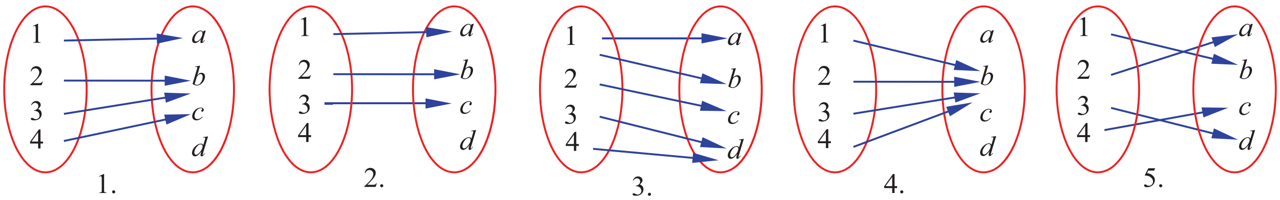
Wir werden eine Funktion wie folgt definieren: Sei $A = (3, 6) \cup (6, \infty)$ der Definitionsbereich. Weil der Flächeninhalt immer eine positive Zahl ist, wählen wir $B = (0, \infty)$ (es gibt auch andere Möglichkeiten der Wahl von B). Jeder Zahl x aus der Menge A ordnen wir die einzige Zahl aus der Menge B zu, die der Flächeninhalt der Figur, die konstruiert werden kann, ist, also den Flächeninhalt des Rechtecks, falls $x \in (3, 6)$, und den Flächeninhalt des Dreiecks, falls $x \in (6, \infty)$

Folglich erhalten wir die Funktion $f: (3, 6) \cup (6, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} (x-3)(6-x), & \text{falls } x \in (3, 6) \\ 2x-12, & \text{falls } x \in (6, \infty) \end{cases}$

Aufgaben

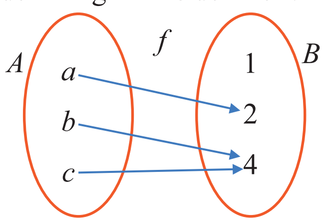
1 Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{a, b, c, d\}$.

a) Welches Diagramm stellt eine Funktion definiert auf A mit Werten in B dar?



b) Erklärt, warum die anderen Diagramme keine Funktionen darstellen.

2 Die Funktion $f: A \to B$ wird mithilfe des folgenden Diagramms definiert.



a) Nennt den Definitionsbereich, den Wertebereich und die Funktionswerte der Funktion.

b) Schreibt in eure Hefte und ergänzt die Lücken:

$f(a) = \ldots$ $f(b) = \ldots$

$f(c) = \ldots$ $f(a) + 2 \cdot f(b) + 3 \cdot f(c) = \ldots$

3 Die Tabelle stellt eine Funktion $f: A \to B$ dar.

x	0	1	2	77
$f(x)$	3	5	7	157

a) Schreibt die Elemente des Definitionsbereiches der Funktion.

b) Schreibt die Elemente des Wertebereiches.

c) Stellt die Funktion als Diagramm dar.

4 Die nächsten Funktionen werden durch Tabellen definiert.

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	4	9	16

x	–1	0	1	2	7
$g(x)$	–3	0	3	6	21

a) Nennt den Definitionsbereich und die Funktionswerte jeder Funktion.

b) Beschreibt die Zuordnungen $x \to f(x)$ bzw. $x \to g(x)$ mithilfe einer Formel.

5 Die nächsten Funktionen werden mithilfe einer Formel definiert. Nennt jedes Mal den Definitionsbereich, den Wertebereich und die Bildmenge der Funktion

$g: \{1, 2, 3, 4\} \to (0, \infty)$, $g(x) = x^2$

$$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x \in (-\infty, 0) \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ 1, & \text{falls } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$t(x) = \begin{cases} -2x-3, & \text{falls } x \in \{-1, -2\} \\ 3x-1, & \text{falls } x \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

6 Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2\}$ und $B = \{x, y, z\}$.

a) Schreibt mithilfe von Diagrammen alle möglichen Funktionen definiert auf der Menge A mit Werten in der Menge B.

b) Bestimmt die Anzahl der Funktionen definiert auf der Menge A mit Werten in der Menge B.

7 **a)** Schreibt die fünf kleinsten natürlichen Zahlen, bei deren Division durch 3 der Rest 1 übrig bleibt.

b) Identifiziere die Regel in der Zahlenreihe 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 …

c) Definiert eine Funktion auf der Menge der natürlichen Zahlen mit Werten in der unendlichen Menge M, deren Elemente die Zahlen 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 … sind.

d) Drückt die Zuordnung von Punkt c) mithilfe einer Formel aus.

8 Sei $f: A \to B, f(x) = -x + 1$ eine Funktion, wobei $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leq 2\}$. Schreibt alle Elemente auf, die aus der Menge B nicht fehlen dürfen.

9 Die Tabelle definiert eine Zuordnung zwischen zwei Mengen A und B.

x	–3	–1	0	2	5	8	10	15
$f(x)$	–6	–2	0	4	10	16	20	30

a) Bestimmt das Bild von –1 durch die Funktion f.

b) Welche Zahl hat das Bild 10?

c) Schreibt eine Formel für die Funktion f.

d) Berechnet:
$3 \cdot f(-3) + f(0) - f(5) + 2 \cdot f(10) - f(15)$.

10 Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) =$ die letzte Ziffer der Zahl 9^n.

a) Findet $f(0)$ und $f(3)$.

b) Bestimmt $Im\, f$.

c) Berechnet $f(3) + f(33) + f(333) - 3 \cdot f(3330)$.

11 Gegeben ist die Funktion $f: A \to B$, wobei

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| \leq 2\}$ und $f(x) = \sqrt{x+1} + x$.

a) Schreibt die Elemente des Definitionsbereiches.

b) Nennt das Bild von 3 durch die Funktion f.

c) Gegeben ist die Menge $M = \{ f(x) \mid x \in A\}$. Schreibt die Elemente der Menge M.

d) Beweist, dass die Menge B die Elemente $-1, 1, \sqrt{2}+1, \sqrt{3}+2, 5$ enthält.

e) Stellt fest, ob die Gleichung $M = B$ gilt.

12 Bestimmt für die folgenden Funktionen den Definitionsbereich, falls jedes Element des Wertebereichs das Bild eines Elements des Definitionsbereiches ist.

a) $f: A \to \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}, f(x) = -2x + 1$;

b) $g: A \to \{0, 1, 4, 9\}, g(x) = x^2$;

c) $h: A \to \{-2, -1, 0, 2, 3\}, h(x) = x - 3$.

13 Bestimmt für die folgenden Funktionen den Wertebereich mit der kleinsten Anzahl von Elementen.

a) $f: \{-3, -1, 0, 1, 2\} \to B,\ f(x) = -x + 1$;

b) $h: \{-2, -1, 1, 2, 0\} \to B, h(x) = x^2$;

c) $g: \{-1, 0, 1, 2, 4\} \to B, g(x) = 2x - 3$.

14 Die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks ist $(4 - x)$ cm, wobei x eine natürliche von null verschiedene Zahl ist. Der Umfang des Dreiecks beträgt p cm.

a) Drückt die funktionale Abhängigkeit der Größe p von dem Wert der variablen Größe x aus.

b) Definiert eine Funktion, die die funktionale Abhängigkeit von Punkt **a)** ausdrückt und nennt den Wertebereich und die Funktionsgleichung.

c) Berechnet das Bild von 3 durch die bei Punkt **a)** gefundene Funktion.

d) Prüft, ob 7 ein Funktionswert ist.

e) Definiert die Funktion mithilfe eines Diagramms und danach mithilfe einer Tabelle.

15 Schreibt in die Hefte und ergänzt die Lücken, sodass wahre Sätze entstehen:

a) Seien $A = \{0, 1, 2\}$ und $B = \{a, b\}$ Mengen. Die Anzahl der Funktionen definiert auf der Menge A mit Werten in der Menge B ist ... . Die Anzahl der Funktionen definiert auf der Menge B mit Werten in der Menge A ist ... .

b) Seien $C = \{-3, 3\}$ und $D = \{-2, 1, 2\}$ Mengen. Die Anzahl der Funktionen $f: C \to D$, mit der Eigenschaft $f(x) > 0$, für alle $x \in C$, ist ... .

c) Sei die Funktion $g: \mathbb{R} \to M, g(x) = |x|$. Das kleinste Element der Menge M ist …

d) Die Tabelle definiert die Funktion
h: ... → …, $h(n) =$ … .

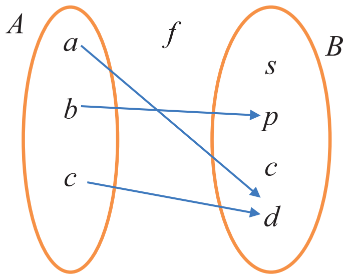
n	–1	0	1	2	10
$h(n)$	5	0	–5	–10	–50

e) Der maximale Definitionsbereich der Funktion $i: A \to \{-4, 0, 4, 8\}, i(x) = 4x$ ist $A =$ … .

L2. Der Graf einer Funktion. Die geometrische Darstellung des Grafen einer numerischen Funktion

Wir lösen und stellen fest

Aufgabe 1. SA Im unteren Diagramm sind die Mengen $A = \{a, b, c\}$, $B = \{s, p, c, d\}$ und eine Zuordnung f zwischen ihren Elementen dargestellt.



a) Stellt fest, ob das Tripel (A, B, f) eine Funktion definiert. Begründet die Antwort.
b) Nennt den Definitionsbereich und den Wertebereich der Funktion.
c) Schreibt die Wertetabelle der Funktion.
d) Schreibt die Menge der Funktionswerte der Funktion $f: A \to B$ mithilfe ihrer Elemente.
e) Schreibt das kartesische Produkt $A \times B$.
f) Schreibt mithilfe ihrer Elemente die Teilmenge G_f des kartesischen Produkts $A \times B$, wenn:
$G_f = \{ (x, y) \in A \times B \mid x \in A \text{ und } y = f(x)\}$.

Lösung

a) Die Zuordnung f ordnet jedem Element der Menge A ein einziges Element der Menge B zu, folglich definiert das Tripel (A, B, f) eine Funktion.
b) Der Definitionsbereich ist die Menge A und der Wertebereich ist die Menge B.
c)

x	a	b	c
$f(x)$	d	p	d

d) Die Menge der Funktionswerte oder die Bildmenge der Funktion ist die Menge:
$Imf = \{f(x) / x \in A\} = \{f(x) \cdot x \in \{a, b, c\}\} = \{f(a), f(b), f(c)\} = \{d, p\}$.
Weil $\{d, p\} \subset \{s, p, c, d\}$, gilt $Imf \subset B$.
e) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B)\}$.
Die Elemente des kartesischen Produkts $A \times B$ sind:

(a, s), (a, p), (a, c), (a, d),
(b, s), (b, p), (b, c), (b, d),
(c, s), (c, p), (c, c), (c, d),
(d, s), (d, p), (d, c), (b, d).

f) Da $x \in A$, $A = \{a, b, c\}$ und $y = f(x)$, gilt
$G_f = \{(a, d), (b, p), (c, d)\}$.

Wir verstehen anhand von Beispielen

Gegeben ist eine Funktion $f: A \to B$.

Definition. Die Teilmenge G_f des kartesischen Produkts $A \times B$, definiert als $G_f = \{(x, y) \in A \times B \mid x \in A \text{ und } y = f(x)\}$, heißt *der Graf der Funktion f*.

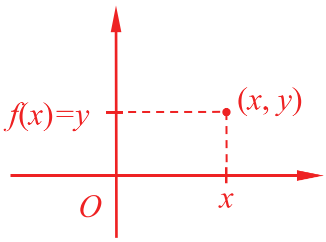
Bemerkung. **1)** $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in A$ und $y = f(x)$; **2)** $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.
Beispiel: Nebenan steht die Wertetabelle der Funktion $f: \{-1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Daraus erkennt man den Grafen $G_f = \{(-1, -5), (2, 1), (3, 3)\}$.
$(2, 1) \in G_f$ da $2 \in \{-1, 2, 3\}$ und $1 = f(2)$.
$(4, 5) \notin G_f$ da $4 \notin \{-1, 2, 3\}$, obwohl $2 \cdot 4 - 3 = 5$.

x	-1	2	3
$f(x)$	-5	1	3

Definition. Eine Funktion heißt *numerische Funktion,* wenn der Definitionsbereich und der Wertebereich Teilmengen der Menge der reellen Zahlen sind.
$f: A \to B$ ist eine numerische Funktion $\Leftrightarrow$ $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$

Sei $f: A \to B$, $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ eine numerische Funktion. Der Graf der Funktion f ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$, $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$. Demnach ist der Graf einer numerischen Funktion $f: A \to B$ eine Teilmenge des kartesischen Produkts $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, also $G_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Folgesatz: Jedes Element des Grafen einer numerischen Funktion kann mit einem Punkt mit den Koordinaten x und y, wobei $y = f(x)$, „identifiziert" werden und in einem orthogonalen Achsensystem xOy dargestellt werden.



Die Menge aller Punkte mit den Koordinaten *x und y,* mit $y = f(x)$ heißt *geometrische Darstellung des Grafen der Funktion f (oder Schaubild der Funktion).*

Bemerkung: Statt „*geometrische Darstellung des Grafen der Funktion f*" sagt man für gewöhnlich „*Darstellung des Grafen der Funktion f*".

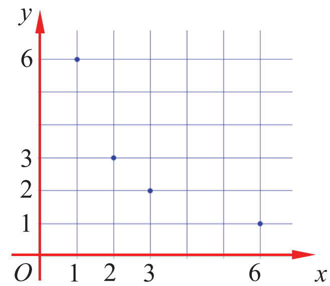
Beispiel. **a)** Stellt den Grafen der Funktion f, deren Wertetabelle unten steht, geometrisch dar.

x	1	2	3	6
$f(x)$	6	3	2	1

b) Definiert die Funktion f mithilfe einer Formel.

Lösung. **a)** $G_f = \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$

Wir stellen in einem Koordinatensystem xOy die Elemente der Menge G_f dar.



Die geometrische Darstellung besteht aus 4 Punkten.

b) Weil $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$, sind x und y umgekehrt proportionale Größen.

Es gilt $x \cdot y = 6$, oder $y = \dfrac{6}{x}$, also

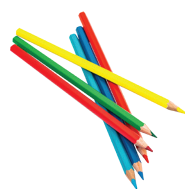
$f: \{1, 2, 3, 6\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{6}{x}$.

Anwendungen

Aufgabe 2. Ioana kauft Buntstifte. Ein Stift kostet 1,5 Lei.

SA Ioana bezeichnet die Anzahl der gekauften Buntstifte mit n und ihren Preis mit S und stellt eine Wertetabelle auf.

n	2	4	5
S			



a) Drückt S in Funktion von n aus.
b) Ergänzt Ioanas Tabelle.
c) Schreibt die als Tabelle definierte Funktion mithilfe einer Formel, der Funktionsgleichung.
d) Schreibt die Menge der Werte der Funktion von Punkt **c)**.
e) Berechnet die Anzahl n der Buntstifte, falls dafür 12 Lei gezahlt werden sollen.
f) Begründet, warum $(n, 12)$ nicht zu dem Grafen der Funktion von Punkt **c)** gehört.
g) Schreibt den Grafen der Funktion von Punkt **c)** und stellt die Funktion grafisch dar.

Lösung:

a) $S = 1{,}5 \cdot n$

b) Da $S = 1{,}5 \cdot n$, gilt:

n	2	4	5
S	3	6	7,5

$n = 2 \Rightarrow S = 1{,}5 \cdot 2 = 3$.
$n = 4 \Rightarrow S = 1{,}5 \cdot 4 = 6$.
$n = 5 \Rightarrow S = 1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$.

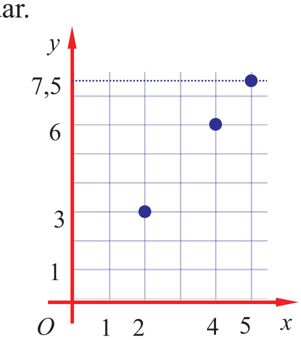
c) Laut Tabelle ist:
$S: \{2, 4, 5\} \to \{3; 6; 7{,}5\}$,
$S(n) = 1{,}5 \cdot n$.

d) $ImS = \{S(n) \mid n \in \{2, 4, 5\}\} = \{3; 6; 7{,}5\}$.

e) Kosten n Buntstifte 12 Lei, dann gilt $1{,}5 \cdot n = 12$, also $n = 8$. Antwort: 8 Buntstifte.

f) Laut Definition gilt $(n, 12) \in G_S \Leftrightarrow$
$n \in \{2, 4, 5\}$ und $12 = S(n)$.
Aber $8 \notin \{2, 4, 5\}$, also $(n, 12) \notin G_S$.

g) $G_S = \{(n, S(n)) \mid n \in \{2, 4, 5\}\} =$
$= \{(n; 1{,}5 \cdot n) \mid n \in \{2, 4, 5\}\} =$
$= \{(2, 3), (4, 6), (5; 7{,}5)\}$.



Grafische Darstellung der Funktion S

Aufgaben

1 Gib zwei Beispiele von numerischen Funktionen und zwei von Funktionen, die nicht numerisch sind.

2 Gegeben ist die Funktion $f: A \to B$. Die Menge A hat a Elemente, die Menge B hat b Elemente, $a, b \in \mathbb{N}$.

2.1. Vergleicht die Anzahl der Elemente der Menge G_f mit der Anzahl der Elemente der Menge $A \times B$.

2.2. Findet eine Beziehung zwischen den Zahlen a und b, sodass $G_f = A \times B$.

3 Gegeben ist g: $\{-2, -1, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$.

a) Bestimmt die Menge G_g.

b) Stellt G_g grafisch dar.

4 Gegeben sind die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 1$ und die Punkte $A(2, 3)$, $B(-1, -1)$, $C(-2, 1)$, $D(0, -1)$, $E(\sqrt{3}, \sqrt{3} + 1)$. Findet heraus, welche dieser Punkte zum Grafen von f gehören und welche nicht dazu gehören.

5 **a)** Schreibt die Wertetabelle der Funktion $g: \{0, 1, 4, 9\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

b) Schreibt die Elemente des G_f.

c) Stellt die Funktion grafisch dar.

6 Gegeben ist h: $A \to \{-2, 0, 4\}$, $h(x) = x + 4$.

a) Bestimmt die Elemente der Menge A, wenn A drei Elemente hat.

b) Stellt die Funktion grafisch dar.

7 Gegeben ist f: $\{-1, 0, 1\} \to B$, $f(x) = 3x + 2$.

a) Bestimmt die Funktionswerte und schreibt die Menge B mit den wenigsten Elementen.

b) Stellt die Funktion grafisch dar.

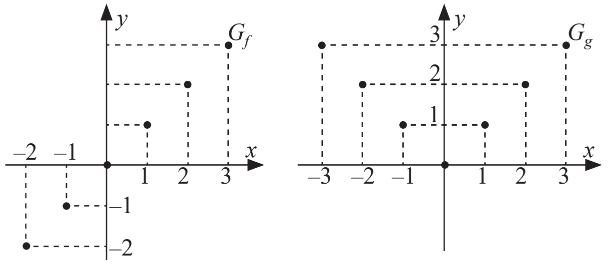
8 Gegeben ist f: $\{0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 4$.

a) Prüft, ob $A(-3, 7)$ zu G_f gehört.

b) Stellt den Grafen der Funktion in einem orthogonalen Achsensystem dar.

9 Die geometrische Darstellung einer Funktion h ist die Menge der Punkte $\{M, N, P, Q\}$, $M(-3, 1)$, $N(-1, 3)$, $P(1, -3)$, $Q(3, -1)$. Bestimmt den Definitionsbereich der Funktion und die Menge Imh.

10 Unten sind die Grafen der Funktionen f und g dargestellt.



a) Schreibt den Definitionsbereich und den Wertebereich einer jeden Funktion.

b) Schreibt mithilfe von Formeln die Funktionsgleichungen der zwei Funktionen.

11 **a)** Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$ eine Funktion. Bestimmt a, wenn $A(-2, 3) \in G_f$.

b) Der Punkt $B(b, 3b)$ gehört zum Grafen der Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x-4}{3}$. Berechnet die Zahl b.

12 Die Seitenlängen eines Rechtecks sind $2x$ cm beziehungsweise y cm und sein Umfang ist 18 cm. x und y sind natürliche Zahlen.

a) Schreibt die funktionale Abhängigkeit zwischen x und y. Drückt y in Funktion von x aus.

b) Findet A, die Menge der möglichen natürlichen Werte von x, und B, die Menge der möglichen natürlichen Werte von y.

c) Sei f die Funktion definiert auf A mit Werten in B, die jedem Element x aus A das Element y aus B (wie bei Punkt **a)**) zuordnet. Definiert die Funktion f auf 3 verschiedene Weisen: mit einer Formel, einer Wertetabelle, einem Diagramm.

d) Stellt die Funktion f grafisch dar.

e) Schreibt die funktionale Abhängigkeit zwischen x und y. Drückt x in Funktion von y aus.

f) Findet B, die Menge der möglichen natürlichen Werte von y, und A, die Menge der möglichen natürlichen Werte von x.

g) Sei g die Funktion definiert auf B mit Werten in A, die jedem Element y aus B das Element x aus A (wie bei Punkt **e)**) zuordnet. Definiert die Funktion g auf 3 verschiedene Weisen: mit einer Formel, einer Wertetabelle, einem Diagramm.

h) Stellt die Funktion g grafisch dar.

2 Funktionen der Form $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Die geometrische Deutung. Grafen lesen

L1. Funktionen der Form $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$

Aufgabe 1. Eine biologisch abbaubare Tüte kostet in einem Supermarkt **FU** b Lei. Das gekaufte Gemüse wird in der biologisch abbaubaren Tüte auf eine elektronische Waage gelegt. Automatisch werden der Preis für ein Kilogramm Gemüse und der Wert y Lei für die gekauften x kg Gemüse angezeigt, die den Preis der biologisch abbaubaren Tüte enthält. Da y eine funktional abhängige Größe der Variablen x ist, werden wir den Wert y für die x kg des Gemüses mit $f(x)$ bezeichnen.

a) Findet den algebraischen Ausdruck der funktionalen Abhängigkeit $y = f(x)$.

b) Definiert mithilfe der vorher gefundenen funktionalen Abhängigkeit die Funktion f *auf der Menge A mit Werten in der Menge* $\mathbb{R}$. Bestimmt die Menge A entsprechend der Realität.

c) Löst den Arbeitsauftrag **a)** für $a = 1{,}5$ und $b = 0{,}75$.

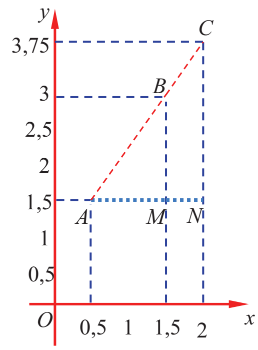
d) Schreibt für die Menge $\{0{,}5;\ 1{,}5;\ 2\} \subset A$ die Wertetabelle der Funktion vom vorigen Punkt.

e) Aus der bei Punkt **d)** erhaltenen Tabelle geht hervor, dass $(0{,}5;\ 1{,}5)$, $(1{,}5;\ 3)$ und $(2;\ 3{,}75)$ Elemente der Menge G_f sind. Zeigt, dass die Punkte $A(0{,}5;\ 1{,}5)$, $B(1{,}5;\ 3)$ und $C(2;\ 3{,}75)$ kollinear sind.

Lösung. **a)**

- Ein Kilogramm Gemüse kostet a Lei;
- x kg Gemüse kosten ax Lei, hinzu kommt der Preis der biologisch abbaubaren Tüte.

Für x kg Gemüse zahlt man $ax + b$ Lei, also ist $f(x) = ax + b$ die algebraische Form der funktionalen Abhängigkeit $y = f(x)$.



b) Man erhält die Funktion $f: A \to B$, $f(x) = ax + b$.
Da die Elemente der Menge A Zahlen x sind, welche die Masse des gekauften Gemüses in Kilogramm angeben, gilt $x > 0$, deshalb ist $A = (0, \infty)$.
Es folgt, dass $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

c) Für $a = 1{,}5$ und $b = 0{,}75$ ist $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1{,}5 \cdot x + 0{,}75$.

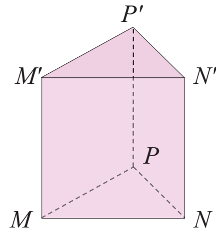
d)

x	0,5	1,5	2
$f(x)$	1,5	3	3,75

e) Die Punkte $A(0{,}5;\ 1{,}5)$, $B(1{,}5;\ 3)$ und $C(2;\ 3{,}75)$ werden dargestellt. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AMB und ANC folgt, dass die Punkte kollinear sind.

Fürs Portfolio

Gegeben ist das gerade dreiseitige Prisma $MNPM'N'P'$, als P_1 bezeichnet. Die Kantenlängen in Zentimeter ausgedrückt sind: $MN = 4x - 2$, $MP = NP = 10 - x$, $MM' = 1$.
Ein anderes Prisma P_2 hat eine um 17 cm² kleinere Mantelfläche als das Prisma P_1.



a) Für $x = 2$ berechnet die Mantelfläche des Prismas P_1 und die Mantelfläche des Prismas P_2.

b) Gegeben ist die Zuordnung $x \to f(x)$, wobei $x \in A$, $A = \{1, 2, 3\}$ und $f(x) \in \mathbb{R}$, welche die Mantelfläche des Prismas P_2 ausdrückt. Schreibt die Zuordnungsformel für $f(x)$.

c) Drückt die Funktion $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ mithilfe eines Diagramms aus und dann mithilfe einer Tabelle.

d) Schreibt die Menge G_f durch Aufzählen ihrer Elemente.

Bemerkung. Die oben analysierten praktischen Situationen erfordern die Untersuchung von Funktionen, die durch algebraische Ausdrücke der Form $f(x) = ax + b$ definiert sind.

Für Funktionen der Form $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, wobei a und b zwei gegebene reelle Zahlen sind, gibt es folgende Situationen:
1) Falls $a = 0$, dann ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = b, b \in \mathbb{R}$, *und heißt konstante Funktion*.
2) Falls $a \neq 0$, dann heißt die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, *Funktion I. Grades.*

Beispiele
1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4$, ist eine konstante Funktion.
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1{,}5 \cdot x + 0{,}75$, ist eine Funktion I. Grades mit $a = 1{,}5$ und $b = 0{,}75$.
3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x$, ist eine Funktion I. Grades mit $a = -2$ und $b = 0$.
Gegenbeispiele Die nächsten Funktionen sind keine Funktionen I. Grades.
1) $f: \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$ (der Definitionsbereich ist nicht $\mathbb{R}$)
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($f(x)$ wird nicht für alle Elemente des Definitionsbereiches mit derselben Formel definiert)

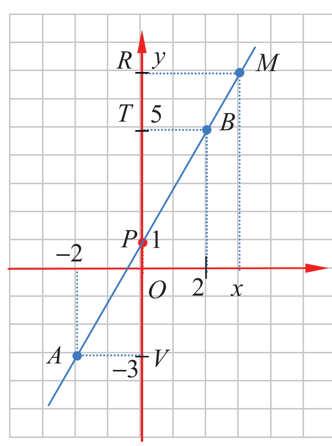
Wir verstehen anhand von Beispielen

Aufgabe 2. In einem orthogonalen Koordinatensystem seien $A(-2, -3)$ und $B(2, 5)$ zwei Punkte.

FU

a) Zeigt, dass es eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$, wobei a und b reelle Zahlen sind, gibt, sodass: $(-2, -3) \in G_f$ und $(2, 5) \in G_f$.
b) Bestimmt den Punkt $P(x, y)$ auf der Oy-Achse, wenn $(x, y) \in G_f$.
c) Bestimmt den Punkt $Q(x, y)$ auf der Ox-Achse, wenn $(x, y) \in G_f$.
d) Wir wissen, dass zwei verschiedene Punkte eine Gerade bestimmen. Beweist: $M(x, y) \in AB \Leftrightarrow (x, y) \in G_f$.

Lösung: **a)** Wir verwenden die Beziehung $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y$.
$(-2, -3) \in G_f \Leftrightarrow f(-2) = -3 \Leftrightarrow -2a + b = -3$. Und $(2, 5) \in G_f \Leftrightarrow f(2) = 5 \Leftrightarrow 2a + b = 5$. Wir erhalten das Gleichungssystem $\begin{cases} -2a + b = -3 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$ mit der Lösung $a = 2$ und $b = 1$. Die gesuchte Funktion ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$.
b) $P(x, y) \in Oy \Leftrightarrow x = 0$, also $P(0, y)$. Und $(0, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(0)$. Folglich $y = 1$ und $P(0, 1)$.
c) $Q(x, y) \in Ox \Leftrightarrow y = 0$, also $Q(x, y)$. Und $(x, 0) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = 0$. Folglich $2x + 1 = 0$ und $Q(-0{,}5; 0)$.
d) Wir stellen die Punkte $A(-2, -3)$, $B(2, 5)$ und den Punkt $P(0, 1)$, welcher laut **b)** $Oy \cap G_f$ ist, grafisch dar. Da $(-2, -3)$, $(2, 5)$ und $(0, 1)$ zu der Menge G_f gehören, sagt man, dass die Punkte $A(-2, -3)$, $B(2, 5)$ und $P(0, 1)$ zum Grafen der Funktion f gehören.



Wir müssen beweisen, dass: $M(x, y) \in AB \Leftrightarrow M(x, y) \in G_f$. Den Beweis führen wir in folgenden Schritten aus:
I) Wir beweisen, dass die Punkte des Grafen $A(-2, -3)$, $B(2, 5)$ und $P(0, 1)$ kollinear sind.
Die Punkte $T(0, 5)$, $V(0, -3)$ und $P(0, 1)$ sind kollinear, weil sie auf der Oy- Achse liegen. Da $\frac{VA}{TB} = \frac{2}{2} = 1$ und $\frac{VP}{TP} = \frac{4}{4} = 1$, sind die rechtwinkligen Dreiecke AVP und BTP kongruent. Folglich sind die Winkel APV und BPT kongruent. Da die Punkte T, P, V kollinear sind, sind auch die Punkte A, P und B kollinear.

II) Wir beweisen: wenn $M(x, y) \in G_f$, dann sind $P(0, 1)$, $B(2, 5)$ und $M(x, y)$ kollinear.
Die Punkte $P(0, 1)$, $T(0, 5)$ und $R(0, y)$ sind kollinear und die Dreiecke BPT und

MPR sind rechtwinklig.

Aus $M(x, y) \in G_f$ folgt, dass $y = 2x + 1$. Wenn $y > 1$, muss $x > 0$. Aus $\frac{PT}{PR} = \frac{4}{y-1} = \frac{4}{2x+1-1} = \frac{2}{x}$ und $\frac{TB}{RM} = \frac{2}{x}$ folgt $\frac{PT}{PR} = \frac{TB}{RM} = \frac{2}{x}$, $\Delta BPT \sim \Delta MPR$ (SWS). Und dann $\sphericalangle BPT \equiv \sphericalangle MPR$, also sind die Punkte P, B, M kollinear.

III) Wir beweisen: wenn $M(x,y) \in G_f$, dann $M(x, y) \in AB$.
Aus II) folgt $M(x, y) \in PB$ und aus I) folgt, dass die Geraden PB und AB übereinstimmen. Also $M(x, y) \in AB$.

IV) Wir beweisen: wenn $M(x,y) \in AB$, dann $M(x, y) \in G_f$. Wenn $M(x, y) \in AB$, dann sind die Dreiecke BPT und MPR ähnlich. Daraus folgt, dass $\frac{PT}{PR} = \frac{TB}{RM}$. Aber $\frac{PT}{PR} = \frac{4}{y-1}$ und $\frac{TB}{RM} = \frac{2}{x}$, also $\frac{4}{y-1} = \frac{2}{x}$. Daraus folgt, dass $y = 2x + 1$, also $y = f(x)$.
Schlussfolgernd: aus $M(x,y) \in AB$ folgt, dass $y = f(x)$, das bedeutet $M(x, y) \in G_f$.
Bemerkung Die Bezeichnungen G_f und *„der Graf der Funktion f“* verwendet man sowohl für die Menge der Paare $(x, f(x))$ als auch für die Menge der Punkte der Ebene mit den Koordinaten $(x, f(x))$, wobei aus dem Kontext hervorgeht, worum es sich handelt.

- Für jede Funktion der Form $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, wobei a und b gegebene reelle Zahlen sind, bezeichnet man den Grafen der Funktion G_f. Dieser ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Er wird definiert mithilfe der Gleichung: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ oder $G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}$ und $y = ax + b\}$.
  $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ und $y = f(x)$ oder
  $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ und $y = ax + b$.

- Die Menge aller Punkte der Ebene mit den Koordinaten $(x, f(x))$ im kartesischen Koordinatensystem xOy heißt *geometrische Darstellung des Grafen der Funktion f*. $M(x, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(x)$
  Man verwendet die Schreibweisen:
  $(x, y) \in G_f$ oder $M(x, y) \in G_f$.

Lehrsatz. Der Graf einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, wobei a und b gegeben reelle Zahlen sind, ist eine Gerade d. Man schreibt $G_f = d$.

Der Graf einer konstanten Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$, ist die Parallele zu Ox durch den Punkt $A(0, b)$.
Bemerkung In diesem Kontext heißt die Beziehung $y = ax + b$ die *Gleichung der Geraden d*; man schreibt d: $y = ax + b$ und liest „die Gerade d hat die Gleichung $y = ax + b$“.

- Um den Grafen der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, oder die Gerade d: $y = ax + b$ darzustellen, benötigt man zwei beliebige verschiedene Punkte der Geraden d.

a) Oft ist es vorteilhaft, die *Schnittpunkte* des Grafen mit den *Koordinatenachsen*[1] zu wählen.
- *Der Schnittpunkt des Grafen mit der Oy-Achse*: $G_f \cap Oy = \{A(x, y)\}$; $A(x, y) \in Oy \Leftrightarrow x = 0$;
  $A(0, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(0) \Leftrightarrow y = b$, also $G_f \cap Oy = \{A(0, b)\}$.
- *Der Schnittpunkt des Grafen mit der Ox-Achse*: $G_f \cap Ox = \{B(x, 0)\}$; $B(x, y) \in Ox \Rightarrow y = 0$;
  $B(x, 0) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0$, also $G_f \cap Ox = \left\{B\left(-\frac{b}{a}, 0\right)\right\}$.

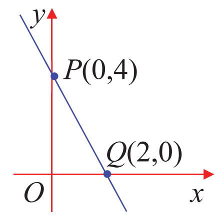
Die Gerade AB ist der Graf der Funktion f.
b) Braucht man die Schnittpunkte mit den Achsen nicht, so kann man zwei verschiedene Punkte $M(x_1, y_1)$ und $N(x_2, y_2)$ des Grafen der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, wählen.
Wir wählen vorteilhaft verschiedene Werte x_1 und x_2.
- $M(x_1, y_1) \in G_f \Leftrightarrow M(x_1, ax_1 + b)$; $N(x_2, y_2) \in G_f \Leftrightarrow N(x_2, ax_2 + b)$.

Die Gerade MN ist der Graf der Funktion f.
c) Der Graf einer konstanten Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$, ist die Parallele zu Ox durch den Punkt $A(0, b)$.

[1] Man nennt diese Darstellungsart „Darstellung durch Achsenschnitte“.

Anwendungen

1. Anwendung: Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 4$.
a) Schreibt die Menge G_f.
b) Bestimmt die Schnittpunkte des Grafen mit den Koordinatenachsen.
c) Stellt die Funktion f grafisch dar.

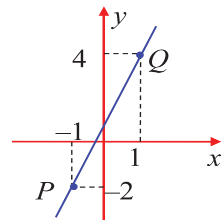


Lösung: **a)** $G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y = f(x)\}$ oder $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ oder $G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y = -2x + 4\}$.
b) $G_f \cap Oy = \{P(0, y)\}$ mit $y = f(0)$. Aus $f(0) = b$ folgt, dass $G_f \cap Oy = \{P(0, 4)$;
$G_f \cap Ox = \{Q(x, 0)\}$ mit $f(x) = 0$. Aus $-2x + 4 = 0$ folgt $x = 2$, also $G_f \cap Ox = \{Q(2, 0)\}$.
c) Der Graf der Funktion ist die Gerade PQ.

2. Anwendung: Sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 3x + 1$.
a) Schreibt die Menge G_g.
b) Stellt die Funktion g grafisch dar.

Lösung. **a)** $G_g = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ oder $G_g = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}$ und $y = 3x + 1\}$.
b) Zur Darstellung des Grafen genügen zwei Punkte. Wir wählen für die Variable x zwei verschiedene Werte. Wir wählen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

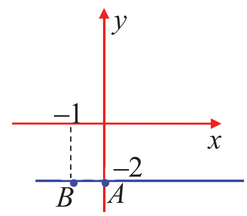
x	-1	1
$y = 3x + 1$	-2	4
Punkt (x, y)	$P(-1,-2)$	$Q(1,4)$



Da $g(-1) = -3 + 1 = -2$ und $g(1) = 3 + 1 = 4$, erhalten wir die Punkte $P(-1,-2)$ und $Q(1,4)$, die die Gerade $PQ = G_g$ bestimmen.
Bemerkung Die zwei Punkte können auch mithilfe der Wertetabelle gefunden werden.

3. Anwendung: Sei $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = -2$.
a) Berechnet $h(0)$ und $h(-1)$.
b) Schreibt die Menge G_h.
c) Stellt die Funktion h grafisch dar.

Lösung. **a)** $h(0) = h(-1) = -2$.
b) $G_h = \{(x, -2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
c) Die Punkte $A(0, -2)$ und $B(-1, -2)$ bestimmen die Gerade $AB = G_h$.



Aufgaben

1 Die folgenden Funktionen haben die Form $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$.
Bestimmt a und b für jede Funktion:
a) $f(x) = 3x + 2$; **b)** $f(x) = -x + 6$;
c) $f(x) = -4x$; **d)** $f(x) = -1$.

2 Gegeben ist die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 3x - 1$.
Berechnet: $g(-1)$; $g(0)$; $g\left(\frac{1}{3}\right)$; $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3 Gegeben ist die Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = -x + 2$.
a) Prüft, ob die Punkte $A(-2; 0)$ und $B(1; 1)$ zum Grafen der Funktion h gehören.
b) Stellt den Grafen der Funktion in einem Koordinatensystem dar.

4 Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$.
a) Bestimmt den Punkt des Grafen mit der Ordinate 1.
b) Bestimmt den Punkt des Grafen mit der Abszisse -2.
c) Bestimmt den Punkt des Grafen mit gleichen Koordinaten.
d) Bestimmt den Punkt des Grafen, dessen Ordinate das Dreifache der Abszisse ist.
e) Bestimmt den Punkt des Grafen, dessen Ordinate entgegengesetzt der Abszisse ist.

5 Stellt fest, ob die Punkte kollinear sind:
a) $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$ und $C(-4, 0)$;
b) $A(-3, 2)$, $B(4, -5)$ und $C(2, -1)$;
c) $A(-1, 2)$, $B(1, -2)$ und $C(-2, 3)$;
d) $A(2, -1)$, $B(-1, 5)$ und $C(1, 1)$.

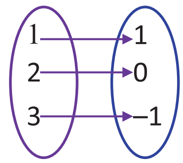
6 Bestimmt die Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$, deren Grafen die Punkte:
a) $A(-1, 2)$ und $B(1, -2)$;
b) $A(-2, 1)$ und $B(2, 3)$;
c) $A(-3, 2)$ und $B(4, -5)$;
d) $A(-1, 5)$ und $B(2, -1)$ enthalten.

7 Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$.
a) Prüft, ob der Punkt $M(-1, -3)$ zum Grafen der Funktion f gehört und stellt die Funktion grafisch dar.
b) Bestimmt die Schnittpunkte des Grafen der Funktion f mit den Koordinatenachsen.

8 Gegeben ist die Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-2x+4$.
a) Zeichnet den Grafen der Funktion g.
b) Berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks bestimmt von dem Grafen der Funktion g und den Koordinatenachsen.
c) Bestimmt den Abstand vom Ursprung des Koordinatensystems zu dem Grafen der Funktion g.

9 Gegeben sind die Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$, und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x+2$.
a) Stellt die Grafen der Funktionen f und g im selben Koordinatensystem dar.
b) Bestimmt die Koordinaten des Schnittpunktes der Grafen der Funktionen f und g.
c) Berechnet $f(1)+f(2)+\ldots+f(10)+$
$+2[g(1)+g(2)+\ldots+g(10)]$.

10 Zwei Funktionen f und g sind gleich, wenn sie denselben Definitionsbereich, denselben Wertebereich und dieselbe Zuordnungsvorschrift ($f(x)=g(x)$ für alle x des Definitionsbereichs) haben.
a) Sei f die Funktion definiert mithilfe des Diagramms und g: $A\to\{-1, 0, 1\}$, $g(x)=-x+2$. Schreibt die Elemente der Menge A, wenn die Funktionen f und g gleich sind.



b) Gegeben sind die Funktionen $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+6$ und $g(x)=(a-3)\cdot x+b-2$. Berechnet a und b, wenn die Funktionen f und g gleich sind.

11 Gegeben ist die Funktion $f:\{-3, -1, 0, 1, 2, 5\}\to\mathbb{R}$, definiert durch:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+1, & x<0\\ 2, & 0\le x<2\\ x^2-x, & x\ge 2\end{cases}$$

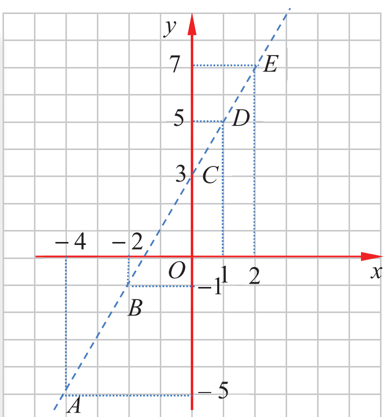
Berechnet $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$.

12 Gegeben ist die Funktion $h:\{-2, -1, 0, 1, 2\}\to\{0, 1, 4\}$, $h(x)=x^2$.
a) Schreibt die Funktion mithilfe einer Tabelle.
b) Beschreibt die Funktion als Diagramm.
c) Stellt die Funktion grafisch dar.

L2. Die grafische Darstellung der Funktionen $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$, wobei $a, b\in\mathbb{R}$ und D ein Intervall ist. Grafen lesen

Wir lösen und stellen fest

1 Gegeben sind die Funktionen:
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+3$,
$g:[-4, -2)\to\mathbb{R}, g(x)=2x+3$,
$h:(0, 1)\to\mathbb{R}, h(x)=2x+3$,
$u:(2, \infty)\to\mathbb{R}, u(x)=2x+3$.
In einer Ebene mit einem kartesischen Koordinatensystem xOy liegen die Punkte: $A(-4, -5)$, $B(-2, -1)$, $C(0, 3)$, $D(1, 5)$ und $E(2, 7)$.
a) Stellt die Punkte A, B, C, D und E geometrisch dar.
b) Zeigt, dass die Punkte A, B, C, D und E kollinear sind.
c) Stellt im selben Koordinatensystem die Grafen der Funktionen f, g, h und u dar.



Lösung.

a) Die Punkte A, B, C, D und E sind in der unteren Abbildung dargestellt.

b) Laut Zeichnung sind die Punkte A, B, C, D und E scheinbar kollinear. Die Zeichnung ist kein Beweis, ist aber wichtig, da sie auf die Kollinearität hindeutet. Die Kollinearität muss bewiesen werden.
Eine effiziente Technik zum Beweis der Kollinearität der Punkte ist folgende: Wir schreiben die Funktion I. Grades, deren Graf von zwei der fünf Punkte bestimmt wird, und prüfen, ob die anderen drei Punkte zu dieser Geraden gehören. Zum Beispiel schreiben wir die Funktion, deren Graf die Gerade AB ist und prüfen, ob die Punkte C, D und E dazugehören.

$AB = G_t$, wobei $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t(x) = ax + b$.

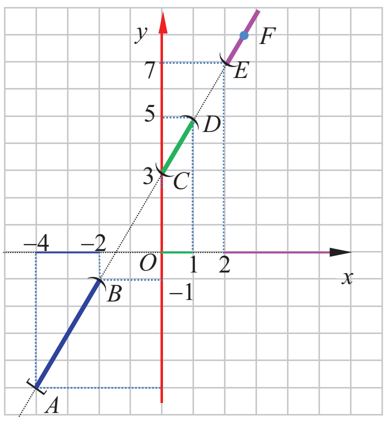
$A(-4, -5) \in AB \Leftrightarrow -4a + b = -5$;

$B(-2, -1) \in AB \Leftrightarrow -2a + b = -1$.

Wir erhalten das System $\begin{cases} -4a+b=-5 \\ -2a+b=-1 \end{cases}$, mit der Lösung $a = 2$ und $b = 3$.

Also ist $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t(x) = 2x + 3$, gleich mit der Funktion f.

Die Gerade AB ist der Graf der Funktion t.
Wir prüfen, ob ein beliebiger Punkt $M(x, y)$ zur Geraden AB gehört, mithilfe der Äquivalenz: $M(x, y) \in AB \Leftrightarrow t(x) = y$.
Weil $t(0) = 3$, ist $C(0, 3) \in AB$. Analog, $t(1) = 5$, $t(2) = 7$, also gehören $D(1, 5)$, $E(2, 7)$ zu AB. Folglich sind die Punkte A, B, C, D und E kollinear.



c) Damit wir die Funktionen f, g, h und u, grafisch darstellen können, stellen wir fest, dass die vier Funktionen dieselbe Funktionsgleichung haben $x \to y = 2x + 3$, wobei $x \in D$, D ist der Definitionsbereich der Funktion . Somit sind die Grafen der vier Funktionen Teilmengen des Grafen der Funktion f; eine Strecke oder Halbgerade, je nachdem, ob der Definitionsbereich D der jeweiligen Funktion ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall ist. Wir erinnern daran, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als offenes unbeschränktes Intervall $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ betrachtet werden kann.

- der Graf der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Gerade AE;
- der Graf der Funktion $g : [-4, -2) \to \mathbb{R}$ ist die links geschlossene, rechts offene Strecke $[AB)$;
- der Graf der Funktion $h : (0, 1) \to \mathbb{R}$ ist die offene Strecke (CD);
- der Graf der Funktion $u : (2, \infty) \to \mathbb{R}$ ist die offene Halbgerade $(EF$.

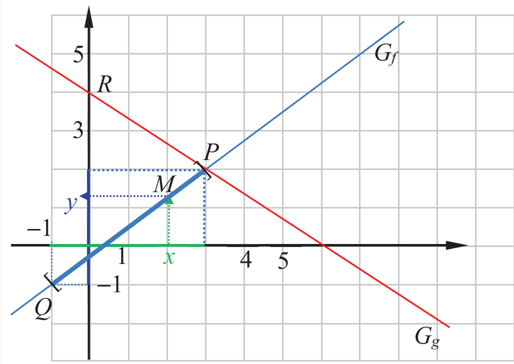
Bemerkungen
Die Funktionen g, h, u sind *Restriktionen* der Funktion f auf den Intervallen $[-4, -2)$, $(0, 1)$ beziehungsweise $(2, \infty)$.
Wir betrachten die geometrische Darstellung des Grafen einer Funktion als ein Instrument, mit dem wir Eigenschaften von Funktionen beobachten, „lesen“, entdecken.
Beim *Lesen des Grafen* einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, identifizieren wir:

1) den Definitionsbereich der Funktion;
2) Funktionswerte, als Ordinaten von Punkten des Grafen;
3) Elemente des Definitionsbereichs, in denen die Funktion den Wert m hat (Lösungen der Gleichung $f(x) = m$);
4) die Bildmenge der Funktion (Imf);
5) Elemente des Definitionsbereichs, in denen die Funktionswerte kleiner oder größer als m sind (Lösungen der Ungleichung $f(x) < m$ beziehungsweise $f(x) > m$);
6) die Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$ (die Abszissen der Schnittpunkte der Grafen zweier Funktionen, die im selben Achsensystem dargestellt sind).

2 In der Abbildung nebenan sind drei Funktionen f, g und h dargestellt. Der Graf der Funktion f ist die Gerade PQ, der Graf der Funktion g ist die Gerade PR und der Graf der Funktion h ist die geschlossene Strecke PQ (die Punkte P und Q gehören zu dem Grafen der Funktion h).

a) Mithilfe der geometrischen Darstellung der Grafen:
   1) bestimmt die Koordinaten der Punkte P, Q und R;
   2) berechnet das Bild von 3 durch jede der drei Funktionen;
   3) berechnet das Bild von 0 durch die Funktion g;
   4) zeigt, dass -1 ein Funktionswert von h ist;
   5) bestimmt die Menge der Werte der Funktion h.

b) Bestimmt mithilfe der Koordinaten der Punkte P, Q und R den Definitionsbereich, den Wertebereich und die Funktionsgleichung einer jeden Funktion.



Lösung:

a) 1) $P(3, 2)$, $Q(-1, -1)$ und $R\ (0, 4)$. 2) $P \in G_f$, $P \in G_g$, $P \in G_h$ und $f(3) = g(3) = h(3) = 2$.
($x = 3$ ist die Lösung der Gleichungen $f(x) = g(x)$, $f(x) = h(x)$, $g(x) = h(x)$)
3) Aus $R\ (0, 4) \in G_g$ folgt, dass $g(0) = 4$. Das Bild von 0 durch die Funktion g ist also 4.
4) Aus $Q(-1, -1) \in G_h$ folgt, dass $h\ (-1) = -1$. Das Bild von -1 durch die Funktion h ist also -1.

5) Der Graf der Funktion h ist die geschlossene Strecke PQ mit $P(3,2)$, $Q(-1, -1)$. Wenn $M(x, y) \in PQ$, dann ist $y \in [-1, 2]$. Also ist $Imh = [-1, 2]$.

b) Der Graf der Funktion f ist die Gerade PQ, also $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

$$\left.\begin{array}{r} P(3,\ 2) \in G_f \\ Q(-1,\ -1) \in G_f \end{array}\right\}, \text{ folglich } \left\{\begin{array}{l} 3a + b = 2 \\ -a + b = -1 \end{array}\right. \text{ mit der Lösung } a = \frac{3}{4} \text{ und } b = -\frac{1}{4}.$$

Man erhält $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$.

Analog, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\ (x) = mx + n$.

$$\left.\begin{array}{r} P(3,\ 2) \in G_g \\ R(0,\ 4) \in G_g \end{array}\right\} \text{ folglich } \left\{\begin{array}{l} 3m + n = 2 \\ m \cdot 0 + n = 4 \end{array}\right. \text{ mit der Lösung } a = -\frac{2}{3} \text{ und } n = 4.$$

Man erhält $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g\ (x) = -\frac{2}{3}x + 4$.

Der Punkt $M(x, y)$ gehört nur dann zur geschlossenen Strecke PQ, wenn $x \in [-1,3]$. Also $M(x, y) \in G_h \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in [-1,3]$. Man erhält $h: [-1,3] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ (dieselbe Funktionsgleichung wie bei der Funktion f).

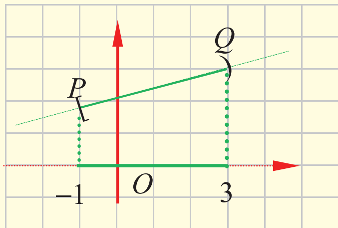
Schlussfolgerung.

1) In einer Ebene mit festgelegtem kartesischen Koordinatensystem xOy wird der Graf G_f der Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, wobei a und b gegebene reelle Zahlen sind, und D ein Intervall der Form $(p,\ q)$, $[p, q]$, $(p, q]$ oder $[p, q)$, $p, q \in \mathbb{R}$, als Strecke PQ dargestellt, mit $P(p, ap + b)$ und $Q(q, aq + b)$. Die Punkte P und Q gehören oder gehören nicht zu dem Grafen der Funktion f, je nachdem, ob D an dem Ende ein geschlossenes oder offenes Intervall ist.

2) In einer Ebene mit festgelegtem kartesischen Koordinatensystem wird der Graf G_f der Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, wobei a und b gegebene reelle Zahlen sind, und D ein Intervall der Form (p, ∞) oder $[p, \infty)$, $p, q \in \mathbb{R}$, als Halbgerade PM dargestellt, mit $P(p, ap + b)$ und $M(m, am + b)$, $m > p$. Der Punkt P gehört oder gehört nicht zu dem Grafen der Funktion f, je nachdem, ob das Intervall D links geschlossen oder offen ist.

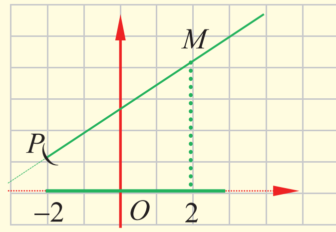
Beispiel 1

Die Funktion $f : [-1,3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0{,}25x + 2{,}25$, ist die Restriktion der Funktion I. Grades mit der Zuordnung $x \to y = 0{,}25x + 2{,}25$. Deshalb ist der Graf der Funktion f die Strecke $[PQ)$, mit $P(-1, 2)$, $Q(3,3)$, $P \in G_f$, und $Q \notin G_f$.



Beispiel 2

Die Funktion $g : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = 0{,}75x + 2{,}5$, ist die Restriktion der Funktion I. Grades mit der Zuordnung $x \to y = 0{,}75x + 2{,}5$. Deshalb ist der Graf der Funktion g die Halbgerade $(PM$, mit $P(-2 , 1)$, $M(2, 4)$ und $P \notin G_g$.



MINITEST Wählt die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort ist richtig.

1. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Der Punkt, der zu G_f gehört, ist:			
A. $A(1, 2)$	**B.** $B(-1, 2)$	**C.** $C(1, -2)$	**D.** $D(2, 1)$
2. Gegeben ist die Funktion $f : [2 , 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$. Der Punkt, der nicht zu G_f gehört, ist:			
A. $A(2, -1)$	**B.** $B(4, -5)$	**C.** $C(3, -3)$	**D.** $D(1, 2)$
3. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 4$. Der Punkt $A(-1, 1)$ gehört zu G_f, wenn a ist:			
A. -1	**B.** 1	**C.** 3	**D.** 2

Aufgaben

1 Gegeben sind die Funktionen:

$f: [2 , 4] \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$

$g : (1, 4) \to \mathbb{R}, g(x) = -x + 3$

$h: (-4, 1] \to \mathbb{R}, h(x) = 2x + 5$

$u : [-2, 3) \to \mathbb{R}, u(x) = -2x + 1$

a) Stellt die Funktionen grafisch dar.

b) Bestimmt durch Lesen der Grafen die Bildmengen der Funktionen.

2 Gegeben sind die Funktionen:

$f : [2 , \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$

$g : (-\infty, 4) \to \mathbb{R}, g(x) = -x - 2$

$h: (-4, \infty) \to \mathbb{R}, h(x) = -2x - 5$

$u : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}, u(x) = -3$

a) Stellt die Funktionen grafisch dar.

b) Bestimmt durch Lesen der Grafen ihre Bildmengen.

3 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (m - 1) \cdot x + 2n + 3$.

a) Bestimmt m und n, sodass die Punkte $A(-1, 1)$ und $B(2, 4)$ zum Grafen der Funktion gehören.

b) Stellt die Funktion in einem orthogonalen Achsensystem grafisch dar.

4 **a)** Bestimmt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = ax + b$, deren Graf durch die Punkte $A(5; 6)$ und $B\left(\frac{5}{3}; 4\right)$ läuft.

b) Zeichnet ihren Grafen und bestimmt die Schnittpunkte des Grafen mit den Koordinatenachsen.

c) Berechnet den Inhalt der Fläche begrenzt vom Grafen und den Koordinatenachsen.

5 Gegeben sind die Funktionen:

$f: [2\,,6] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{3x+2}{4}$

g: $[6, 8] \to \mathbb{R},\ g(x) = -\dfrac{3}{2}x + 14$

$h: [2, 8] \to \mathbb{R},\ h(x) = 2$.

Die Schnittpunkte der Grafen dieser Funktionen bezeichnet man mit A, B und C wie folgt:

$G_f \cap G_g = \{A\};\ G_g \cap G_h = \{B\};\ G_h \cap G_f = \{C\}$.

a) Stellt die Funktionen grafisch dar.

b) Bestimmt durch Lesen der Grafen die Koordinaten der Punkte A, B und C.

c) Berechnet die Fläche des Dreiecks ABC.

d) Berechnet die Seitenlängen des Dreiecks ABC.

6 Gegeben ist die Funktion $f: A \to \{0, 1, 3, 4\}$, $A \subset \mathbb{R}$ und $f(x) = 2x - 1$.

a) Beweist, dass $A \cap \left\{\dfrac{1}{2}; 1; 2; \dfrac{5}{2}\right\} \neq \varnothing$.

b) Schreibt 4 Funktionen $f: A \to B$.

c) Wie viele Funktionen $f: A \to \{0, 1, 3, 4\}$ gibt es? Begründet.

7 Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} |x|, & x \le 2 \\ 7-2x, & x > 2 \end{cases}$.

a) Berechnet $f(-1), f(2), f(a), f(a^2),\ a \in \mathbb{R}$.

b) Löst die Gleichung $f(x) = 1$.

8 Sei $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + 1$, eine Funktion.

a) Bestimmt die Zahl a, wenn der Punkt $M(-1, 2)$ zum Grafen der Funktion f gehört.

b) Für $a = -1$ schreibt die Wertetabelle und stellt die Funktion f grafisch dar.

9 Die Grafen der Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a$, und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x + b$, enthalten den Punkt $A(-1; 2)$.

a) Bestimmt die Zahlen a und b und schreibt nochmals die Funktionsgleichungen.

b) Stellt die Funktionen f und g im selben orthogonalen Koordinatensystem xOy dar.

c) Seien $G_f \cap Oy = \{B\},\ G_f \cap G_g = \{C\}$, $G_g \cap Ox = \{D\}$.
Berechnet die Fläche des Vierecks $BCDO$.

10 **a)** Bestimmt m, sodass der Punkt $A(1, m^2) \in G_f$, wobei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (m^2 - 2)x + m$.

b) Stellt dann die Funktion f grafisch dar.

11 **a)** Bestimmt die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = ax + b$, deren Graf durch die Punkte $A(2; 1)$ und $B(6; -1)$ läuft.

b) Zeichnet ihren Grafen und bestimmt die Schnittpunkte des Grafen mit den Koordinatenachsen.

c) Berechnet den Inhalt der Fläche begrenzt vom Grafen und den Koordinatenachsen.

12 Der Punkt $A(a, 1)$ gehört zum Grafen der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + 0{,}5a$.
Bestimmt den Wert a.

13 Stellt folgende Funktionen grafisch dar:

a) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$

b) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \begin{cases} x-1, x < -1 \\ -x+2,\ x > -1 \end{cases}$

c) $f: A \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| - 1$, wobei
$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, -2 \le \dfrac{2x-1}{3} < 1\right\}$

d) $f: \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le \sqrt{3}\} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \sqrt{3} \cdot x - 1$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -2,\ x < 0 \\ 0,\ x = 0 \\ 2,\ x > 0 \end{cases}$

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} |x+3|,\ x \le -3 \\ x+1,\quad x > -3 \end{cases}$

14 Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a \cdot x + b$.

a) Bestimmt a und b, wenn die Punkte $A(2, 0)$ und $B(0, 6)$ zum Grafen von f gehören.

b) Stellt die Funktion f für die bei Punkt **a)** gefundenen Werte grafisch dar.

c) Bestimmt den Abstand vom Ursprung zu der Geraden, die der Graf der Funktion ist.

d) Ist M der symmetrische Punkt von A und N der symmetrische Punkt von B in Bezug auf den Ursprung des orthogonalen Achsensystems, bestimmt den Umfang und die Fläche des Vierecks $ABMN$.

3 Elemente der Statistik

L1. Sortieren und Organisieren von Daten nach funktionalen Abhängigkeitskriterien, absolute Häufigkeit

Wir erinnern uns!

Zwischen zwei nicht leeren Menge A und B gibt es eine *funktionale Abhängigkeit,* falls durch eine beliebige Regel *jedem Element* aus der Menge *A ein einziges Element* der Menge B entspricht.

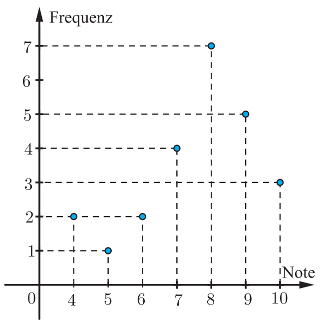
Funktionale Abhängigkeiten können mithilfe von *Tabellen, Grafen, Diagrammen oder mathematischen Formeln* ausgedrückt werden.

Wenn $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ die Menge der Noten bei einem Test ist und $B = \mathbb{N}$, definiert man die funktionale Abhängigkeit $x \rightarrow y$, indem jeder Note x die natürliche Zahl y, die Anzahl der Schüler, welche die Note x haben, zugeordnet wird (y heißt Frequenz oder Häufigkeit des Wertes x).

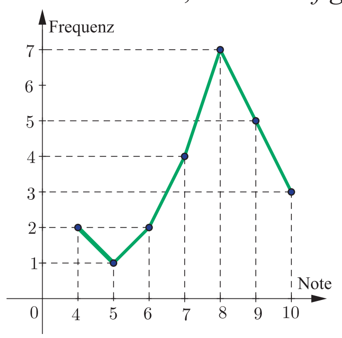
Note	4	5	6	7	8	9	10
Frequenz	2	1	2	4	7	5	3

Der Graf einer funktionalen Abhängigkeit von der Menge A zur Menge B ist die Menge der Paare (x, y), $x \in A$, $y \in B$, sodass $x \rightarrow y$. Das heißt, dem Element x aus der Menge A entspricht das Element y aus der Menge B.

Beispiel: Der Graf der funktionalen Abhängigkeit ist die Menge der Paare (4, 2), (5, 1), (6, 2), (7, 4), (8, 7), (9, 5), (10, 3). *Der Streckenzug,* der beim Verbinden der Punkte des Grafen erhalten wird, heißt *Häufigkeitspolygon* oder *Frequenzpolygon.*



Der Graf der funktionalen Abhängigkeit



Das Häufigkeitspolygon

Die Menge der Punkte mit den Koordinaten (4, 2), (5, 1), (6, 2), (7, 4), (8, 7), (9, 5), (10, 3) ist die geometrische Darstellung des Grafen der funktionalen Abhängigkeit.

Bemerkungen: Das Häufigkeitspolygon hilft, die *Frequenzen* (Anzahl der Vorkommen) zweier verschiedener Größen zu vergleichen, zu beobachten, welcher dieser Werte einen höheren *Anteil* hat, den *Mittelwert* zu schätzen.

Wir lösen und stellen fest

Statistische Daten sind Charakterisierungen realer oder imaginärer Entitäten. Die Daten können durch Symbole, Zahlen, Buchstaben, Buchstabengruppen, Bilder, Noten und mehr geschrieben werden.

Beispiel 1. *Die Augenfarbe* der Schüler des Malereikurses wird als *Daten* in einer Tabelle festgehalten:

Schüler	*S* 1	*S* 2	*S* 3	*S* 4	*S* 5	*S* 6	*S* 7	*S* 8
Augenfarbe	braun	blau	braun	grün	schwarz	blau	schwarz	braun

Die Menge aller *Einheiten* (ähnliche Dinge oder Ereignisse), aus der eine Stichprobe gezogen wird, um sie statistisch auszuwerten, heißt *statistische Population*.

Das gemeinsame Merkmal der *Einheiten* (Schüler), die Eigenschaft, Augen einer bestimmten Farbe zu haben, wird als *Merkmal* oder *Variable* bezeichnet. Sie hat die *Werte*: blau, grün, braun, schwarz.

Beispiel 2. *Die Noten,* die die Schüler einer Klasse bei einem Test erhalten, bestimmen *eine Variable,* die mit *T* bezeichnet wird, und *eine Reihe von Daten,* die den Werten der *Variablen T* entspricht.
T: 8, 6, 10, 7, 5, 9, 8, 10, 8, 9, 7, 10, 8, 7, 5, 9, 10, 8, 9, 9, 7, 9, 8, 7, 8

Die definierte *Variable* (*Merkmal*) ist die Note, die die Schüler der Klasse beim Test erhalten haben. Diese Variable hat numerische Werte, ganze Zahlen zwischen 5 und 10.
Beim Vergleich der beiden oben vorgestellten Datensätze beobachten wir Folgendes:

Beispiel 1 stellt eine Reihe von Daten dar, die eine Charakterisierung, eine Wertschätzung, durch eine *Qualität* der Augen jedes Schülers machen. Dabei handelt es sich um *qualitative Daten*, die ein *qualitatives Merkmal* oder *eine quantitative Variable* definieren.

Beispiel 2 zeigt einen Satz von Daten, die durch Zahlen ausgedrückt werden. Dabei handelt es sich um *numerische* oder *quantitative Daten*, die ein *numerisches* oder *quantitatives* Merkmal oder *eine quantitative Variable* definieren.

Die Form, in der die Daten dargestellt werden, ist manchmal schwer nachzuverfolgen und zu analysieren. Eine Gruppierung von Daten wäre nützlich.

Bemerkungen *Die Werte* der numerischen Variablen können geordnet werden, was wichtige Vorteile bei der synthetischen Darstellung der Daten mit sich bringt.

Beispiel 3. Indem wir die Höhe (in cm) jedes Schülers in einer Klasse aufzeichnen, erhalten wir die numerische Reihe von Daten aus der Tabelle nebenan:

159	144	138	147	154	135	159
143	149	149	138	145	145	156
143	154	154	136	149	132	132
156	143	132	152	143	134	155

Wir verstehen anhand von Beispielen

Die Daten in der obigen Tabelle sind schwer zu analysieren, wir brauchen ein weiteres, besser *organisiertes* Schreiben der Daten. Wir ordnen die Werte der *numerischen Variable* nach der *Höhe* der Schüler der Klasse an und erstellen die Tabelle nebenan.

132	132	132
134		
135		
136		
138	138	

143	143	143	143
144			
145	145		
147			
149	149	149	

152		
154	154	154
155		
156	156	
159	159	

Die unterschiedlichen Werte der Höhe sind in die Spalte geschrieben, und horizontal sind die sich wiederholenden hinzugefügt.
Diese Tabelle gibt uns die Möglichkeit, mehrere Fragen zu beantworten.

Frage	*Antwort*
1. Was ist der Unterschied zwischen den höchsten und den kürzesten Schülern?	159 – 132 = 27 (cm)
2. Was ist die höchste Anzahl von Schülern, die die gleiche Höhe haben? Wie groß sind sie?	Die höchste Anzahl von Schülern mit der gleichen Höhe ist 4. Sie sind 143 cm groß.

Die Werte der numerischen Variable *die Höhe der Schüler* sind ganze Zahlen zwischen 132 und 159. Wenn wir uns die vorherige Tabelle ansehen, stellen wir fest, dass es nur wenige Schüler gibt, die gleiche Höhen haben. Da der Höhenunterschied von weniger als 5 cm nicht relevant ist, können wir Höhengruppen oder Werteklassen bilden. Wir teilen das Intervall [132, 159] der Länge 159 – 132 = 27 (Differenz zwischen maximaler und minimaler Höhe) in folgende Intervalle: [132, 135), [135, 140), [140, 145), [145, 150), [150, 155), [155, 159] und erstellen eine neue Tabelle.

Höheninterval	Höhe der Schüler der 8. Klasse	Anzahl der Schüler mit der Höhe im Intervall
[132, 135)	132, 132, 132, 134	4
[135, 140)	135, 136, 138, 138	4
[140, 145)	143, 143, 143, 143, 144	5
[145, 150)	145, 145, 147, 149, 149, 149	6
[150, 155)	152, 154, 154, 154	4
[155, 159]	155, 156, 156, 159, 159	5

Bemerkung. Die Werte desselben Merkmals (Variablen) wurden in verschiedenen Tabellen aufgezeichnet. Es kann leicht festgestellt werden, dass die letzte Tabelle die effektivste ist.

Definition. Die Anzahl der Vorkommen eines Wertes der Variablen in einer Reihe von Daten wird als *absolute Häufigkeit* dieses Werts bezeichnet.

Anwendungen

Die *Tabelle der absoluten Frequenzen* zu erfassen, bedeutet, in einer Tabelle die funktionale Abhängigkeit von der Menge der Merkmale zu der Menge der natürlichen Zahlen aufzuzeichnen, in der jeder Wert der Variablen mit seiner absoluten Frequenz übereinstimmt.
Wir erstellen für jedes der vorherigen Beispiele die Tabelle der absoluten Frequenzen.

Beispiel 1. Die Werte der Variablen sind Augenfarben: „blau", „grün", „braun", „schwarz".

Absolute Frequenzen sind natürliche Zahlen.

Die Frequenztabelle ist nebenan.

Augenfarbe	Absolute Frequenz
blau	2
grün	1
braun	3
schwarz	2

Beispiel 2. Variable Werte sind die Noten, welche die Schüler erhalten haben, {5, 6, 7, 8, 9, 10}.
Absolute Frequenzen sind natürliche Zahlen.
Die Frequenztabelle ist nebenan.

Note	Absolute Frequenz
5	2
6	1
7	5
8	7
9	6
10	4

Beispiel 3. Aufgrund der Tabelle der Höhenintervalle der Schüler erhalten wir die absoluten Frequenzen der Höhenwertklassen.

Höhen-klasse	Absolute Frequenz
[132, 135)	5
[136, 140)	3

Höhen-klasse	Absolute Frequenz
[140, 145)	5
[145, 150)	6

Höhen-klasse	Absolute Frequenz
[150, 155)	4
[155, 159]	5

Wir haben gesehen, dass die Aufzeichnung von absoluten Frequenzen durch Tabellen mit zwei Spalten oder zwei Zeilen erfolgt. In der ersten Spalte bzw. Zeile werden die Werte der Variablen (Merkmal) aufgezeichnet, in der zweiten wird die absolute Frequenz aufgezeichnet, die jedem Wert entspricht.

Aufgaben

1 Der Klassenlehrer einer Klasse mit 28 Schülern sammelt für die statistische Verarbeitung die erhaltenen Durchschnittsnoten in Mathematik im ersten Semester. Bestimmt: die statistische Bevölkerung, das Bevölkerungsvolumen und die statistische Variable.

2 In einer Firma wurde eine Datenbank über die Dienstjahre und die Studien der Angestellten erstellt.

Angestellter	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
Dienstjahre	6	8	5	5	6	8	8	7	8	7
Studien	Lyzeum	Hoch-schule	Hoch-schule	Lyzeum	Hoch-schule	Hoch-schule	Hoch-schule	Hoch-schule	Hoch-schule	Hoch-schule

a) Wie viel Prozent stellt die Anzahl der Angestellten, die nur einen Lyzeumsabschluss haben, von jenen mit Hochschulabschluss dar?

b) Bestimmt das Dienstalter der meisten Angestellten (das die größte Frequenz hat).

3 An 20 aufeinanderfolgenden Tagen wurde die Abfallmasse in kg, die sich aus dem landwirtschaftlichen Produktionsprozess ergab, in einer Tabelle erfasst.

Tag	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	t_{16}	t_{17}	t_8	t_{19}	t_{20}
kg	78	80	76	81	79	80	77	78	81	81	75	83	80	79	78	83	80	80	82	79

a) Gruppiert die Daten in Werteklassen. Bildet zwei solcher Gruppen.

b) Bestimmt die maximale Abfallmasse, die auf dem Hof an einem Tag auftritt.

4 Eine Automobilfabrik hat in den letzten drei Jahren jeweils 10 % mehr Produktion erreicht als im Vorjahr.

a) Wenn das Werk 100 000 Autos im Jahr 2016 produzierte, füllt die folgende Tabelle aus:

Jahr	2016	2017	2018	2019
Anzahl der erzeugten Autos	100 000			

b) Bestimmt die Gesamtzahl der in den letzten drei Jahren hergestellten Autos.

5 In der Pilotprüfung der nationalen Evaluation im Fach Mathematik haben die Schüler einer Schule die folgenden Punkte (von 100 möglichen) erhalten

75, 64, 58, 81, 76, 93, 96, 58, 65, 73, 84, 82, 97, 51, 99, 100, 87,100, 64, 86, 99, 53, 77, 62,74, 55, 98, 60, 70, 88.

Gruppiert die Daten in Werteklassen der Länge 10 und füllt folgende Tabelle aus:

Punkte-Intervall	< 50	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89	90 – 100
Anzahl der Schüler	0	5				

L2. Geometrische Darstellung statistischer Reihen

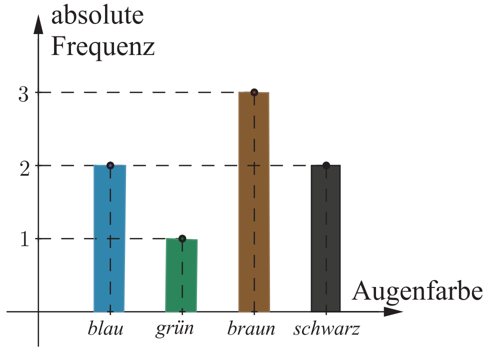
Wir verstehen anhand von Beispielen

Um die funktionale Abhängigkeit, durch die jeder *Wert der Variablen* durch seine *absolute Frequenz* abgeglichen wird, so einfach wie möglich zu beobachten, zu vergleichen und auszuwerten, wird sie geometrisch durch Grafen oder Diagramme dargestellt. Die Abszissen der Punkte des Grafen haben die Werte der Variablen und die Ordinaten die Werte der absoluten Frequenzen.

Unser Ziel ist es, die Balkendiagramme entsprechend den Beispielen der vorherigen Lektion zu erstellen. Wir werden sie neben den Frequenztabellen zeichnen.

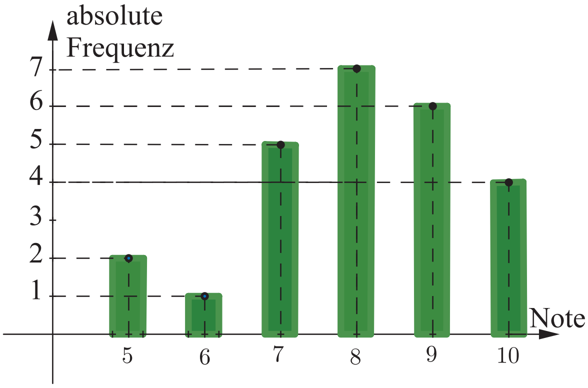
Beispiel 1. Die Farbe der Augen der am Malereikreis teilnehmenden Schüler

Augenfarbe	Absolute Frequenz
blau	2
grün	1
braun	3
schwarz	2



Beispiel 2. *Noten,* die von den Schülern einer Klasse bei einem Test erhalten wurden

Note	Absolute Frequenz
5	2
6	1
7	5
8	7
9	6
10	4



Anwendungen

Beispiel 3. Die Höhe der Schüler der Klasse, der Graf der Frequenz

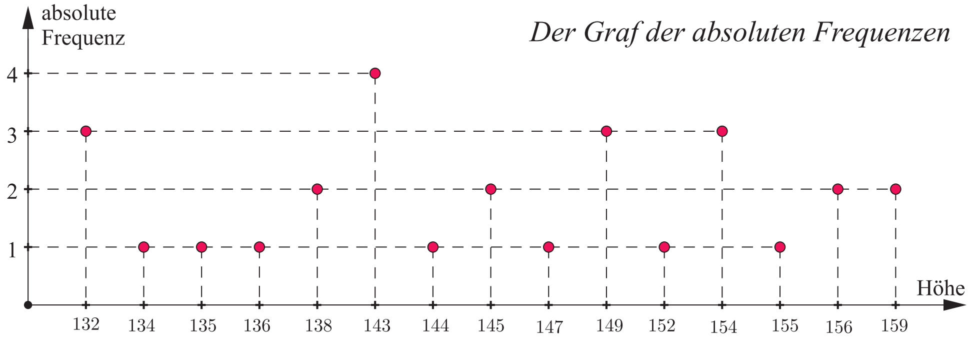
Höhe	Frequenz
132	3
134	1
135	1
136	1
138	2

Höhe	Frequenz
143	4
144	1
145	2
147	1
149	3

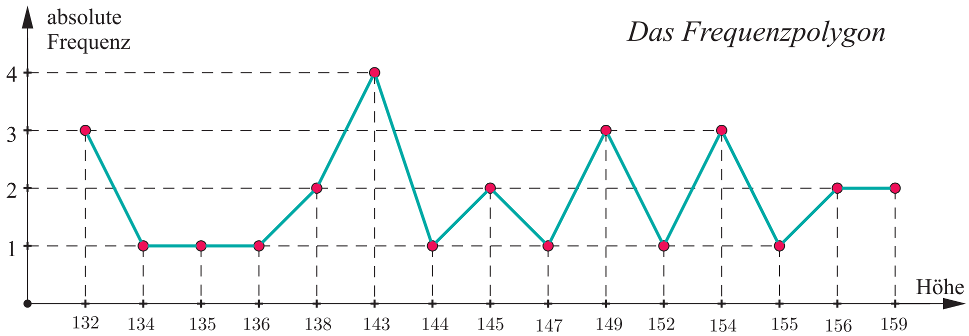
Höhe	Frequenz
152	1
154	3
155	1
156	2
159	2

Der Graf der absoluten Frequenzen der Höhen der Schüler ist die Menge {(132, 3), (134, 1), (135, 1), (136, 1), (138, 2), (143, 4), (144, 1), (145, 2), (147, 1), (149, 3), (152, 1), (154, 3), (155, 1), (156, 2), (159, 2)}. Es ist schwierig, daraus Informationen zu erhalten.

Wir werden diesen Graf *geometrisch darstellen,* um ein klareres Bild des Gewichts der Werte der Höhen zu haben.



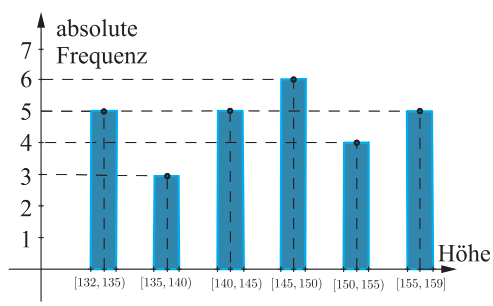
Das Frequenzpolygon bietet ein klareres Bild des Gewichts der Höhenwerte.



Für die Beobachtung allgemeiner Aspekte bietet die Gruppierung von Daten nach Werteklassen die Möglichkeit, aufschlussreiche grafische Bilder zu erstellen.

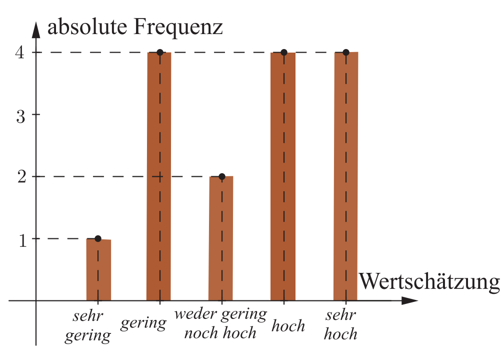
Beispiel 4. Die Höhen der 28 Schüler, ausgedrückt in cm, gruppiert nach Werteklassen

Werteklasse/Intervall	Frequenz
[132, 135)	5
[136, 140)	3
[140, 145)	5
[145, 150)	6
[150, 155)	4
[155, 159]	5



Beispiel 5. Wertschätzung der pädagogischen Auswirkungen einer bestimmten Fernsehsendung auf jugendliche *Konsumenten*

Wertschätzung	Frequenz
Sehr gering	1
Gering	4
Weder gering noch hoch	2
Hoch	4
Sehr hoch	4



Aufgaben

1 Die Daten aus der Befragung von Achtklässlern einer Schule über das Profil und die Spezialisierung, die sie im Bereich der Schulbildung wählen möchten, sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Klasse / Profil, Fachrichtung	8 A	8 B	8 C	8 D	Total
Real, Mathematik-Informatik	6	8	10	8	32
Real, Naturwissenschaften	7	5	8	6	
Human, Philologie	3	5	3	8	
Sport, Gymnastik	4	5	-	2	
Kunst, Bildende Kunst	4	5	3	-	
Gesamtzahl der Schüler der Klasse	24	28	24	24	

a) Schreibt die Tabelle in eure Hefte und füllt die letzte Spalte aus.
b) Bestimmt die Spezialisierung, die von den meisten Schülern gewünscht wird.
c) Bestimmt prozentual die Anzahl der Schüler, die das reale Profil, Mathematik-Informatik, wählen möchten.
d) Erstellt ein Balkendiagramm für die Variable „Profil, Fachrichtung“, das die Achtklässler und ihre Vorlieben für die lyzeale Ausbildung enthält.
e) Stellt das Diagramm, das den Optionen jeder Klasse entspricht, geometrisch dar.

2 Fünf Sportler nehmen an einem Schießwettbewerb teil und schießen jeweils dreimal auf ein Ziel.

Mögliche Punkte sind natürliche Zahlen von 0 bis 10, und die Ergebnisse der Sportler sind:

Sportler	S_1			S_2			S_3			S_4			S_5		
Punkte	8	9	10	9	9	10	10	9	10	8	8	10	9	8	9

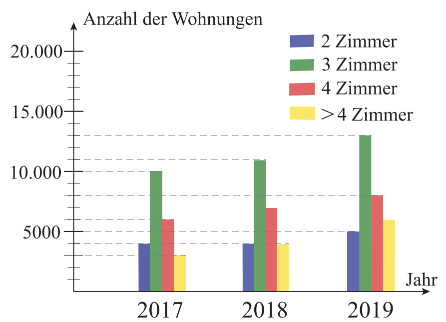
a) Erstellt die Variable-Frequenz-Tabelle, die die *Anzahl der Punkte* beschreibt, die bei den Proben erzielt wurden.
b) Mithilfe der Tabelle von Punkt a) erstellt das Balkendiagramm der Häufigkeit der Anzahl der erzielten Punkte.
c) Bestimmt die Punktzahl mit der größten Frequenz und die Punktzahl mit der kleinsten Frequenz.

3 Die Tabelle erfasst die Lieblingslektüre der Schüler einer Klasse.

Typ der Lektüre / Schüler	Krimis	Science-fiction	Abenteuer	Total
Mädchen	1	4		
Jungen	5		3	
Total		10	8	

a) Füllt die leeren Stellen in der Tabelle aus.
b) Gebt die Art der Literatur an, die von den meisten Mädchen bevorzugt wird, dann die Art der Literatur, die von den meisten Jungen bevorzugt wird.
c) Zeichnet in denselben Grafen das Frequenzpolygon der Variablen „Die bevorzugte Art der Literatur der Mädchen“, dann das Frequenzpolygon der Variablen „Die bevorzugte Art der Literatur der Jungen“.

4 Das Rathaus einer Stadt hat jedes Jahr eine Studie über die Anzahl der Wohnungen mit 2 Zimmern, 3 Zimmern, 4 Zimmern und mehr als 4 Zimmern, in denen die Bürger der Stadt leben, unternommen. Die Ergebnisse der Umfrage 2017, 2018 und 2019 werden nebenan dargestellt.
a) Findet heraus, bei welcher Art von Wohnungen der größte Anstieg im Jahr 2019 im Vergleich zu 2017 war.
b) Berechnet, wie viele Wohnungen von 2017 bis 2019 gebaut und in Gebrauch gebracht wurden.



L3. Zentrale Trendindikatoren

Wir verstehen anhand von Beispielen

Die Statistik untersucht Phänomene oder Prozesse, die in einer großen Anzahl *statistischer Einheiten* auftreten und von einer statistischen Einheit zur anderen variieren. Tabellen und Grafiken liefern keine ausreichenden Hinweise auf ein Phänomen, in den meisten Fällen sind Charakterisierungen durch *statistische Merkmale* erforderlich.
Die *statistischen Merkmale* sind reelle Zahlen, die Informationen einer Reihe von Daten zusammenfassen. Das ermöglicht, die gesamte statistische Reihe zu bewerten.
Die *zentrale Tendenz* einer Reihe von Daten kann durch eindeutige numerische Werte ausgedrückt werden, die eine synthetische Charakterisierung der typischen, wesentlichen und stabilen Aspekte einer Reihe *numerischer Daten* ermöglichen.
Bei der Analyse numerischer Variablen sind die am häufigsten verwendeten Merkmale der zentralen Tendenz (auch Lagemerkmale genannt): das einfache *arithmetische Mittel (der Mittelwert)*, der *Median* und der *Modus*.

1) *Das arithmetische Mittel* einer Variablen ist der Wert, in dessen Nähe sich die Werte der Reihe von Daten befinden.

a) Für eine Population mit N statistischen Einheiten werden die numerische Variable X und die reellen Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$, die Werte der Variablen X, gegeben.

Definition 1. Der *Mittelwert* der numerischen Variablen X ist die reelle Zahl $M(X)$, das arithmetische Mittel der Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$.

Man schreibt $M(X) = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$

b) Für eine Population mit N statistischen Einheiten werden die *numerische Variable X* und die Werte x_1, $x_2, x_3, \ldots, x_p$, mit den Frequenzen (Gewichten) $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p$, gegeben, sodass $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_p = \text{N}$.

Definition 2. Der *Mittelwert* der numerischen Variablen X ist das arithmetische Mittel der Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$, mit den Gewichten $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p$.

$$M(X) = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_p \cdot n_p}{N}$$

Bemerkung Die Reihenfolge der Werte spielt beim Berechnen des Mittelwertes keine Rolle.

Definition 3. *Der Median einer numerischen Reihe von Daten* ist der Wert, der größer ist als die eine Hälfte der Werte und kleiner als die andere Hälfte.

2) *Der Median* einer Reihe von Daten ist der zentrale Wert dieser Reihe, nachdem die Werte *angeordnet* wurden.

Man bezeichnet den Median der Variablen X mit $Me(X)$.
a) Sind die geordneten Werte der numerischen Variablen X $x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < \ldots < x_{2k+1}$, dann ist $Me(x) = x_{k+1}$.
b) Sind die geordneten Werte der numerischen Variablen X $x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_{2k}$, dann ist $Me(x) = \dfrac{(x_k + x_{k+1})}{2}$. Zum Berechnen des Medians einer Reihe von Daten werden die Werte zuerst angeordnet und dann der zentrale Wert bestimmt. Sind die Daten in Klassen gruppiert, nennt man die Klasse, die den *Median* enthält, *Medianklasse*.

1. Anwendung: Die Löhne der Beschäftigten eines kaufmännischen Bereichs im Januar werden durch folgende Zahlenwerte angegeben:

S: 2500, 2400, 2100, 2500, 9990, 1980, 1990, 2230, 2780, 2450, 2124.

a) Berechnet den Mittelwert der Löhne der Beschäftigten im Januar.

b) Ordnet die Werte steigend an und bestimmt den Median der Variablen.

c) Erstellt die Reihe von Daten DIF 1, die der Differenz zwischen dem tatsächlichen Gehalt und den Durchschnittslöhnen jedes Mitarbeiters entspricht.

d) Bestimmt den *Median* von DIF 1.

e) Erstellt die Reihe von Daten DIF 2, die der Differenz zwischen dem tatsächlichen Lohn und dem Median entspricht, und berechnet dann den *Median* dieser neuen Reihe von Daten.

f) Stellt fest, welches Merkmal mehr über die realen Löhne aussagt.

Lösung. **a)** Mithilfe der Formel für das arithmetische Mittel erhält man M(S) = **3004** lei.

b) S: $\underbrace{1980, 1990, 2100, 2124, 2230}_{\text{fünf Werte}}$, **2400**, $\underbrace{2450, 2500, 2500, 2780, 9990}_{\text{fünf Werte}}$.

Von den 11 Werten der Variablen sind 5 kleiner als 2400 und 5 größer als 2400. Deshalb ist der *Median* 2400. Man schreibt Me(S) = 2400.

c) Die Differenzen zwischen dem tatsächlichen Lohn und dem Mittelwert M(S) = 3004 für jeden Mitarbeiter sind die Werte:

DIF 1: –504, –604, –904, –504, +6986, –1024, –1014, –774, –224, –554, –880.

d) Geordnet sind sie:

DIF 1: –1024, –1014, –904, –880, –774, –604, –554, –504 ,–504, –224, +6986.

e) Die Differenzen zwischen dem tatsächlichen Lohn und dem Median Me(S) = 2400 für jeden Mitarbeiter sind die Werte:

DIF 2: –420, –410, –300, –276, –170, 0, 50, 100, 100, 380, 7590.

f) DIF 1 zeigt uns, dass von den 11 Mitarbeitern 10 einen unterdurchschnittlichen Lohn haben, mit Werten zwischen 224 Lei und 1024 Lei weniger, nur einer mit einem Gehalt, das um 6986 höher ist als der Durchschnitt.

Daraus folgt, dass der *Mittelwert* kein echter Indikator für die Lohnhöhe der Mitarbeiter ist. Dies wird stark von extremen Werten, dem niedrigsten Wert (1980 Lei) und dem höchsten Wert (9990 Lei) beeinflusst.

Bemerkung. Manchmal werden die Extremwerte aus den Berechnungen des Mittelwertes ausgeschlossen.

DIF 2 zeigt uns, dass von den 11 Mitarbeitern 5 niedrigere Löhne als der Median haben, mit Unterschieden von 170 Lei bis 420 Lei, 4 haben höhere Löhne, mit Unterschieden zwischen 50 Lei und 380 Lei und ein Lohn ist um 7590 höher als der Median.

Wir folgern, dass der *Median* mehr über den realen Lohn der Mitarbeiter aussagt als der Mittelwert.

Definition 4. *Der Modus* oder Modalwert einer Variablen ist der Wert mit der größten Frequenz.

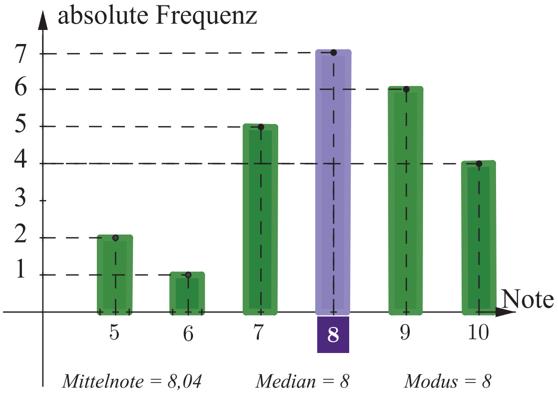
Bemerkung. Der Modus ist nicht unbedingt eindeutig bestimmt; es gibt Reihen von Daten mit mehreren Werten, die eine maximale Frequenz haben. Der Modus der Variablen X wird Mo(X) bezeichnet.

Anwendungen

2. Anwendung: *Die Noten,* die von den Schülern einer Klasse bei einem Test erhalten wurden, sind in der unteren Tabelle enthalten. Bestimmt *die Lagemerkmale* und deutet sie geometrisch.

Note	Absolute Frequenz
5	2
6	1
7	5
8	7
9	6
10	4

Modus



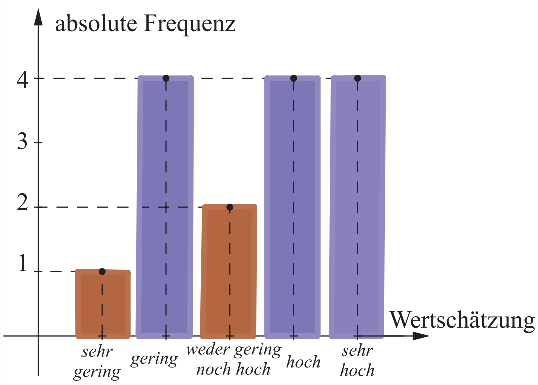
„Note" sei die untersuchte Variable. Dann ist M(*Note*) $= \dfrac{5\cdot 2+6\cdot 1+7\cdot 5+8\cdot 7+9\cdot 6+10\cdot 4}{25} = 8{,}04$.

Me(*Note*) = 8, weil 12 Schüler (2 + 1 + 5 + 4) höchstens die Note 8 und andere 12 Schüler (2 + 6 + 4) mindestens die Note 8 erhalten haben.
Mo(*Note*) = 8, weil der Wert 8 der Variablen die maximale Frequenz hat. Das bedeutet, dass die häufigste Note 8 ist.
Bemerkung. Die Werte der drei Indikatoren sind so nah, weil die Verteilung recht ausgewogen und die Differenz zwischen den extremen Werten relativ klein ist.

Bemerkung. Das Lagemerkmal *Modus* kann auch für *qualitative Variablen* verwendet werden.

3. Anwendung: Die Wertschätzung der pädagogischen Auswirkungen einer bestimmten Fernsehsendung auf jugendliche *Konsumenten* ist in der beigefügten Tabelle angegeben. Bestimmt den *Modus* der gegebenen Variablen.

Wertschätzung	Frequenz
Sehr gering	1
Gering	4
Weder gering noch hoch	2
Hoch	4
Sehr hoch	4



Die maximale Frequenz (4) ist charakteristisch für die Werte *gering*, *hoch* und *sehr hoch*. Hier haben wir eine *multimodale Variable* (mehrere Variablen haben die maximale Frequenz).
In Klassen gruppiert erhalten wir.

Klasse	*Gering oder sehr gering*	*Weder gering noch hoch*	*Hoch oder sehr hoch*
Frequenz	5	2	8

Wir erhalten zwei wichtige Informationen: 1. Bei den meisten Teenagern (mehr als die Hälfte) hatte die Sendung einen großen oder sehr großen Einfluss. 2. Nur zwei der Befragten blieben gleichgültig.

Aufgaben

1 Die Höhen der Achtklässler einer Schule, ausgedrückt in ganzen Zahlen in cm, wurden auf Intervalle der Länge 5 gruppiert. Die so erhaltene statistische Reihe „Höhe“ ist folgende:

Höhe	[155–160)	[160–165)	[165–170)	[170–175)	[175–180)	[180–185)
Anzahl der Schüler	5	11	16	20	8	3
Zentralwert	157					
Begründung der Antwort	Dieses Intervall enthält 5 Werte: 155, 156, 157, 158, 159. In der Mitte liegt der Zentralwert.					

a) Schreibt die Tabelle in eure Hefte und füllt dann den zentralen Wert für jedes Intervall nach dem angegebenen Muster aus.

b) Führt anhand der ermittelten zentralen Werte die erforderlichen Berechnungen aus und zeigt, dass der Mittelwert der Höhe der Schüler M = 168,90 cm ist.

2 Um die Produktivität in einem Unternehmen zu analysieren, wurde eine Stichprobe von 30 Arbeitern ausgewählt. Die Daten über die Herstellung der von den 30 Beschäftigten am Vortag hergestellten Teile sind in der folgenden Tabelle enthalten.

Anzahl der erzeugten Teile	[20–35)	[35–50)	[50–65)	[65–80)	[80–95)
Anzahl der Arbeiter	2	8	9	7	4

a) Berechnet den Mittelwert der von einem Arbeiter erzeugten Teile.

b) Bestimmt das Intervall der erzeugten Teile, für die die Anzahl der Arbeiter die höchste Häufigkeit aufweist.

3 Berechnet den Mittelwert der statistischen Variablen „Note“ aus der unteren statistischen Reihe:

Note	4	5	6	7	8	9	10
Frequenz	1	4	5	7	13	14	6

4 Für Labormessungen wurden folgende Gewichte ausgesucht: 4 g, 3 g, 2 g, 5 g, 1 g, 10 g, 15 g. Ordnet die Werte der Gewichte steigend an und bestimmt den Medianwert der statistischen Reihe. Vergleicht den *Median* der Gewichte mit ihrem *Mittelwert*.

5 Auf einem Regal befinden sich vier verschiedene Flaschen Mineralwasser mit einem Fassungsvermögen von 300 *ml*, 500 *ml*, 1 *l* und 1,5 *l*.

a) Bestimmt den Median (Me) der statistischen Reihe dieser Volumen.

b) Berechnet die Differenz zwischen Me und (M), dem Mittelwert der Volumen der Flaschen.

6 Eine Konditorei verkauft fünf verschiedene Schokoladensorten und erhält dafür insgesamt S Lei.

a) Bestimmt den Mittelwert des Preises einer Schokolade anhand der Daten aus der unteren Tabelle.

Schokoladensorte	A	B	C	D	E
Preis in Lei/Stück	1	8	5	2	4

b) Falls $S = 1000$ Lei, bestimmt die Stückzahl der verkauften Schokoladen jeder Art und erstellt die Tabelle der Frequenzen der Schokoladensorten.

7 Die Löhne, die die Mitarbeiter eines Unternehmens für Produkte erhalten haben, die in einem Monat hergestellt wurden, ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

Monatliche Löhne (Lei)	Anzahl der Mitarbeiter	Zentralwert des Intervalls	Begründung
[2350, 2450)	5	2399,5	Die Werte in dieser Klasse sind 2350,2351, ..., 2449, also eine gerade Zahl (100) von Werten. In der Mitte sind 2399 und 2400 und ihr Mittel ist 2399,5.
[2450, 2550)	15		
[2550, 2650)	35		
[2650, 2750)	30		
[2750, 2850)	10		
[2850, 2950)	5		
Total	100		

a) Schreibt die Tabelle in eure Hefte und füllt die Spalte „Zentralwert" für jede Lohngruppe wie im angegebenen Muster aus.

b) Findet das durchschnittliche Gehalt der Mitarbeiter des Unternehmens, indem ihr alle Löhne einer Gruppe mit ihrem zentralen Wert angleicht.

c) Berechnet den Median und den Modus der statistischen Reihe „Zentralwert des monatlichen Lohns".

Bemerkung. Die Berechnung des Medians einer Gruppe von Variablen erfolgt nach Formeln, die das Niveau des vorliegenden Lehrbuchs überschreiten..

8 Der Stromverbrauch der Mieter eines Blocks mit 25 Wohnungen im April 2019 wurde durch natürliche Zahlen in kW ausgedrückt. Die gruppierten Daten lauten wie folgt:

Stromverbrauch (kW/h)	Anzahl der Wohnungen	Zentralwert	*Geschätzter* Stromverbrauch, per Klasse
70 – 79 kW	2		
80 – 89 kW	3		
90 – 99 kW	10	94,5	945
100 – 109 kW	5		
110 – 119 kW	3		
120 – 129 kW	2		
Total	25		

a) Schreibt die Tabelle in eure Hefte und ergänzt den Zentralwert einer jeden Verbraucherklasse.

b) Berechnet den geschätzten mittleren Stromverbrauch einer jeden Wohnung.

c) Verwendet die Ergebnisse und schätzt:

1. Die Anzahl der Wohnungen mit einem geringeren Stromverbrauch als der Mittelwert.
2. Die Anzahl der Wohnungen mit einem größeren Stromverbrauch als der Mittelwert.
3. Stellt die statistische Reihe als Balkendiagramm dar und nennt die Modalklasse.

SELBSTBEWERTUNGSTEST *Von Amts wegen: 10 Punkte*

1. Teil *Wählt den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht, aus. Nur eine Antwort ist richtig.*

5P **1.** Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x + 1$. Der Wert der Funktion f für $x = -1$ ist:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5P **2.** Gegeben ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax - 1$. Wenn der Punkt $A(-1, 1)$ zum Grafen der Funktion g gehört, dann ist a:

A. 3 B. –2 C. –3 D. 2

5P **3.** Die Menge der Funktionswerte von $h : \{-2; -1; 0; 1; 2\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = |x| - 1$, ist:

A. $\{-2; -1; 0\}$ B. $\{-1; 0; 1; 2\}$ C. $\{-1; 0; 1\}$ D. $\{0; 1; 2\}$

5P **4.** Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 3$, und $f(a) + f(b) + f(c) = 10$, dann ist die Summe $a + b + c$:

A. –1 B. 0 C. 1 D. 3

5P **5.** Der Graf der Funktion g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3 - x$, schneidet die Ox- *Achse* im Punkt:

A. $A(-3, 0)$ B. $B(0, -3)$ C. $C(0, 3)$ D. $D(3, 0)$

5P **6.** Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x + 2$. Wenn $f(a + b) = a - b$, dann ist a:

A. 1 B. –1 C. 2 D. –2

5P **7.** Der Schnittpunkt der Grafen der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 2$, hat die Koordinaten:

A. $(1, -1)$ B. $(1, 1)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, -1)$

5P **8.** Im orthogonalen Achsensystem xOy mit der Maßeinheit Zentimeter wird die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 2$, grafisch dargestellt. Der Flächeninhalt des Dreiecks, das von dem Grafen der Funktion und den Koordinatenachsen bestimmt wird, ist:

A. $2\ cm^2$ B. $4\ cm^2$ C. $1\ cm^2$ D. $3\ cm^2$

2. Teil *Schreibe die vollständigen Lösungen.*

1. Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -\frac{1}{2}x$, und ihre grafischen Darstellungen d und d'.

5P **a)** Berechnet $u \in \mathbb{R}$, wenn $A(2, u) \in d$.

5P **b)** Berechnet $v \in \mathbb{R}$, wenn $B(2, v) \in d'$.

10P **c)** Berechnet die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden d und d'.

10P **d)** Beweist, dass $d \perp d'$.

2. Eine Autofabrik hat in den Jahren 2017, 2018, 2019 jeweils eine Steigerung der Produktion um 5 % im Vergleich zum Vorjahr erzielt.

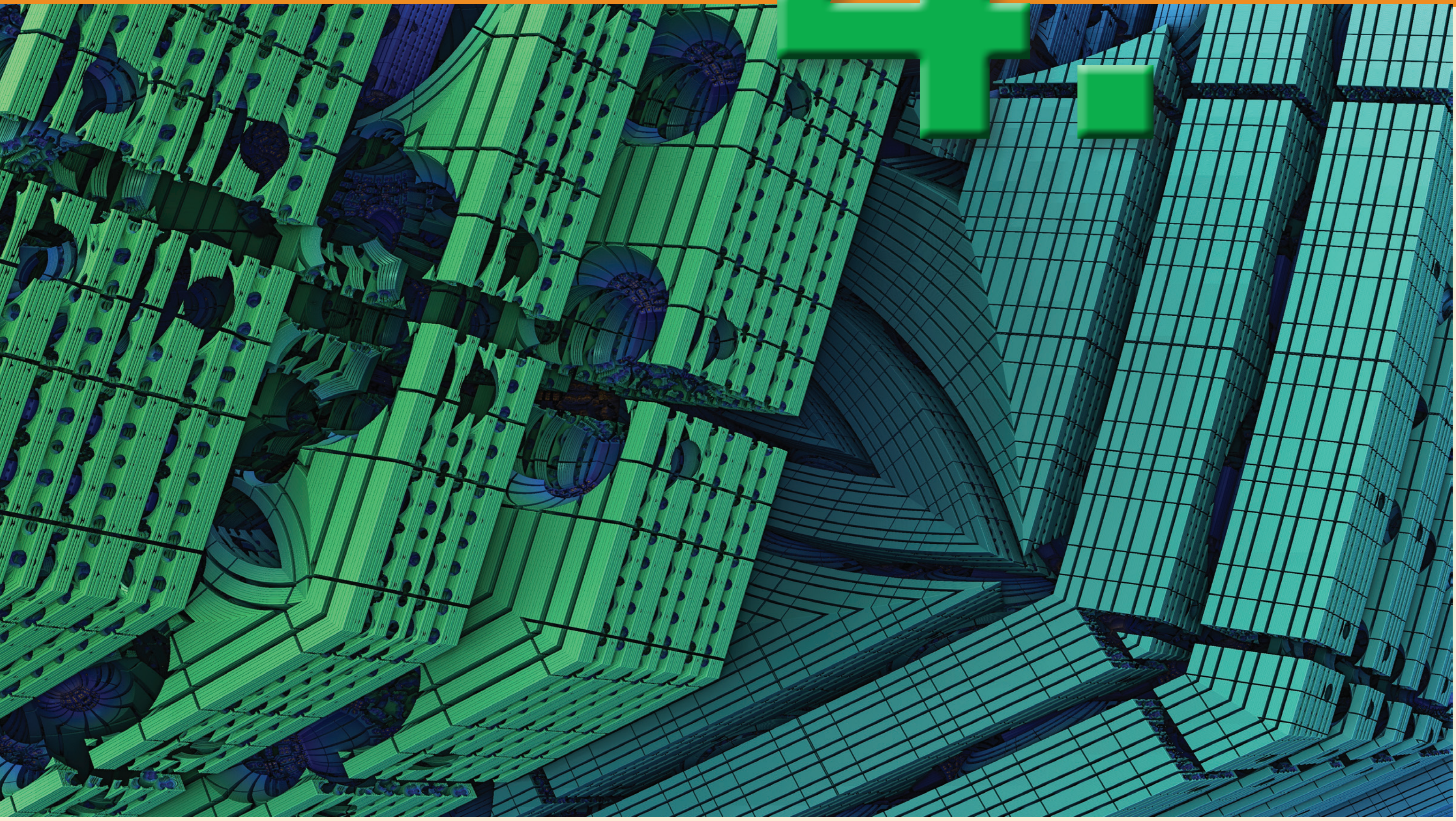
10P **a)** Wenn die Fabrik 2 520 000 Autos im Jahr 2017 hergestellt hat, füllt die Tabelle aus:

Jahr	2016	2017	2018	2019
Zahl der hergestellten Autos		2 520 000		

5P **b)** Bestimmt die Anzahl der Autos, die in den letzten vier Jahren hergestellt wurden.

5P **c)** Stellt die Daten aus der Tabelle in einem Diagramm dar.

4. KAPITEL



Elemente der Raumgeometrie

1 Punkte, Geraden, Ebenen
2 Geometrische Körper
3 Parallelität im Raum
4 Orthogonalität im Raum
5 Orthogonale Projektionen im Raum
6 Der Lehrsatz der drei Senkrechten

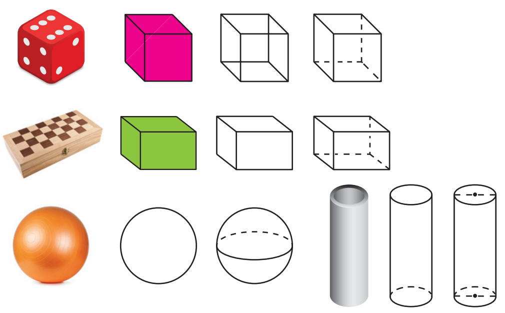
Spezifische Kompetenzen

1.4 2.4 3.4 4.4 5.4 6.4

1 Punkte, Geraden, Ebenen

L1. Punkte, Geraden, Ebenen: Bezeichnungen, Darstellungen. Bestimmen einer Geraden

Die Geometrie ist ein Teilgebiet der Mathematik. Sie studiert Eigenschaften der *geometrischen Figuren* und *Körper*. Ein dreidimensionales Objekt kann *zweidimensional* dargestellt werden. Die unteren Darstellungen sind Beispiele dafür.



Bestimmte Vereinbarungen müssen aber berücksichtigt werden. Wir weisen darauf hin, wie wichtig Konventionen für die Darstellung geometrischer Formen ist. Imagination hilft uns, die gezeichneten Objekte aus verschiedenen Positionen zu betrachten und auch die Elemente zu „sehen“, die sich vor unserem Blick „verstecken“. Für jeden geometrischen Körper sind Konventionen für die Darstellungen festgelegt.

In der Abbildung links erkennen wir die zweidimensionalen Darstellungen einiger bekannter Körper mit ebenen Flächen (der Würfel und der Quader) und mit gekrümmten Flächen (die Kugel und der Zylinder).
Allgemein gilt:

Für die Darstellung eines Objekts durch eine zweidimensionale Zeichnung führen wir folgende Schritte aus:	*Bemerkungen* zur Darstellung der Körper.
1) Wir betrachten das Objekt und stellen den geometrischen Körper fest. 2) Wir bestimmen die äußere Kontur, die aus der gewünschten Position sichtbar ist. 3) Wir stellen die geometrische Konfiguration korrekt dar (mit Konventionen, die aus dem intuitiven Bild stammen).	1) Das Rechteck wird durch ein Parallelogramm dargestellt. Rechte Winkel können, abhängig von wo aus sie „gesehen“ werden, durch Winkel von beliebiger Größe dargestellt werden. 2) Kreise können als Kreise selbst oder als „abgeflachte“ Kreise dargestellt werden.

Wir verstehen anhand von Beispielen

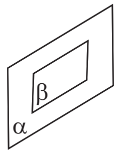
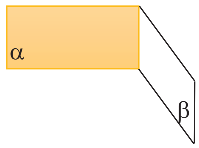
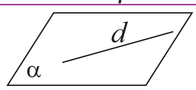
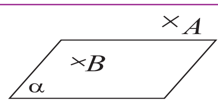
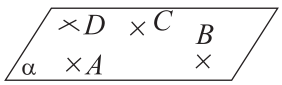
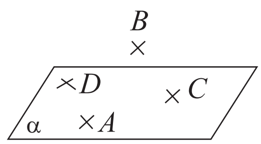
Punkt, Gerade und Ebene sind Grundbegriffe der Geometrie des Raumes. Sie werden in der Ebene laut den Vereinbarungen dargestellt.
Die Axiome der Geometrie der Ebene sowie alle Sätze gelten auch im Raum.

In der *Raumgeometrie* kommen folgende *wahren Aussagen* (Axiome) hinzu:

A. 1. Zwei verschiedene Punkte bestimmen eine Gerade. Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.
A. 2. Drei nicht kollineare Punkte bestimmen eine Ebene. Jede Ebene enthält mindestens drei nicht kollineare Punkte.
A. 3. Im Raum gibt es 4 nicht komplanare Punkte. Das bedeutet, es gibt keine Ebene, die diese 4 Punkte enthält.
A. 4. Wenn zwei verschiedene Ebenen einen gemeinsamen Punkt haben, dann ist ihr Schnitt eine Gerade.
A. 5. Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden gibt es eine einzige Parallele zu dieser Geraden.

Bemerkung. Geometrische Körper können nur durch Vereinbarungen zweidimensional gezeichnet werden.

1. Anwendung: Analysiert die folgenden Bilder, identifiziert Punkte, Geraden, Ebenen. Beachtet die verwendeten Bezeichnungen und wie man die Darstellungen von Elementen im Raum liest.

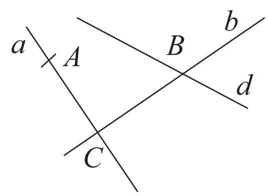
Darstellungen und Bezeichnungen	Lesen	Darstellungen und Bezeichnungen	Lesen
A × B × $A \neq B$	Die Punkte A und B sind *verschieden.*	D C × $C = D$	Die Punkte C und D sind *identisch.*
A - - - - C, B × $B \notin AC$	Die Punkte A, B, C sind *nicht kollinear.*	A B C $AB = BC$ oder $A \in BC$	Die Punkte A, B, C sind *kollinear.*
 $\alpha = \beta$	Die Ebenen α und β sind *identisch.*	 $\alpha \neq \beta$	Die Ebenen α und β sind *verschieden.*
 $d \subset \alpha$	Die Gerade d ist *eingeschlossen* in der Ebene α.	 $A \notin \alpha$ $B \in \alpha$	Der Punkt A ist *außerhalb* der Ebene α. Der Punkt B *gehört* zu der Ebene α.
 $A, B, C, D \in \alpha$	Die Punkte A, B, C, D sind *komplanar*.	 $A, C, D \in \alpha$ und $B \notin \alpha$	Die Punkte A, B, C, D sind *nicht komplanar*.

Wir werden sagen, dass eine oder mehrere Bedingungen eine geometrische Figur *bestimmen*, wenn diese Figur die einzige ist, die alle angegebenen Bedingungen erfüllt.

Die Aussage „Durch zwei verschiedene Punkte geht eine einzige Gerade“ kann wie folgt lauten: „Zwei verschiedene Punkte bestimmen eine Gerade“.

Beispiel: In der Abbildung nebenan gilt:

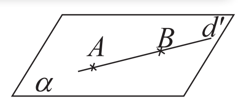
a) $A \notin d$, $A \notin b$;
b) B *bestimmt* die Gerade d nicht (es gibt mehrere Geraden durch B);
c) Die Punkte B und C *bestimmen* die Gerade b;
d) Die Punkte A und C *bestimmen* die Gerade a;
e) Die Punkte A, B, C sind nicht kollinear.



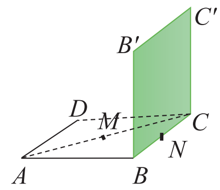
Anwendungen

Lehrsatz: Wenn zwei verschiedene Punkte einer Geraden zu einer Ebene gehören, dann ist die Gerade in der Ebene eingeschlossen.

Beweis: Seien d eine Gerade und α eine Ebene, die zwei verschiedene Punkte A und B der Geraden d enthält. Weil $A, B \in \alpha$, gibt es (laut Axiom der Geometrie der Ebene) die Gerade $d' \subset \alpha$, sodass $A, B \in d'$. Aber durch zwei verschiedene Punkte geht eine einzige Gerade. Folglich sind d und d' identisch, und weil $d' \subset \alpha$, gilt $d \subset \alpha$.



2. Anwendung: Die abgebildeten Quadrate $ABCD$ und $BCC'B'$ liegen in verschiedenen Ebenen. Die Punkte M und N sind die Mitten der Strecken AC bzw. BC. Beweist, dass:
a) die Gerade $B'M$ nicht in der Ebene des Quadrates $ABCD$ liegt;
b) die Gerade $B'N$ in der Ebene des Quadrates $BCC'B'$ liegt;
c) die Gerade MN in der Ebene des Dreiecks ABC liegt;
d) die Gerade AN nicht in der Ebene des Quadrates $BCC'B'$ liegt.



Lösung. **a)** Sei α die Ebene des Quadrates $ABCD$, und α' die Ebene des Quadrates $BCC'B'$. Weil $B' \notin \alpha$, ist $B'M \not\subset \alpha$. **b)** $BC \subset \alpha'$, $N \in BC$, also $N \in \alpha'$. Weil $B' \in \alpha'$ und $N \neq B'$, hat die Gerade $B'N$ zwei verschiedene Punkte auf der Ebene α' des Quadrates $BCC'B'$, liegt somit in dieser Ebene. **c)** Die Ebene des Dreiecks ABC ist α. Weil $M \in AC$ und $AC \subset \alpha$, gilt $M \in \alpha$. Weil $N \in BC$ und $BC \subset \alpha$, ist $N \in \alpha$. Also $MN \subset \alpha$. **d)** $A \notin \alpha'$, folglich $A'N \not\subset \alpha'$.

Aufgaben

1 Seien α eine Ebene und A, B, C verschiedene Punkte, sodass $A, B \in \alpha$, $C \notin \alpha$.
a) Stellt die Situation dar.
b) Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze:
p_1: „$AB \subset \alpha$“; p_2: „$AC \subset \alpha$“; p_3: „$BC \not\subset \alpha$“.

2 Zeichnet eine Ebene α, die Punkte $A, B \in \alpha$, $C \notin \alpha$ und die Gerade $AD \subset \alpha$.

3 Zeichnet:
a) Die Ebene α, die Punkte $A, B \in \alpha$ und die Gerade AB;
b) Die Ebene β, den Punkt $C \in \beta$, den Punkt $D \notin \beta$ und die Gerade CD;
c) Die Ebene γ, die Punkte $E, F \in \gamma$, den Punkt $G \notin \gamma$ und das Dreieck EFG;
d) Die Ebene δ, die Punkte M, N außerhalb der Ebene δ, auf derselben Seite der Ebene, und die Gerade MN.

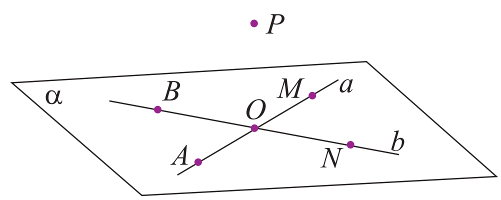
4 Identifiziert eine ebene Fläche in eurem Umfeld. Findet zwei Punkte und zwei Geraden, die in der Ebene eingeschlossen sind. Stellt die Elemente dar und bezeichnet sie entsprechend.

5 Zeichnet die verschiedenen Punkte A, B, C, die Gerade d und die Ebene β, sodass: $A, B \in \beta$, $C \notin \beta$, $d \subset \beta$, $A \in d$, $B \notin d$.

6 Bestimmt den Wahrheitswert der folgenden Sätze. Begründet, welche Sätze wahr sind und findet für falsche Sätze *Gegenbeispiele*.
a) „Zwei beliebige verschiedene Punkte liegen auf einer Geraden.“
b) „Zu jeder Geraden d gibt es eine einzige Ebene α, die sie einschließt.“
c) „Jede Ebene β enthält mindestens eine Gerade.“
d) „Liegen drei Punkte auf einer Ebene, dann sind sie kollinear.“

7 Berechnet, wie viele Geraden die verschiedenen Punkte A, B, C, D bestimmen, wenn:
a) A, B und C kollinear sind.
b) Keine drei Punkte kollinear sind.
c) Die Punkte A, B, C, D nicht komplanar sind.

8 Betrachtet die untere Zeichnung.



Falls $AO = OM$ und $BO = ON$, bestimmt den Wahrheitswert der Sätze:

a) $A \in a$	**e)** $\{A, B, O\} \subset \alpha$
b) $N \notin b$	**f)** $b \subset \alpha$
c) $AM = a$	**g)** $a \cap b = \{O\}$
d) $PO \subset \alpha$	**h)** $MN \cap AB = \varnothing$

9 Gegeben sind die Ebene α und die Punkte M, N, P, Q, sodass $MN \subset \alpha$, $P \in \alpha$ und $PQ \not\subset \alpha$.
a) Zeichnet die Situation .
b) Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze:
p_1: „$Q \in \alpha$“; p_2: „$M \in \alpha$ und $N \in \alpha$“;
p_3: „$M \in \alpha$ und $Q \notin \alpha$“.

L2. Bestimmen der Ebene, Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen

Das Axiom A 2 „Durch drei nicht kollineare Punkte verläuft nur eine Ebene“ lautet auch:

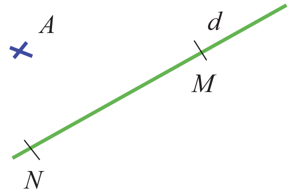
„Drei nicht kollineare Punkte bestimmen eine Ebene.“

Die von den nicht kollinearen Punkten A, B, C bestimmte Ebene bezeichnet man (ABC).

Die Beziehungen zwischen den Elementen des Raumes können mithilfe der Axiome und den Beziehungen aus der Geometrie der Ebene erhalten werden. Wir suchen andere Elemente, die eine Ebene *bestimmen* können.

1. Lehrsatz: Eine Gerade d und ein Punkt A, außerhalb der Geraden, bestimmen eine Ebene.

Die Ebene, bestimmt von der Geraden d und dem Punkt A, bezeichnet man (d, A).



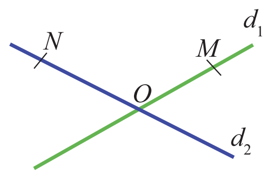
Beweis: Wir beweisen, dass es *eine einzige* Ebene α gibt, die die Gerade d und den Punkt A enthält.
Seien M und $N \in d$ verschiedene Punkte. Da $A \notin d \Rightarrow M, N$ und A sind nicht kollinear.
Laut Axiom (A. 2) bestimmen M, N, A eine Ebene α. Die von M und N bestimmte Gerade ist in α eingeschlossen. Aber $MN = d$, folglich $d \subset \alpha$ und $A \in \alpha$.
Nun beweisen wir, dass α die *einzige* Ebene mit dieser Eigenschaft ist. Wir nehmen an, dass eine Ebene $\beta \neq \alpha$, existiert, die den Punkt A und die Gerade d enthält. Also $d \subset \beta$ und $A \in \beta$. Dann gilt $M, N \in \beta$ und $A \in \beta$. Weil M, N, A nicht kollinear sind und in der Ebene β enthalten sind, ist β die einzige Ebene bestimmt von den drei Punkten (A. 2). Dann ist $\beta = \alpha$. Die Annahme, es gebe noch eine Ebene, war falsch. Also ist α die einzige Ebene, die die Gerade d und den Punkt A, außerhalb von d, enthält.

1. Anwendung: Die Punkte A, B, C, D sind nicht komplanar. Begründet, ob drei davon kollinear sein können.

Lösung. Wir nehmen an, die Punkte A, B und C seien kollinear. Dann sind die Ebenen (AB, D), (AC, D) und (BC, D) identisch, also die Punkte A, B, C, D komplanar, was der Voraussetzung widerspricht. Dieselbe Begründung gilt für alle anderen Tripel.

*Schlussfo*lgerung. Sind vier Punkte nicht komplanar, können keine *drei* davon *kollinear* sein.

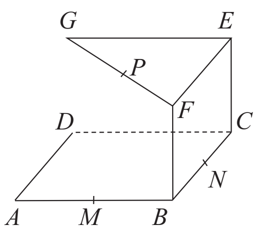
2. Lehrsatz: Zwei sich schneidende Geraden d_1 und d_2 bestimmen eine Ebene.



Die Ebene bestimmt von den Geraden d_1 und d_2 wird (d_1, d_2) bezeichnet.

2. Anwendung: Das Rechteck $ABCD$, das Quadrat $BCEF$ und das Dreieck EFG aus der unteren Zeichnung sind in paarweise verschiedenen Ebenen eingeschlossen. Die Punkte M, N, P sind die Mitten der Strecken AB, BC beziehungsweise GF.

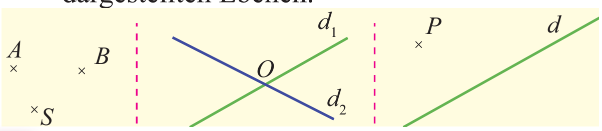
a) Findet drei Ebenen (d, T), andere als jene aus der Voraussetzung, wobei d eine Gerade ist und T ein Punkt.
b) Findet vier Paare von Geraden (d_1, d_2), die andere Ebenen als jene aus der Voraussetzung bestimmen.
c) Gruppiert die Sätze anhand ihres Wahrheitswertes.
p_1: „Die Gerade AB liegt auf einer einzigen Ebene.“
p_2: „Die Gerade MN und der Punkt P bestimmen eine Ebene.“
p_3: „Die Ebenen (ABC) und (ADC) sind identisch.“
p_4: „Die Geraden AB und BF bestimmen die Ebene (AMF).“



Lösung. **a)** Zum Beispiel (AB, P), (AB, E), (AB, G). Man kann auch andere Ebenen finden. **b)** Die sich schneidenden Geraden AB und BF bestimmen die Ebene (ABF). Genauso finden wir die Ebenen (BFG), (DCE) und (CEG). **c)** Der Satz p_1 ist falsch, weil es mehrere Ebenen gibt, die die Gerade AB einschließen; zum Beispiel (ABC) und (ABF). Der Satz p_2 ist wahr, weil der Punkt P außerhalb der Geraden MN liegt und somit MN und P eine Ebene bestimmen. Der Satz p_3 ist wahr, weil die Punkte A, B, C und D die Eckpunkte eines Rechtecks sind, also auf derselben Ebene liegen. Der Satz p_4 ist wahr, weil AB und BF sich schneidende Geraden sind, also bestimmen sie eine Ebene.

Aufgaben

1 Schreibt mithilfe der Elemente aus der Zeichnung die Bezeichnungen der unten dargestellten Ebenen.



2 Drei der verschiedenen Punkte A, B, C, D sind kollinear. Wie viele Ebenen bestimmen drei beliebige dieser Punkte?

3 A, B, C und D sind nicht komplanare Punkte.

a) Beweist, dass die Punkte nicht kollinear sein können.

b) Schreibt die Ebenen auf, die von diesen Punkten bestimmt werden.

4 Zeichnet ein gleichseitiges Dreieck und eine seiner Mittellinien auf einen Karton. Schneidet das Dreieck aus und faltet es entlang der Mittellinie. Stellt die erhaltene Figur dar.

5 Gegeben sind die sich schneidenden Geraden a, b und die verschiedenen Punkte A, B, sodass $A \in a$ und $B \in b$.

a) Zeichnet diese Elemente.

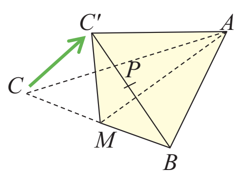
b) Beweist, dass die Mitte der Strecke AB auf der Ebene (a, b) liegt.

c) Beweist, dass jeder Punkt der Geraden AB auf der Ebene (a, b) liegt.

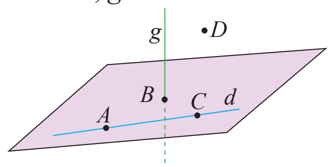
6 Das gleichseitige Dreieck ABC mit der Seitenlänge 6 cm wird entlang der Seitenhalbierenden AM wie in der Abbildung gefaltet.

a) Was für ein Dreieck ist ABC'?

b) Ist $BC' = 4\sqrt{2}$ cm und P die Mitte der Strecke BC', berechnet die Länge der Strecke PA.



7 In der Abbildung sind die Punkte A, B, C, D, die Geraden d, g und die Ebene α dargestellt.



Schreibt die untere Tabelle in euer Heft und ergänzt laut Modell.

Der Punkt ... liegt auf der Geraden ...	Der Punkt ... liegt nicht auf der Geraden ...	Der Punkt ... liegt auf der Ebene ...
$A \in d$	$A \notin g$	$A \in (g, A)$
Der Punkt ... liegt nicht auf der Ebene ...	Die Gerade ... liegt in der Ebene...	Die Gerade ... liegt nicht in der Ebene ...
$A \notin (BCD)$	$AB \subset \alpha$	$AB \not\subset (BCD)$

8 **a)** Beweise: Wenn sich die Geraden a, b, c paarweise in verschiedenen Punkten schneiden, dann sind sie komplanar.

b) a, b, c sind drei verschiedene, nicht komplanare Geraden. Wenn $a \cap b \neq \emptyset$, $a \cap c \neq \emptyset$ und $b \cap c \neq \emptyset$, beweist, dass a, b, c einen gemeinsamen Punkt haben.

9 Gegeben sind die Punkte A, B, C, D, sodass A, B, $C \in \alpha$, $D \notin \alpha$ und $B \notin (DAC)$.

a) Zeichnet diese Elemente.

b) Beweist, dass der Punkt A außerhalb der Ebene (BCD) liegt.

c) Wie viele Ebenen bestimmen die Punkte A, B, C, D?

d) Beweist, dass die Ebenen (DAB) und (DBC) verschieden sind.

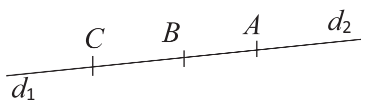
L3. Die gegenseitige Lage zweier Geraden im Raum

Wir erinnern uns!

In der Ebene können zwei Geraden *identisch, sich schneidend* oder *parallel* sein.

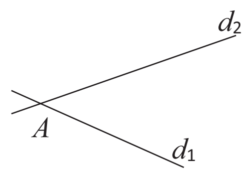
1) Die Geraden $AB = d_1$ und $AC = d_2$ sind *identisch* (sie *überlagern* sich).

$$d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$$



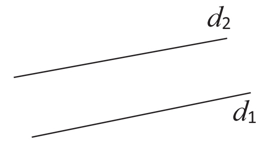
2) Die Geraden d_1 und d_2 *schneiden sich* im Punkt A.

$$d_1 \cap d_2 = \{A\}$$



3) Die Geraden d_1 und d_2 sind *parallel*.

$$d_1 \cap d_2 = \varnothing$$

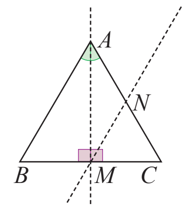


*Beispie*le.

1) Die Trägergerade der Winkelhalbierenden des Winkels A des gleichseitigen Dreiecks ABC und die Mittelsenkrechte AM der Seite BC sind identische Geraden.

2) Die Geraden AB und AC schneiden sich im Punkt A.

3) Ist N die Mitte der Seite AC, dann sind die Geraden MN und AB parallel.



Wir verstehen anhand von Beispielen

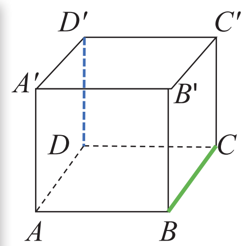
1. Anwendung: Nebenan ist ein Würfel dargestellt.

a) Identifiziert vier Paare von verschiedenen *komplanaren* Geraden.

b) Nennt die gegenseitige Lage der Geraden eines jeden Paares von Punkt **a)** (*sich schneidend* oder *parallel*).

c) Stellt fest, ob die Geraden DD' und BC *komplanar* oder *nicht komplanar* sind. Begründet die Antwort.

d) Identifiziert in eurem Umfeld Paare von *komplanaren* Geraden und von *nicht komplanaren* Geraden.



Lösung. **a)** Die Paare (AB, BC), (AB, BB') sind gebildet von anliegenden Seiten eines Quadrates und die Paare $(BC, B'C')$, (BB', CC') von Gegenseiten eines Quadrates. Die Geraden eines jeden Paares sind *komplanar*.

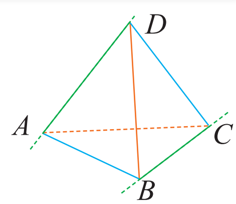
b) (AB, BC) und (AB, BB') sind Paare *sich schneidender* Geraden. $(BC, B'C')$ und (BB', CC') sind Paare von *parallelen* Geraden.

c) Der Punkt $D' \notin (BCD)$. Wären DD' und BC komplanar, müsste der Punkt D' auf der Ebene (BCD) liegen.

Schlussfolgerung. Anwendung, Schlussfolgerung Im Raum existieren Geraden, die nicht komplanar sind.

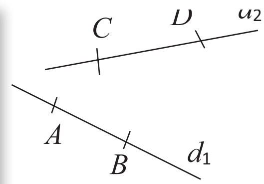
2. Anwendung: Von vier beliebigen, nicht komplanaren Punkten kann man drei Paare von nicht komplanaren Geraden bilden.

Beweis. Seien A, B, C, D vier nicht komplanare Punkte. Die Punkte A, B, C sind nicht kollinear und bestimmen die Ebene $\alpha = (ABC)$.
Nehmen wir an, die Geraden AD und BC seien komplanar.
Da $BC \subset \alpha$ und $A \in \alpha$, ist $D \in \alpha$. Folglich sind A, B, C, D komplanar. Widerspruch!
Schlussfolgerung: Die nicht komplanaren Punkte A, B, C, D bestimmen die Paare nicht komplanarer Geraden (AD, BC), (AB, CD), (AC, BD).



3. Anwendung: Beweist: Wenn die Geraden d_1 und d_2 nicht komplanar sind, dann $d_1 \cap d_2 = \varnothing$.

Beweis: Wir nehmen an, d_1 und d_2 sind nicht komplanare Geraden und $d_1 \cap d_2 \neq \varnothing$. Also existieren $M \in d_1$ und $M \in d_2$. Dann sind die Geraden d_1 und d_2 identisch oder einander schneidend, also sind sie komplanar, Widerspruch. Folglich: $d_1 \cap d_2 = \varnothing$.

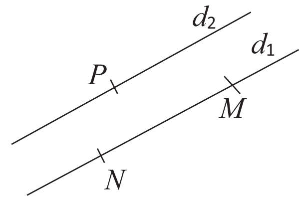


Definition. Zwei Geraden d_1 und d_2 sind im Raum *parallel,* falls sie komplanar sind und keinen gemeinsamen Punkt haben.

Das Parallelenaxiom (A. 5). Durch einen Punkt A außerhalb einer Geraden d geht eine und nur eine Gerade d', parallel zu der Geraden d.

Anwendungen

Lehrsatz: Zwei parallele Geraden d_1 und d_2 bestimmen eine Ebene.
Die Ebene bestimmt von den Geraden d_1 und d_2 wird (d_1, d_2) bezeichnet.



Beweis: Die Geraden d_1 und d_2 sind parallel, also komplanar. Dann existiert eine Ebene α, sodass $d_1 \subset \alpha$ und $d_2 \subset \alpha$. Wir beweisen, dass α die *einzige* Ebene ist, die diese Geraden einschließt.

Wir nehmen an, es existiert eine Ebene $\beta \neq \alpha$, sodass $d_1 \subset \beta$ und $d_2 \subset \beta$. Weil $d_1 \subset \beta$ und $d_2 \subset \beta$, gibt es die verschiedenen Punkte M, N auf der Geraden d_1 und P auf d_2. Weil $d_1 \parallel d_2$, sind M, N und P nicht kollinear, also gehören sie zu einer einzigen Ebene $(MNP) = \beta = \alpha$, Widerspruch. Die Annahme war falsch. Darum ist die Ebene α die einzige Ebene, welche die einander schneidenden Geraden d_1 und d_2 einschließt.

Aufgaben

1 Die Punkte A, B, C sind (in dieser Reihenfolge) kollinear und $D \notin AB$.
a) Schreibt zwei Paare identischer Geraden.
b) Schreibt zwei Paare verschiedener Geraden.

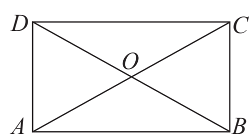
2 Sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Parallelepiped.
a) Schreibt zwei Paare nicht komplanarer Geraden.
b) Schreibt zwei Paare komplanarer Geraden.

3 Schreibt die Sätze in die Hefte und bestimmt ihren Wahrheitswert.
a) Zwei Geraden ohne gemeinsame Punkte sind parallel.
b) Zwei Geraden bestimmen eine Ebene.
c) Zwei Geraden können identisch, parallel, sich schneidend oder nicht komplanar sein.
d) Zwei nicht parallele Geraden schneiden sich.

4 Seien a und b zwei nicht komplanare Geraden und C ein Punkt, sodass $C \notin a$, $C \notin b$. Zeigt, dass es eine Gerade d gibt, die den Punkt C enthält und komplanar ist sowohl mit der Geraden a als auch mit der Geraden b.

5 Gegeben ist das Trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$. Der Punkt E liegt außerhalb der Ebene des Trapezes. Schreibt in die Hefte und ergänzt die Lücken mit „*komplanar*“ oder „*nicht komplanar*“, sodass wahre Sätze entstehen.
a) Die Geraden EA und BC sind ... .
b) Die Geraden EB und CD sind ... .
c) Die Geraden AD und BC sind ... .

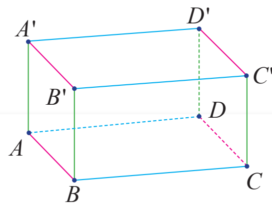
6 Identifiziert in der Ebene des unteren Rechtecks $ABCD$:



a) Paare von *sich schneidenden Geraden*;
b) Paare von *parallelen Geraden*.

7 Die Parallelogramme $ABCD$ und $ABMN$ sind in verschiedenen Ebenen. Nennt die Lage der Geraden:
a) MN und AB; **b)** MN und CD; **c)** AM und BN;
d) MN und BD; **e)** CM und DN;
f) MO und CP, wenn O und P die Mitten der Strecken BN und BD sind.

L4. Die Lage einer Geraden in Bezug auf eine Ebene



Wir lösen und stellen fest

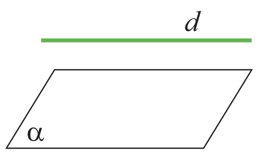
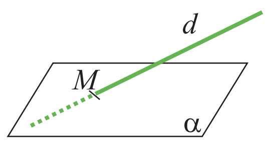
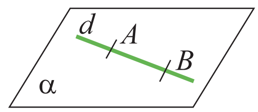
PA Bastelt einen Quader $ABCDA'B'C'D'$ aus Karton (oder mithilfe von Stäbchen). Entscheidet zusammen mit einer Kollegin/einem Kollegen, wie viele *gemeinsame Punkte* die Geraden AA', $A'B'$, $A'C'$, AD', AB, $A'C$, BB', $A'D$, $B'C'$, BD und die Ebene (ABC) haben. Gruppiert diese Geraden nach der Anzahl der gemeinsamen Punkte mit der Ebene (ABC).

Lösung. $AA' \cap (ABC) = \{A\}$, $A'B' \cap (ABC) = \varnothing$, $A'C' \cap (ABC) = \varnothing$, $AD' \cap (ABC) = \{A\}$, $AB \cap (ABC) = AB$, $A'C \cap (ABC) = \{C\}$, $BB' \cap (ABC) = \{B\}$, $A'D \cap (ABC) = \{D\}$, $B'C'' \cap (ABC) = \varnothing$, $BD \cap (ABC) = BD$.

0 Punkte: $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$;
1 Punkt: AA', AD', $A'C$, BB', $A'D$
Unendlich viele Punkte: AB, BD

Wir verstehen anhand von Beispielen

Schlussfolgerung. Für eine Ebene α und eine Gerade d gibt es folgende Situationen:

Anzahl der gemeinsamen Punkte	1. Die Gerade und die Ebene haben keinen gemeinsamen Punkt.	2. Die Gerade und die Ebene haben einen gemeinsamen Punkt.	3. Die Gerade und die Ebene haben unendlich viele gemeinsame Punkte.
Die Lage der Geraden in Bezug auf die Ebene	Die Gerade d ist *parallel* zu der Ebene α.	Die Gerade d *schneidet* die Ebene α.	Die Gerade d ist in der Ebene α eingeschlossen (d liegt in α).
Bezeichnung	$d \parallel \alpha$	$d \cap \alpha = \{M\}$	$d \subset \alpha$
Zweidimensionale Darstellung (Zeichnung)			

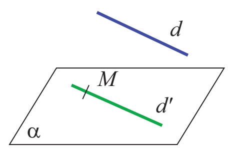
Es gilt die Aussage „Falls zwei Punkte einer Geraden d auf einer Ebene α liegen, dann $d \subset \alpha$."

1. Damit wir beweisen, dass eine Gerade d in einer Ebene α liegt, genügt es, zwei Punkte der Geraden zu finden, die auf der Ebene liegen.

2. Damit wir beweisen, dass eine Gerade d eine Ebene α schneidet, genügt es, zwei Punkte A und B der Geraden d zu finden, wobei $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$.

Gegeben sind die Ebene α, die Gerade d, parallel zu α und die Gerade $d' \subset \alpha$. Die Geraden d und d' sind entweder *parallel* oder *nicht komplanar*.

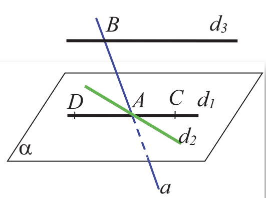
Schlussfolgerung. Eine Gerade, die parallel zu einer Ebene verläuft, und eine beliebige Gerade der Ebene sind entweder parallel oder nicht komplanar.



Wie beweisen wir, dass eine Gerade parallel zu einer Ebene verläuft?

Lehrsatz. Eine Gerade d ist genau dann parallel zu einer Ebene α, wenn d nicht in α liegt und d zu einer Geraden d' der Ebene parallel ist.

Anwendungen



1. Anwendung: In der Zeichnung nebenan sind: $d_1 \parallel d_3, d_1 \subset \alpha, d_2 \subset \alpha, d_3 \not\subset \alpha$, $\{B\} = d_3 \cap a$, $\{A\} = d_1 \cap d_2 \cap a$, $C \in d_1$. Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze.

a) „Die Gerade a schneidet die Ebene α."
b) „Die Gerade d_2 schneidet die Ebene (d_1, d_3)."
c) „Die Ebenen (d_1, d_3) und (a, d_3) sind verschieden."
d) „Die Gerade d_3 ist parallel zu α."
e) „Die Gerade d_2 liegt auf der Ebene (d_1, d_3)."
f) „A, B, C, D sind nicht komplanare Punkte."

Lösung. **a)** Die Punkte A und B liegen auf der Geraden a, $A \in \alpha$ und $B \notin \alpha$, deshalb ist der Satz wahr.

b) Weil $d_1 \parallel d_3$ und $d_1 \subset \alpha$, gilt $d_3 \parallel \alpha$. Aus $d_2 \subset \alpha$ folgt, dass die Geraden d_2 und d_3 keinen gemeinsamen Punkt haben. Die einzige Parallele zu d_3 durch Punkt A ist d_1. Also sind die Geraden d_2 und d_3 nicht komplanar. Da $A \in (d_1, d_3)$, $A \in d_2$ und d_2 nicht in der Ebene (d_1, d_3) liegt, ist der Satz wahr.

c) Auf der Geraden a liegen die verschiedenen Punkte A und B der Ebene (d_1, d_3). Folglich ist $a \subset (d_1, d_3)$, also ist der Satz falsch.

d) Weil $d_1 \parallel d_3$ und $d_1 \subset \alpha$, gilt $d_3 \parallel \alpha$. Also ist der Satz wahr.

e) Der Satz ist falsch.

f) $A, D, C \in d_1$, $B \in d_3$. Da d_1, d_3 parallel sind, sind sie komplanar. Dann gilt $A, B, C, D \in (d_1, d_3)$. Also ist der Satz falsch.

Aufgaben

1 Veranschaulicht die Lage einer Geraden in Bezug auf eine Ebene mithilfe von Stäbchen oder Stiften und einer ebenen Fläche.

2 Identifiziert in eurem Umfeld:
a) in einer Ebene sich schneidende Geraden;
b) parallele Geraden in einer Ebene;
c) eine zu einer Ebene parallele Gerade;
d) eine Gerade, die eine Ebene schneidet.

3 A, B, C, D sind vier nicht komplanare Punkte.
a) Zeichnet sie und verbindet sie paarweise.
b) Bestimmt die Lage der Geraden AB, AC, AD in Bezug auf die Ebene (BCD).
c) Bestimmt die Lage der Geraden AB, BC, BD in Bezug auf die Ebene (ACD).

4 **a)** Zeichnet eine Ebene α, eine Gerade $d \subset \alpha$, einen Punkt $A \notin \alpha$ und eine Gerade $d' \parallel d$, $A \in d'$. Bestimmt die Lage der Geraden d' in Bezug auf die Ebene α.
b) Zeichnet eine Ebene α, eine Gerade $d \not\subset \alpha$, wobei $d \cap \alpha \neq \varnothing$. Bestimmt die Lage der Geraden d in Bezug auf die Ebene α.

5 $ABCDA'B'C'D'$ ist ein Würfel. Identifiziert:
a) Geraden, parallel zu der Ebene (ABB');
b) Geraden, parallel zu der Ebene (ABC');
c) Geraden, die in (ADD') liegen;
d) Geraden, die die Ebene (ADD') schneiden;
e) Geraden, die die Ebene (ACC') schneiden.

6 Die verschiedenen Punkte A, B liegen auf der Ebene α ($A, B \in \alpha$) und $C \notin \alpha$. M ist die Mitte der Strecke AC und N ist die Mitte der Strecke BC. Bestimmt die Lage der Geraden MN in Bezug auf die Ebene α.

7 Das Parallelogramm $ABCD$ und das Dreieck ABE liegen in verschiedenen Ebenen.
$M \in [AE]$, $N \in [BE]$ und $\dfrac{ME}{MA} = \dfrac{NE}{NB}$.
a) Wie liegt die Gerade CD in Bezug auf die Ebene (ABE)?
b) Bestimmt die Lage der Geraden MN in Bezug auf die Ebene (ABC).

8 Die Seite AB des Dreiecks ABC liegt in der Ebene α und $C \notin \alpha$. $M \in [AC]$, $N \in [BC]$, sodass $MC = 2MA$ und $NB = 2NC$. Bestimmt die Lage der Geraden MN in Bezug auf die Ebene α.

9 Das Trapez $ABCD$ mit den Grundlinien AB, CD und das Parallelogramm $BCEF$ liegen in verschiedenen Ebenen. Bestimmt die Lage:
a) der Geraden AD in Bezug auf die Ebene (BEF);
b) der Geraden BF in Bezug auf die Ebene (DCE);
c) der Geraden EF in Bezug auf die Ebene (ABC);
d) der Geraden O_1O_2 in Bezug auf die Ebene (ABF), wenn $\{O_1\} = AC \cap BD$ und $\{O_2\} = BE \cap CF$.

10 Die Punkte A, B, C, D sind nicht komplanar, $BD = CD$, und die Halbgeraden DE und DF sind die Winkelhalbierenden der Winkel ADB beziehungsweise ADC, $E \in AB$ und $F \in AC$. Bestimmt die Lage:
a) der Geraden EF in Bezug auf die Ebene (BCD);
b) der Geraden BC in Bezug auf die Ebene (DEF).

11 G ist der Schwerpunkt des Dreiecks ABC und M, N sind Punkte auf der Seite AB, sodass $AM = MN = NB$. Falls D ein Punkt außerhalb der Ebene (ABC) ist, zeigt, dass:
a) $GM \parallel (ACD)$; **b)** $BC \parallel (DGN)$.

L5. Gegenseitige Lage zweier Ebenen. Parallele Ebenen: Beschreibung und Darstellung

Wir erinnern uns!

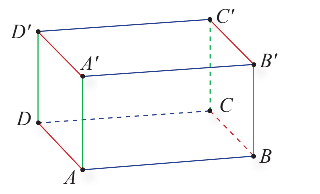
1) *Axiom* (A.2). Drei nicht kollineare Punkte bestimmen eine Ebene.
2) *Axiom* (A.4). Zwei verschiedene Ebenen mit einem gemeinsamen Punkt schneiden einander in einer Geraden.

Folgesätze: 1) Haben zwei Ebenen drei nicht kollineare gemeinsame Punkte, dann sind sie identisch.
2) Es gibt Ebenen, die eine gemeinsame Gerade einschließen.

Wir lösen und stellen fest

PA

Konstruiert mithilfe von Stäbchen einen Quader $ABCDA'B'C'D'$.
Bestimmt für jede der Ebenen (DAA'), $(AA'B')$, (ADC), (ABD), $(A'B'C')$, $(A'B'D')$ *die Menge der gemeinsamen Punkte* mit der Ebene (ABC).
Bestimmt die Menge der Schnittpunkte der Ebene (ABC) mit jeder Kante und jeder Diagonale des Quaders. (Die Diagonalen sind die Strecken AC', BD', CA', DB'.)



Lösung. Die Gerade AD liegt sowohl auf (DAA') als auch auf (ABC). Die zwei Ebenen sind nicht identisch, da zum Beispiel der Punkt B auf der Ebene (ABC), aber nicht auf (DAA') liegt. laut Axiom 2) ist der Schnitt der beiden Ebenen *eine Gerade*. $(DAA') \cap (ABC) = AD$. Analog: $(AA'B') \cap (ABC) = AB$.
Punkt B liegt auf der Ebene (ADC). (ADC) und (ABC) haben drei nicht kollineare gemeinsame Punkte. Laut Folgesatz 1) sind die beiden Ebenen *identisch*. Analog sind die Ebenen (ABD) und (ABC) identisch.
Intuitiv haben die Ebenen $(A'B'C')$ und (ABC) *keinen gemeinsamen Punkt*. $(A'B'D')$ ist identisch mit $(A'B'C')$. Also haben $(A'B'D')$ und (ABC) keine gemeinsamen Punkte. Einige Schnittpunkte sind: $A'B' \cap (ABC) = \varnothing$, $A'C' \cap (ABC) = \varnothing$, $AD' \cap (ABC) = \{A\}$, $AB \cap (ABC) = AB$, $A'C \cap (ABC) = \{C\}$, $BB' \cap (ABC) = \{B\}$, $A'D \cap (ABC) = \{D\}$, $B'C' \cap (ABC) = \varnothing$, $BD \cap (ABC) = BD$.

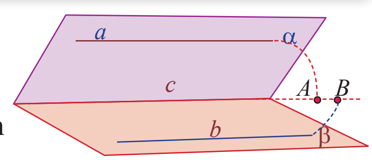
Wir verstehen anhand von Beispielen

Es gibt Ebenen, die keine gemeinsamen Punkte haben.
Wir werden diese Aussage beweisen.

Lehrsatz 1: Die Ebenen α und β, die durch die parallelen Geraden a und b gehen, schneiden einander in einer Geraden, die parallel zu a und b ist.

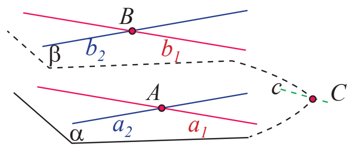
Voraussetzung: $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ und $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$, $\alpha \neq \beta$.

Behauptung: $\alpha \cap \beta = c$ und $a \parallel b \parallel c$.



Beweis. Falls $a = c$ oder $b = c$, gilt die Behauptung offensichtlich. Wir nehmen an, $a \neq c$ und $b \neq c$. Seien $\alpha = (a, c)$ und $\beta = (b, c)$. Weil die Geraden a und c in α liegen, kann nur $a \parallel c$ oder $a \cap c = \{A\}$ gelten. Genauso: Weil b und c in β liegen, gilt $b \parallel c$ oder $b \cap c = \{B\}$.
Wenn $a \parallel c$ und $b \cap c = \{B\}$, dann gehen durch B zwei verschiedene Geraden b und c parallel zu a. Widerspruch zum Parallelenaxiom (A. 5).
Wenn $a \cap c = \{A\}$ und $b \parallel c$, dann gehen durch A zwei verschiedene Geraden a und c parallel zu b, wiederum Widerspruch zum Parallelenaxiom (A. 5). Wenn $a \cap c = \{A\}$ und $b \cap c = \{B\}$, gilt entweder $A = B$, aber dann $a \cap b = \{A\}$ (widerspricht der Voraussetzung), oder $A \neq B$. Dann ist $c = AB$, also $c \subset (a, b)$ oder $\alpha = (a, c) = (a, b) = (b, c) = \beta$ (widerspricht der Voraussetzung).
Folglich muss $a \parallel c$ und $b \parallel c$.

Lehrsatz 2: Im Raum *existieren parallele Ebenen*.



Beweis: Sei α eine Ebene und A ein Punkt auf ihr. Durch $A \in \alpha$ gehen die verschiedenen Geraden $a_1 \subset \alpha$ und $a_2 \subset \alpha$, $a_1 \cap a_2 = \{A\}$. Den Punkt B wählen wir außerhalb von α. Laut Parallelenaxiom gibt es die Geraden b_1 und b_2, $b_1 \cap b_2 = \{B\}$, und $a_1 \parallel b_1$, $a_2 \parallel b_2$. Wir bezeichnen $\beta = (b_1, b_2)$ und beweisen, dass α und β keinen gemeinsamen Punkt haben. Annahme α und β schneiden einander in $C \in \alpha \cap \beta$. Dann ist der Schnitt der Ebenen eine Gerade c ($\alpha \cap \beta = c$). Weil $a_1 \parallel b_1$, gilt laut Lehrsatz 1 $c \parallel a_1$. Analog, weil $a_2 \parallel b_2$, ist $c \parallel a_2$. Dann sind $a_1 \parallel c \parallel a_2$, also $a_1 \parallel a_2$. Widerspruch zu $a_1 \cap a_2 = \{A\}$. Die Annahme ist falsch, also haben die zwei Ebenen keine gemeinsamen Punkte.

Zwei beliebige Ebenen haben alle Punkte gemeinsam oder eine gemeinsame Gerade oder keinen gemeinsamen Punkt.

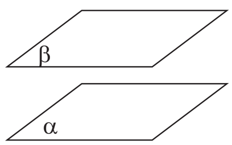
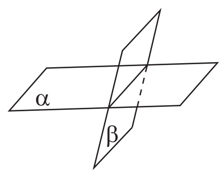
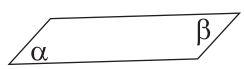
1. Definition. Zwei Ebenen sind *identisch,* wenn jeder Punkt der einen Ebene auch auf der anderen liegt.

2. Definition. Zwei Ebenen sind *einander schneidend,* wenn ihr Schnitt eine Gerade ist.

3. Definition. Zwei Ebenen α und β sind *parallel,* wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben.

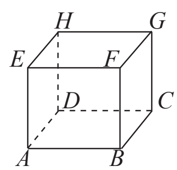
Wir verstehen anhand von Beispielen

Schlussfolgerung. Wenn *α* und *β* zwei Ebenen sind, dann können folgende Fälle auftreten*:*

Schnitt der Ebenen	1. Die Ebenen α und β haben keinen gemeinsamen Punkt. $\alpha \cap \beta = \varnothing$	2. Die Ebenen α und β haben eine gemeinsame Gerade. $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$ und $\alpha \neq \beta$	3. Die Ebenen α und β sind identisch. Sie haben alle Punkte gemeinsam. $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$
Lage der Ebenen	Die Ebenen sind *parallel.*	Die Ebenen *schneiden sich.*	Die Ebenen sind *identisch.*
Bezeichnung	$\alpha \parallel \beta$	$\alpha \cap \beta = d$	$\alpha = \beta$
Zweidimensionale Darstellung			

Parallelität im Raum wird in einem anderen Kapitel genauer untersucht.

Fürs Portfolio



ABCDEFGH ist ein Würfel. Bestimmt die Lage der Ebenen:

a) (*ABC*) und (*BCD*) **b)** (*ABC*) und (*BCF*) **c)** (*ABC*) und (*EFG*)

Aufgaben

1 Sei *ABCDMNPQ* ein Quader. Bestimmt die Lage der Ebenen:

a) (*ABC*) und (*MBQ*) **b)** (*ACP*) und (*BDQ*)
c) (*AMC*) und (*NPQ*) **d)** (*ADQ*) und (*BCN*).

2 Der Punkt *P* ist die Mitte der Kante *CG* des Würfels *ABCDEFGH*. Bestimmt die Lage von:

a) (*BPH*) und (*ADE*) **b)** (*BHP*) und (*ABC*)

3 Seien *ABCD* ein Parallelogramm und *S* ein Punkt außerhalb der Ebene (*ABC*). Bestimmt:

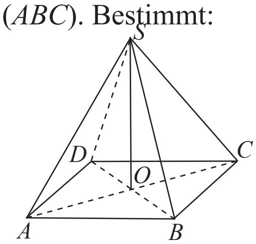
a) $(SAB) \cap (SAB)$

b) $(SAB) \cap (SBC)$

c) $(SAB) \cap (SCD)$

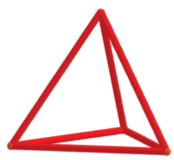
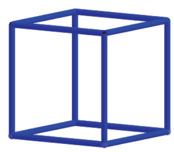
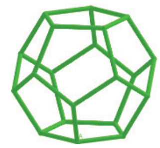
d) $(SBD) \cap (ABC)$

e) $(SBD) \cap (SAC)$

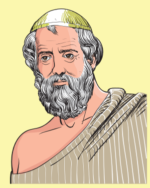


2 Geometrische Körper

Geometrische Körper sind schon seit dem Altertum bekannt. Eine besondere Aufmerksamkeit gilt den fünf *„platonischen Körpern“,* den einzigen Körpern mit nur gleichen Flächen. Im Ashmolean Museum in Oxford, England, befinden sich über 1000 Jahre alte in Stein gehauene Modelle dieser Körper.

Das Tetraeder	*Der Würfel*	*Das Oktaeder*	*Das Dodekaeder*	*Das Ikosaeder*
				

Aus der Geschichte In der Vision des Philosophen **Platon** (427 – 347 v. u. Z.) war das **Tetraeder**, dessen Flächen 4 gleichseitige Dreiecke sind, *das Symbol des Feuers;* der **Würfel**, dessen 6 Flächen Quadrate sind, *das Symbol der Erde*; das **Oktaeder**, begrenzt von 8 gleichseitigen Dreiecken, *das Symbol der Luft*; *das* **Ikosaeder**, begrenzt von 20 gleichseitigen Dreiecken, *das Symbol des Wassers* und das **Dodekaeder**, begrenzt von 12 regelmäßigen Fünfecken, *das Symbol des Weltalls.*

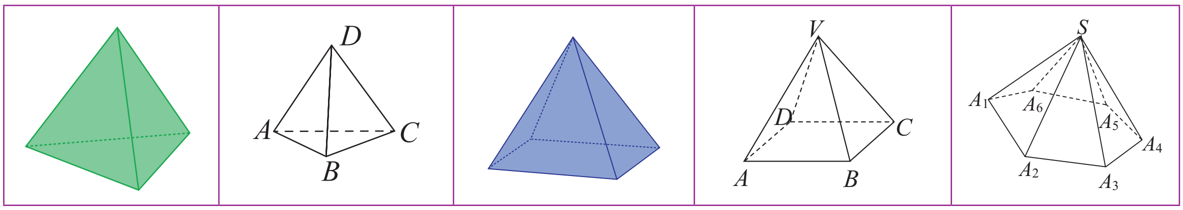


Die Mathematiker beschäftigten sich mit dem Studium der geometrischen Körper.
Einige geometrischen Körper werden von *ebenen Flächen begrenzt.* Man nennt diese Körper POLYEDER.

L1. Die Pyramide: Darstellung, charakteristische Elemente

Wir lösen und stellen fest

Findet die unten dargestellten *geometrischen Körper* in der Körper-Sammlung eurer Schule.



a) Betrachtet die geometrischen Körper und identifiziert auf der obigen Darstellung, wie jeder einzelne gezeichnet wird. Findet bekannte Elemente aus der Geometrie der Ebene: geometrische Figuren, polygonale Flächen, Punkte, Strecken.
b) Nennt die polygonalen Flächen, die jeden Körper begrenzen.
c) Identifiziert und nennt die ebenen geometrischen Figuren, mit deren Hilfe beim Zusammenkleben der Seiten (*Kanten*) jeder Körper entsteht.

Lösung. **a)** Alle dargestellten Körper werden von ebenen Flächen begrenzt. Die Längen der Seiten, die sich berühren, sind gleich.
b) Die ersten beiden Körper werden von je 4 dreiseitigen Flächen begrenzt. Die nächsten zwei Körper werden von 5 polygonalen Flächen, 4 dreiseitigen und einer vierseitigen Fläche begrenzt. Der letzte Körper wird von einer sechseckigen Fläche und 6 dreiseitigen Flächen begrenzt.

c) Bei allen Körpern erkennen wir Dreiecke mit einer gemeinsamen Ecke und ein Polygon, das nicht unbedingt ein Dreieck sein muss, dessen Seiten aber mit je einer Dreieckseite gleich sind.

Schlussfolgerung. Die gemeinsamen Eigenschaften dieser geometrischen Körper sind:

1) Sie werden von polygonalen konvexen Flächen begrenzt, also sind sie Polyeder.
2) Höchstens eine Fläche, die den Körper begrenzt, ist nicht dreieckig.

Wir verstehen anhand von Beispielen

1. Definition. Die Pyramide ist der geometrische Körper, der von einer konvexen Vieleckfläche mit n Seiten, $n \geq 3$, und von n dreiseitigen Flächen mit einer gemeinsamen Ecke begrenzt wird.
Eine Pyramide wird bestimmt von einer polygonalen konvexen Fläche, *Grundfläche (Basis)* der Pyramide genannt, und einem Punkt außerhalb der Ebene, in der die Basis liegt, *Spitze* der Pyramide genannt.

Bemerkungen. **1)** Wir werden den Begriff Pyramide sowohl für den geometrischen Körper als auch für die Oberfläche der Pyramide (die Pyramide, deren Inneres hohl ist) verwenden. Was gemeint ist, ist aus dem Text ersichtlich.

2) Wenn eine Pyramide benannt wird, schreibt man zuerst den Buchstaben, der der Spitze entspricht und danach die der Grundfläche.

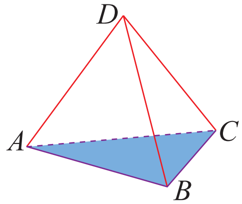
Je nach Anzahl der Seiten der Grundfläche kann eine Pyramide dreiseitig, vierseitig, fünfseitig (pentagonal), sechsseitig (hexagonal) usw. sein.

Die einfachste Pyramide ist die dreiseitige Pyramide. Sie ist das *einfachste* Polyeder.

Sie wird von *vier* dreiseitigen Flächen begrenzt und heißt TETRAEDER.

Die Elemente des Tetraeders sind:

- Die *Grundfläche* des Tetraeders, die Dreieckfläche ABC.
- Die *Spitze* des Tetraeders, der Punkt D, außerhalb der Grundfläche.
- Die Eckpunkte der Basis, die Punkte A, B, C.
- Die *Kanten der Grundfläche (die Grundkanten),* die Strecken AB, BC, AC.
- Die *Seitenkanten,* die Strecken DA, DB, DC.
- Die *Seitenflächen,* die dreiseitigen Flächen DAB, DAC, DBC.



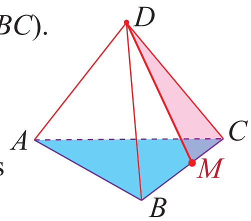
Anwendungen

1. Anwendung: Gegeben sind die Dreieckfläche ABC und ein Punkt D außerhalb von (ABC).

a) Welche Fläche beschreibt die Strecke DM, wenn M die Strecke BC beschreibt?

b) Nennt die Flächen, die die Strecke DM beschreibt, wenn M die Seiten des Dreiecks ABC durchläuft.

c) Schätzt die Menge, die die Strecke DM beschreibt, wenn M das Innere des Dreiecks ABC beschreibt.



Lösung. **a)** Die Strecke DM beschreibt die Seitenfläche DBC.

b) Die Strecke DM beschreibt die Dreieckflächen DBC, DAB, DAC, die drei Seitenflächen des Tetraeders.

c) Die Strecke DM beschreibt das Innere des Tetraeders. Die Vereinigung aller geschlossener Strecken DM, wenn M ein variabler Punkt der Dreieckfläche ABC ist, bildet das Tetraeder $DABC$.

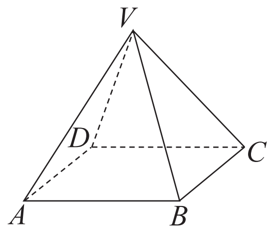
2. Definition. Eine Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist und deren Seitenkanten kongruent sind, heißt *regelmäßige Pyramide*.

Bemerkung. Eine rigorose Form dieser Definition folgt in einer weiteren Lektion.

2. Anwendung: Nebenan ist eine vierseitige regelmäßige Pyramide $VABCD$ dargestellt.

a) Bestimmt die Art der Seitenflächen der Pyramide.

b) Nennt die kongruenten Dreiecke, die in verschiedenen Ebenen liegen.



Lösung. **a)** Weil die Seitenkanten kongruent sind, haben laut Definition die Dreiecke VAB, VBC, VCD und VDA je zwei kongruente Seiten, also sind sie gleichschenklig.

b) Laut Kongruenzfall SSS sind $\Delta VAB \equiv \Delta VBC \equiv \Delta VCD \equiv \Delta VDA$.

Schlussfolgerung. Die Seitenflächen einer regelmäßigen Pyramide sind *kongruente gleichschenklige Dreiecke.*

3. Definition. Ein Tetraeder, dessen vier Flächen gleichseitige Dreiecke sind, heißt *regelmäßiges Tetraeder*.

3. Anwendung $SABC$ ist ein Tetraeder, Dreieck ABC ist gleichseitig und $SA = SB = SC$. Stellt fest, ob $SABC$ ein regelmäßiges Tetraeder ist.

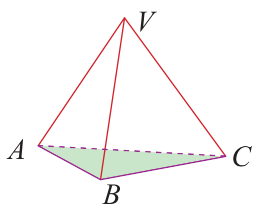
Lösung. Weil das Dreieck ABC gleichseitig ist und $SA = SB = SC$, ist $SABC$ eine dreiseitige regelmäßige Pyramide. Damit sie ein regelmäßiges Tetraeder ist, müssen die Seitenflächen ebenfalls gleichseitige Dreiecke sein. Dreieck VAB ist nur dann gleichseitig, wenn $VA = AB$. Die Seitenkanten und die Grundkanten müssten kongruent sein.

Schlussfolgerung. Wenn alle Kanten eines Tetraeders kongruent sind, dann ist es ein regelmäßiges Tetraeder

Anwendungen

Die dreiseitige Pyramide

(die Grundfläche ist ein Dreieck)



Die Elemente

Die Spitze der Pyramide: V

Die Grundfläche: die Dreieckfläche ABC

Die Eckpunkte der Grundfläche: A, B, C

Die Grundkanten: die Strecken AB, BC, AC

Die Seitenkanten: VA, VB, VC

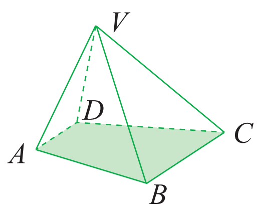
Die Seitenflächen: die Dreieckflächen VAB, VBC, VCA

Die Anzahl der Elemente

Flächen	$f = 1 + 3 = 4$
Kanten	$m = 3 + 3 = 6$
Eckpunkte	$v = 3 + 1 = 4$
Bemerkung. $f + v = m + 2$	

Die vierseitige Pyramide

(die Grundfläche ist ein Viereck)



Die Elemente

Die Spitze der Pyramide: V

Die Grundfläche: die vierseitige Fläche $ABCD$

Die Eckpunkte der Grundfläche: A, B, C, D

Die Grundkanten: die Strecken AB, BC, CD, DA

Die Seitenkanten: VA, VB, VC, VD

Die Seitenflächen: die Dreieckflächen VAB, VBC, VCD, VDA

Die Anzahl der Elemente

Flächen	$f = 1 + 4 = 5$
Kanten	$m = 4 + 4 = 8$
Eckpunkte	$v = 4 + 1 = 5$
Bemerkung. $f + v = m + 2$	

Sucht im Netz Informationen zur **sechsseitigen Pyramide.** Schreibt ihre Elemente und deren Anzahl auf.

Aufgaben

1 **a)** Zeichnet eine sechsseitige Pyramide mit der Spitze *S*.
b) Bezeichnet die Grundfläche der Pyramide mit Buchstaben eurer Wahl.
c) Nennt die Elemente der gezeichneten Pyramide.

2 Schreibt in die Hefte und ergänzt die Lücken, sodass wahre Aussagen entstehen:
a) Die Grundfläche einer Pyramide mit 7 Seitenflächen hat … Ecken.
b) Eine Pyramide mit 5 Flächen heißt … .
c) Eine Pyramide mit 7 Ecken heißt … .

3 Zeichnet, benennt und beschreibt die Pyramide, deren Grundfläche und Seitenflächen geometrische Figuren derselben Art sind.

4 Bestimmt den Wahrheitswert des Satzes „Jede Pyramide hat eine gerade Anzahl von Kanten.“ Begründet die Antwort.

5 Die Grundfläche der Pyramide *EABCD* ist das Rechteck *ABCD* und alle Seitenkanten sind kongruent. Wenn $AE \perp EC$, zeigt, dass $BE \perp ED$.

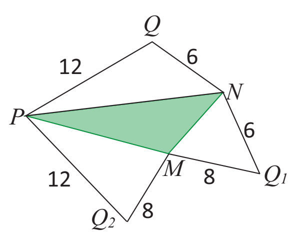
6 Zeichnet eine vierseitige Pyramide *VABCD* und die Punkte *M*, *N*, *P*, *Q*, die Mitten der Kanten *VA*, *VB*, *VC*, *VD*.
Sei $L = \{A, B, C, D, M, N, P, Q, V\}$.
a) Schreibt drei Teilmengen von je vier komplanaren Punkten der Menge *L*.
b) Schreibt drei Teilmengen von je vier nicht komplanaren Punkten der Menge *L*.
c) Prüft, ob es zwei Teilmengen von je fünf Elementen der Menge *L* gibt, welche die Eckpunkte einer Pyramide sind. Begründet die Antwort.

7 Sei *ABCDA'B'C'D'* ein Würfel.
a) Nennt die Tetraeder mit der Grundfläche *ACD,* deren Spitze ein Punkt des Würfels ist.
b) Nennt die vierseitigen Pyramiden, deren Eckpunkte auch Ecken des Würfels sind.

8 Bestimmt die Anzahl der Flächen und die Anzahl der Kanten einer Pyramide mit 10 Ecken.

L2. Die Abwicklung einer Pyramide (das Netz der Pyramide)

Wir lösen und stellen fest



a) Zeichnet die Figur von nebenan auf einen Karton (beachtet die in cm angeführten Maße), schneidet die Figur aus und faltet sie entlang *MN*, *MP*, *NP,* sodass sich die kongruenten Strecken berühren.
b) Betrachtet die Lage der Punkte Q, Q_1, Q_2 nach dem Falten.
c) Faltet den vorher erhaltenen Körper *QMNP* auseinander, sodass die Kanten *MQ*, *NQ*, *PQ* auf der Ebene (*MNP*) liegen.

Lösung. **a)** Man zeichnet ein Dreieck *MNP*. Im Äußeren des Dreiecks zeichnet man die Dreiecke MNQ_1, MPQ_2, *NPQ* mit den vorgegebenen Dimension. (Für die Seitenlängen des Dreiecks *MNP* wählt man beliebige Werte).
b) Weil $MQ_1 = MQ_2$, überlagern sich die Punkte Q_1 und Q_2. Weil $NQ_1 = NQ$, überlagern sich die Punkte Q_1 und Q. Weil $PQ = PQ_2$, überlagern sich auch die Strecken. Nach dem Falten sind die Punkte Q, Q_1, Q_2 identisch.
c) Durch Falten haben wird eine dreiseitige Pyramide (ein Tetraeder) erhalten. Nun falten wir das Tetraeder auseinander. Wir wählen *MNP* als Grundfläche des Tetraeders *QMNP*. Die Kanten *MQ*, *NQ*, *PQ* falten wir auseinander, bis sie auf der Ebene der Grundfläche liegen. Die erhaltene ebene Figur ist die *Abwicklung (das Netz) der dreiseitigen Pyramide QMNP*.

Wir verstehen anhand von Beispielen

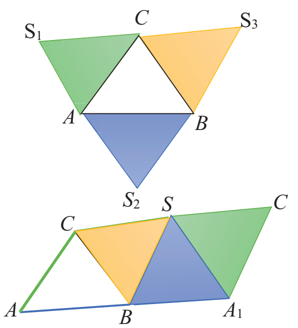
Die Abwicklung der Pyramide ermöglicht uns, Kenntnisse der Geometrie der Ebene anzuwenden, um Abstände, Flächeninhalte, Winkelmaße zu berechnen oder die Lage einiger Elemente zu bestimmen.

Bemerkung. Die Abwicklung einer Pyramide kann verschiedenartig erfolgen. Wichtig ist, dass alle Flächen auf derselben Ebene sind und anliegen.

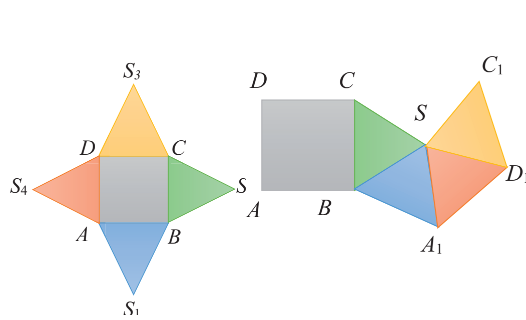
Die Abwicklung einer *regelmäßigen Pyramide* besteht aus einem *regelmäßigen Vieleck mit n Seiten*, der Grundfläche der Pyramide, und aus anliegenden *n gleichschenkligen Dreiecken*, den Seitenflächen der Pyramide. Die Grundlinien der Seitenflächen und die Seiten der Grundfläche sind kongruent.

Anmerkung.
Die Abwicklungen eines regelmäßigen Tetraeders und einer vierseitigen regelmäßigen Pyramide sind nebenan auf je zwei Arten dargestellt.
Hausaufgabe. Zeichnet eine andere mögliche Abwicklung auf Karton. Wählt *kongruente gleichseitige Dreiecke,* um leichter zu messen.

Die dreiseitige Pyramide

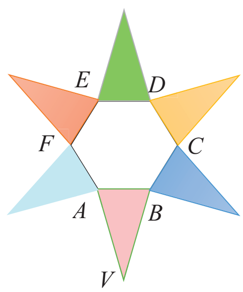


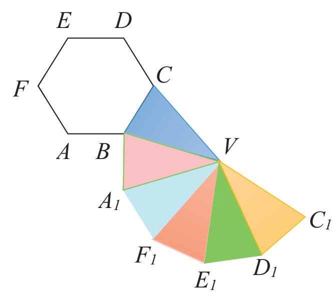
Die vierseitige Pyramide



Übung. Konstruiert aus den dargestellten Abwicklungen die entsprechenden Pyramiden.

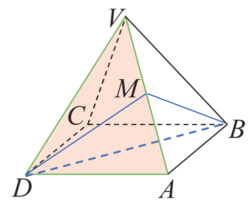
1. Anwendung: Zeichnet zwei Abwicklungen der regelmäßigen sechsseitigen Pyramide *VABCDEF*.



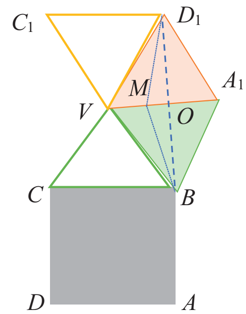


Lösung. Die Grundfläche der Pyramide ist ein regelmäßiges Sechseck und die Seitenflächen sind kongruente gleichschenklige Dreiecke. Die Grundlinie einer jeden Seitenfläche ist kongruent mit der Grundkante.

2. Anwendung: Alle Seitenflächen der vierseitigen Pyramide *VABCD* sind gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge *a*. Bestimmt die Lage des Punktes $M \in VA,$ sodass der Umfang des Dreiecks *MBD* minimal ist.



Lösung. Sei $M \in VA$. Der Umfang des Dreiecks *MBD* ist $P_{MBD} = BD + MB + MD$. Weil *BD* Diagonale der Grundfläche ist, hat sie eine konstante Länge. Somit ist der Umfang minimal, falls die Summe $MB + MD$ minimal ist.

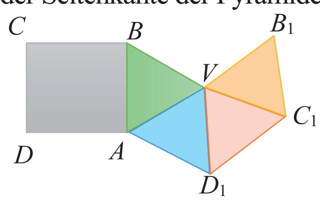


Um diesen Betrag bewerten zu können, werden wir die Abwicklung der Pyramide so wie in der Abbildung nebenan zeichnen, dass die Seitenkante *VA* eine gemeinsame Seite der Dreiecke *VAB* und *VAD* bleibt. Die Figur VBA_1D_1 ist ein Rhombus. Sei *O* die Mitte der Strecke VA_1. Dann gilt für jeden Punkt $M \in VA_1$, $MB + MD = MB + MD_1 \geq OB + OD_1 = BD_1 = a\sqrt{3}$. Also ist der Umfang des Dreiecks genau dann minimal, wenn *M* gleich *O* ist, die Mitte der Kante *VA*.

Aufgaben

1 **a)** Zeichnet ein Dreieck ABC auf Karton. Zeichnet die Punkte M, N, P, die Mitten der Seiten BC, AC, AB und danach die Mittellinien des Dreiecks.
b) Schneidet das Dreieck aus und beweist, dass durch Falten ein Tetraeder entsteht.
c) ABC ist ein gleichseitiges Dreieck mit dem Umfang 36 cm. Beweist, dass durch Falten entlang der Mittellinien ein regelmäßiges Tetraeder entsteht. Berechnet die Kantenlänge des Tetraeders.

2 Die Abwicklung der regelmäßigen vierseitigen Pyramide $VABCD$ ist unten dargestellt. Wenn $AC = 4\sqrt{2}$ cm und $AB \parallel VD_1$, berechnet die Länge der Seitenkante der Pyramide.



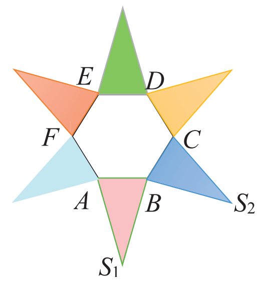
Bemerkung. D_1 ist die Ecke D des Dreiecks VAD in der Ebene $ABCD$ nach Abwickeln.

3 Zeichnet ein gleichseitiges Dreieck und in seinem Äußeren drei rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke, deren Hypotenusen die Seiten des gleichseitigen Dreiecks sind.
a) Zeigt, dass diese Zeichnung die Abwicklung einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide ist.
b) Berechnet die Länge der Grundkante und die Länge der Seitenkante der Pyramide, wenn der Flächeninhalt der Abwicklung $8 \cdot (3+\sqrt{3})$ cm² beträgt.

4 Sei $ABCD$ ein Tetraeder. A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3 und D_1, D_2, D_3 sind die Maße der Winkel mit dem Scheitel A, B, C bzw. D in den verschiedenen Flächen. Wenn $A_1 + A_2 + A_3 = $ $= B_1 + B_2 + B_3 = C_1 + C_2 + C_3 = D_1 + D_2 + D_3 = 180°$, dann zeigt, dass je zwei gegenüberliegende Kanten des Tetraeders kongruent sind.

5 Die Seitenflächen der regelmäßigen vierseitigen Pyramide $SABCD$ sind gleichseitige Dreiecke.
a) Zeichnet die Abwicklung der Pyramide, in der die Seitenflächen rund um die Grundfläche liegen.
b) Berechnet das Maß des Winkels gebildet von den Geraden SA und SC (in der Ebene (SAC)) vor dem Abwickeln.
c) Berechnet das Maß des Winkels gebildet von den Geraden S_1A und S_2C (in der Ebene (ABC)), wenn S_1 und S_2 den Punkt S der Kante SB nach dem Abwickeln darstellen.

6 Unten ist die Abwicklung der regelmäßigen sechsseitigen Pyramide $SABCDEF$ dargestellt. Bekannt ist: $S_1B \perp S_2B$.



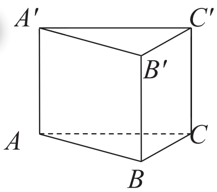
a) Berechnet die Maße der Winkel der Seitenflächen.
b) Berechnet das Maß des Winkels gebildet von den Geraden S_1A und S_2C.

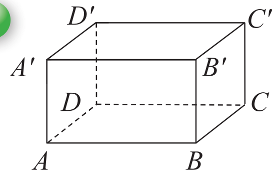
L3. Das gerade Prisma: Darstellung, charakteristische Elemente

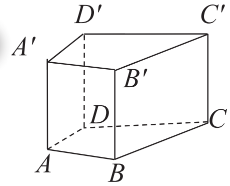
Fragen wie: „Wann hast du zum ersten Mal einen Würfel gesehen?“ oder „Welchen geometrischen Körper erkennst du in einem zufällig ausgewählten Lego-Stein?“ dürften dich zum Nachdenken bringen. Der Würfel ist einer der ersten geometrischen Körper, die ein Kind kennenlernt. Er hat eine regelmäßige, einfach zu handhabende Form und bietet unzählige Variationen der Anordnung für kreatives Bauen.

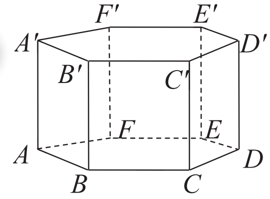
Wir lösen und stellen fest

PA Betrachtet die Darstellungen:

1


2


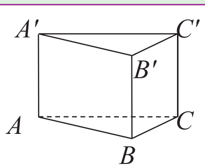
3


4


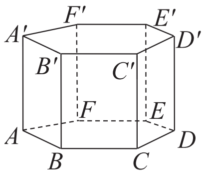
Findet die unten dargestellten *geometrischen Körper* in der Körper-Sammlung eurer Schule.
Betrachtet die geometrischen Körper, identifiziert und nennt die ebenen geometrischen Figuren bestimmt von den Flächen dieser Körper.
Lösung. Wir erkennen, dass jeder Körper zwei kongruente polygonale Flächen hat. Diese werden *Grundflächen* genannt und ihre Seiten heißen *Grundkanten.*
Außer den Grundflächen wird jeder Körper von Parallelogrammen (Sonderfälle: Rechtecke oder Quadrate) begrenzt. Diese heißen *Seitenflächen*. Die Seiten der Seitenflächen, die keine Grundkanten sind, heißen *Seitenkanten*. Die Anzahl der Seitenkanten ist gleich mit der Anzahl der Ecken einer Grundfläche.
Schlussfolgerung. Die gemeinsamen Eigenschaften dieser geometrischen Körper sind:
1) Sie haben zwei *kongruente* Grundflächen, die konvexe polygonale Flächen mit n Seiten, $n \geq 3$, sind.
2) Sie haben n Seitenflächen, die Parallelogramme sind.

Wir verstehen anhand von Beispielen

Es gilt:
Das Prisma ist ein Polyeder. Es wird begrenzt von zwei *Grundflächen* und von n Seitenflächen. Die Grundflächen sind kongruente konvexe polygonale Flächen mit n Seiten, $n \geq 3$, die sich in parallelen Ebenen befinden. Die Seiten der Seitenflächen bilden Parallelogramme.
Die Elemente eines Prismas sind: *die Grundflächen*, *die Grundkanten, die Seitenflächen*, *die Seitenkanten*, *Ecken* und *die Diagonalen*, falls die Anzahl der Seitenkanten größer oder gleich vier ist.
Eine *Diagonale des Prismas* ist eine Strecke, die bestimmt wird von Ecken zweier unterschiedlicher Grundflächen, die nicht in derselben Seitenfläche liegen.
Abhängig von der Anzahl der Seiten einer Grundfläche spricht man von einem dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen, sechsseitigen (usw.) Prisma.
Die Elemente einiger Prismen sind:
Das dreiseitige Prisma

Grundflächen	Grundkanten	Seitenflächen	Seitenkanten	Anzahl der Kanten und Ecken
 Polygonale Flächen ABC und $A'B'C'$, $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, A'B'C'$	AB, BC, AC, bzw. $A'B'$, $B'C'$ und $A'C'$. Die Anzahl der Grundkanten ist $3 \cdot 2 = 6$.	Die Parallelogramme: $ABB'A'$, $BCC'B'$ und $ACC'A'$. Die Anzahl der Seitenflächen ist 3.	AA', BB' und CC', parallel und kongruent. Ihre Anzahl ist 3.	Die Anzahl der Kanten ist $3 \cdot 2 + 3 = 9$. Die Anzahl der Ecken ist $3 \cdot 2 = 6$.

Das sechsseitige Prisma

Grundflächen	Grundkanten	Seitenflächen	Seitenkanten	Anzahl der Kanten und Ecken
 Die Flächen begrenzt von den Sechsecken $ABCDEF$ und $A'B'C'D'E'F'$	AB, BC, CD, DE, EF, FA bzw. $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$, $F'A'$. Die Anzahl der Grundkanten ist $6 \cdot 2 = 12$.	Die Flächen begrenzt von den Parallelogrammen $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EFF'E'$, $FAA'F'$ Ihre Anzahl ist 6.	AA', BB', CC', DD', EE' und FF', parallel und kongruent. Ihre Anzahl ist 6.	Die Anzahl der Kanten des Prismas ist $6 \cdot 2 + 6 = 18$. Die Anzahl der Ecken ist $6 \cdot 2 = 12$.

Bemerkung. Das sechsseitige Prisma hat 18 Diagonalen: AC', $A'C$, AD', $A'D$, AE', $A'E$, BD', $B'D$, BE', $B'E$, BF', $B'F$, CE', $C'E$, CF', $C'F$, DF', $D'F$.

Ein Prisma, dessen *Seitenflächen alle Rechtecke* sind, heißt **gerades Prisma**.
Es gibt das gerade dreiseitige Prisma, das gerade vierseitige Prisma, das gerade fünfseitige Prisma, das gerade sechsseitige Prisma usw.

Definition. Ein *gerades Prisma*, dessen Grundflächen *regelmäßige Vielecke* sind, heißt *regelmäßiges Prisma.*

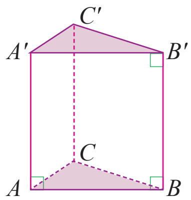
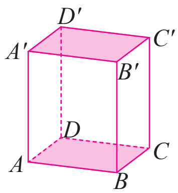
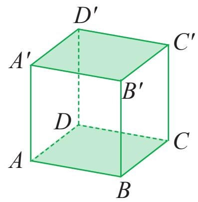
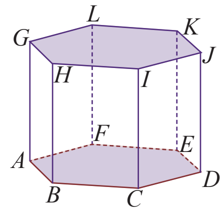
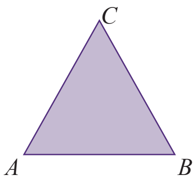
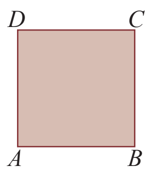
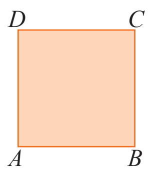
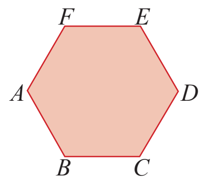
Bemerkung. Die zweidimensionale Darstellung eines regelmäßigen Vielecks bewahrt die Abstände und die Winkelmaße. Deshalb sehen die Darstellungen der geraden Prismen und die der regelmäßigen Prismen gleich aus. Aus der Aufgabe geht aber hervor, worum es sich handelt (ob das Prisma regelmäßig ist oder nicht).

Anwendungen

Die geraden vierseitigen Prismen, die wir oft im Alltag antreffen, sind: das Parallelepiped, der Quader und der Würfel. Ihre *charakteristischen* Elemente sind schon bekannt. Wir wiederholen sie.
Ihre geometrischen Darstellungen sind ähnlich. Die Voraussetzungen der Aufgaben liefern die wichtigen Daten.

Das gerade Parallelepiped	**Der Quader**	**Der Würfel**
1. Die Grundfläche ist ein Parallelogramm. 2. Die Seitenflächen sind Rechtecke.	1. Die Grundfläche ist ein Rechteck. 2. Die Seitenflächen sind Rechtecke.	Alle Flächen sind Quadrate.
Ein gerades vierseitiges Prisma mit der Grundfläche ein Parallelogramm	a) Ein gerades vierseitiges Prisma mit rechteckiger Grundfläche. b) Ein gerades Parallelepiped mit rechteckiger Grundfläche. c) Ein Prisma, dessen Flächen alle Rechtecke sind.	a) Ein regelmäßiges vierseitiges Prisma, dessen Seitenflächen Quadrate sind. b) Ein Quader, dessen Kanten (alle) kongruent sind. c) Ein Prisma, dessen Flächen Quadrate sind. d) Ein regelmäßiges vierseitiges Prisma mit kongruenten Kanten.

In der obigen Tabelle sind äquivalente Definitionen der verschiedenen Körper angeführt. Sie sind beim Lösen von Aufgaben nützlich.
Wir werden uns insbesondere mit regelmäßigen Prismen beschäftigen.

Art des Prismas	Regelmäßiges dreiseitiges Prisma	Regelmäßiges vierseitiges Prisma	Der Würfel –Regelmäßiges vierseitiges Prisma mit quadratischen Seitenflächen	Regelmäßiges sechsseitiges Prisma
Darstellung				
Darstellung der Grundfläche				

Bemerkung. Falls die *Seitenkanten vertikal* dargestellt werden und es keine weiteren Angaben gibt, nehmen wir an, dass das Prisma *gerade* ist.

Anwendung: Gegeben ist die konvexe polygonale Fläche $A_1A_2\ldots A_n$ mit n Seiten. Der Punkt M liegt auf der gegebenen Fläche (auf den Seiten oder im Inneren). P_1 ist ein Punkt außerhalb der Ebene der polygonalen Fläche. Die Vereinigung aller geschlossener Strecken MN, die parallel und kongruent mit A_1P_1 sind, wenn M die Vieleckfläche beschreibt, ist das *Prisma* mit der Grundfläche $A_1A_2\ldots A_n$, in dem eine Seitenkante die Strecke A_1P_1 ist.

Fürs Portfolio

Bestimmt laut voriger Anwendung:

1. Die Menge der Punkte, die die Strecke MN beschreibt, wenn M die Seite BC des Dreiecks ABC beschreibt.

2. Die Menge der Punkte, die die Strecke MN beschreibt, wenn M alle Seiten des Dreiecks ABC beschreibt.

3. *Den Weg,* den der Punkt M zurücklegt, damit die Strecke MN die Seitenfläche des vierseitigen Prismas *$ABCDA'B'C'D'$ beschreibt.*

Aufgaben

1 **a)** Identifiziert in eurem Umfeld Objekte in Form von dreiseitigen oder vierseitigen Prismen.
b) Zeichnet die betreffenden Prismen.
c) Bezeichnet die Prismen und nennt ihre Elemente.

2 Die Grundfläche eines Prismas ist ein Viereck mit dem Umfang 64 cm. Eine Seitenkante ist 9 cm. Bestimmt die Summe aller Kanten des Prismas.

3 $ABCA'B'C'$ ist ein dreiseitiges Prisma, M ist die Mitte der Strecke BC und M' die Mitte der Strecke $B'C'$.
a) Zeichnet entsprechend den Vorgaben.
b) Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze:
p_1: „Die Punkte B', A, B, C sind komplanar."
p_2: „Das Parallelogramm $ABB'A'$ und der Punkt C bestimmen eine vierseitige Pyramide."
p_3: „Die Vereinigung der Prismen $ABMA'B'M'$ und $ACMA'C'M'$ ist das Prisma $ABCA'B'C'$."

4 $ABCDA'B'C'D'$ ist ein vierseitiges Prisma. M und M' sind die Schnittpunkte der Diagonalen der Grundflächen $ABCD$ bzw. $A'B'C'D'$.

a) Zeichnet.

b) Findet je ein dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche: ABD, ACD, ABC bzw. BCD.

c) Nennt die Elemente des Prismas mit der Grundfläche MAB und der Seitenkante MM'.

d) Identifiziert 4 Tetraeder, deren Ecken auch Ecken des Prismas sind.

5 Die Seitenflächen eines sechsseitigen Prismas sind kongruent und haben den Umfang von 30 cm. Der Umfang der Grundfläche ist gleich mit dem Umfang einer Seitenfläche. Berechnet:

a) die Länge der Seitenkante;

b) die Summen der Längen aller Kanten des Prismas.

6 Sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Quader. Ergänzt die Lücken, um wahre Aussagen zu erhalten:

a) Die Kanten des Parallelepipeds, auf welchen der Punkt D liegt, sind … .

b) Die Flächen des Parallelepipeds, auf denen die Ecke D liegt, sind… .

c) Die Flächen des Parallelepipeds, in denen die Kante AD liegt, sind … .

7 Im Quader $ABCDA'B'C'D'$ sind: $AB = 7$ cm, $B'C' = 8$ cm, $DD' = 9$ cm.

a) Zeichnet.

b) Berechnet die Summe aller Kanten des Quaders.

8 Zwei Würfel mit der Kantenlänge 5 cm werden nebeneinander gestellt, sodass ein Quader entsteht.

a) Zeichnet.

b) Bestimmt die größte Fläche des Quaders.

c) Berechnet die Summe aller Kanten des Quaders.

L4. Das gerade Prisma: seine Abwicklung

Wir erinnern uns!

Ein Prisma, dessen Seitenflächen Rechtecke sind, ist ein *gerades Prisma*.
Ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist, ist ein *regelmäßiges Prisma.*

Wir verstehen anhand von Beispielen

Wir wollen die Möglichkeiten zur Abwicklung eines Prismas untersuchen.
Die Abwicklung eines geraden Prismas besteht aus Rechtecken (den Seitenflächen) und zwei Polygonen (den Grundflächen).
Die Seitenflächen und die Grundflächen müssen auf einer Ebene liegen. Dafür wird das Prisma entlang einiger Kanten zerschnitten.
Danach kann jede der Kanten des Prismas:

1. entweder *zerschnitten* werden, und dann wird sie „verdoppelt“ (sie liegt in zwei Flächen, in denen sie eine Seite ist);

2. oder sie wird nicht zerschnitten und ist dann wie ein Scharnier beim Auseinanderfalten der Flächen.
Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Abwicklung eines Prismas zu erhalten.

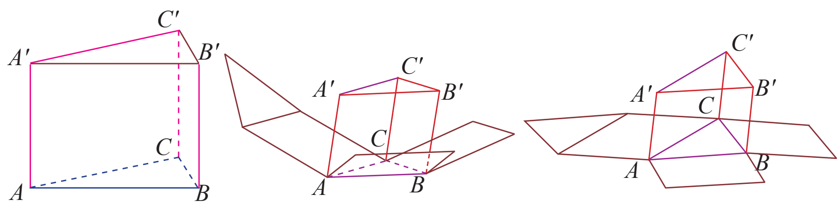
1. Anwendung: Gegeben ist das gerade dreiseitige Prisma $ABCA'B'C'$.

a) Wir wollen das Prisma in die Ebene der Grundfläche ABC abwickeln. Wir schneiden das Prisma entlang der Kanten $A'B'$ und $B'C'$ der Grundfläche $A'B'C'$ und entlang der Seitenkanten auf, dann drehen wir die Flächen $ABB'A'$ um AB, $BCC'B'$ um BC, die Grundfläche $A'B'C'$ um $A'C'$, und $ACC'A'$ um AC, bis alle auf der Ebene (ABC) liegen.

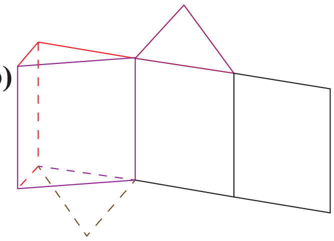
b) Zeichnet eine Abwicklung in der Ebene einer Seitenfläche.

Lösung

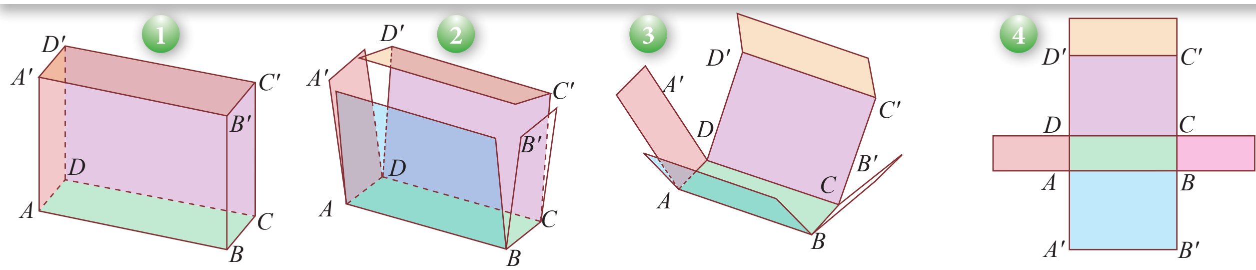
a)



b)



2. Anwendung: Zeichnet die Abwicklung des Quaders *ABCDA'B'C'D'* in der Ebene des Rechtecks *ABCD*.
Lösung



Schlussfolgerungen

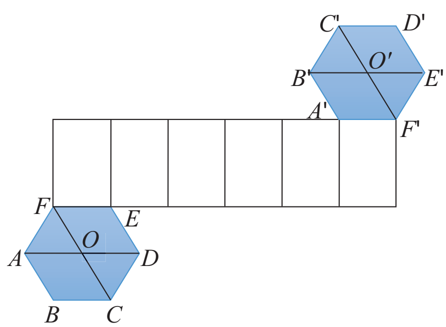
1. Die Abwicklung eines Quaders besteht aus 6 Rechtecken, drei Paaren von kongruenten Rechtecken (entsprechend den entgegengesetzten Flächen des Quaders).
2. Je nach Form der Abwicklung können die 6 Rechtecke verschieden liegen, aber ihre Dimension ändern sich nicht.
3. Die Abwicklung eines Würfels sieht aus wie die eines Quaders, aber die Flächen sind alle Quadrate.

Fürs Portfolio

a) Zeichnet die Abwicklung eines regelmäßigen vierseitigen Prismas.
b) Zeichnet die Abwicklung eines Würfels auf drei verschiede Arten.

Anwendungen

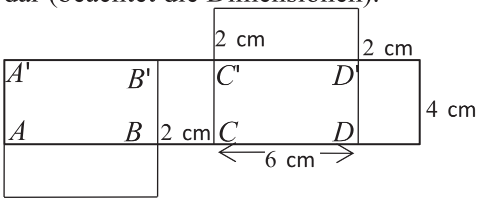
3. Anwendung: Nebenan sind zwei regelmäßige Sechsecke mit der Seitenlänge *a* und 6 Rechtecke mit den Seitenlängen *a* und *b* dargestellt.
a) Erklärt, wieso das die Abwicklung eines Prismas ist.
b) Um welche Art von Prisma handelt es sich bei Punkt a)?
c) Zeichnet eine andere Abwicklung desselben Prismas in eure Hefte.



Anleitung. **a)** Die Seiten der regelmäßigen Sechsecke *ABCDEF* und *A'B'C'D'E'F'* sind kongruent, deshalb können die Sechsecke die Grundflächen eines regelmäßigen Prismas sein. Eine Dimension der kongruenten Rechtecke entspricht der Seitenlänge des Sechsecks, deshalb können sie die Seitenflächen des Prismas sein. Durch „Falten“ der 8 Flächen kann ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma mit der Grundkante *a* und der Seitenkante *b* entstehen.

Aufgaben

1 Stellt die untere Zeichnung auf Karton dar (beachtet die Dimensionen).

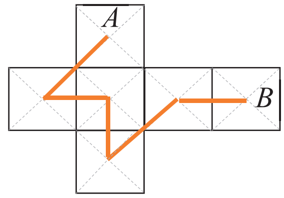


a) Schneidet die Figur aus und faltet sie zu einem Prisma mit der Grundfläche $ABCD$.
b) Benennt das entstandene Prisma.
c) Identifiziert und schreibt die Elemente des Prismas.
d) Wiederholt **a)**, **b)**, **c)**, damit ein Prisma mit der Grundfläche $ABB'A'$ entsteht und danach mit der Grundfläche $ADD'A'$.

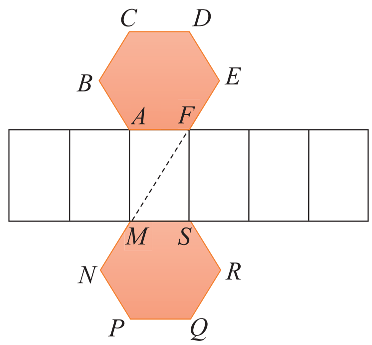
2 Zeichnet die Abwicklung eines Würfels mit der Kantenlänge 0,8 dm auf einen Karton, schneidet sie aus und faltet sie zusammen, damit der Würfel entsteht. Bezeichnet und nennt seine Kanten, Flächen und Diagonalen.

3 Die Abwicklung der Mantelfläche eines Würfels ist das Rechteck $MNPQ$, $MN > NP$. R ist die Mitte der Seite NP. Bestimmt die Kantenlänge des Würfels, wenn $MR = \sqrt{65}$ cm.

4 Berechnet die Länge des Weges von A nach B, der in der Abwicklung eines Würfels mit der Kantenlänge 6 cm in der Zeichnung dargestellt ist.

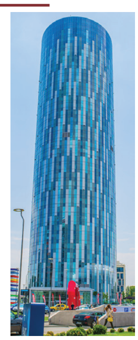


5 Unten ist die Abwicklung eines sechsseitigen Prismas $ABCDEFMNPQRS$ dargestellt. Die Punkte E, F, M sind kollinear und $EM = 27$ cm.
a) Beweist, dass N auf der Geraden EM liegt.
b) Berechnet die Länge der Grundkante und die der Seitenkante des Prismas.



L5. Der gerade Kreiszylinder: Darstellung, charakteristische Elemente, Abwicklung




Der Mensch lebt seit der Antike in Harmonie mit der Natur. Er beobachtete die Formen und Phänomene, verstand sie, schuf dann Objekte, die seine Arbeit erleichterten, sein Leben verschönerten und ihm vor allem in seinem ständigen Wissensdrang weiterhalfen.

Viele der Objekte, die uns umgeben, sind von runden Formen begrenzt. Die obigen Bilder sind Beispiele für Körper (in der Natur oder vom Menschen erschaffen), die von runden Formen umrandet sind.

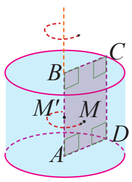
An jedem der Körper können wir in einer gewählten Ebene einen Kreis identifizieren. D. h. eine Figur, die von der Menge aller Punkte in dieser Ebene gebildet wird, die sich in einem konstanten Abstand von einem festen Punkt, Zentrum genannt, befinden.

.

Wir verstehen anhand von Beispielen

Wir werden bloß einige runde Körper mathematisch modellieren. Mit ihrer Hilfe kann man andere Körper bauen.

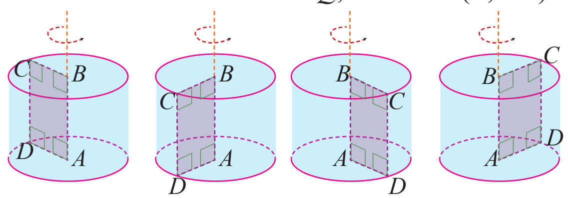
Wenn wir eine rechteckige Fläche um eine ihrer Seiten ringsum drehen, entsteht ein Körper. Identifiziert diesen Körper in eurem Umfeld.



Sei $ABCD$ die rechteckige Fläche, die wir um die Gerade AB, *Drehachse* genannt, drehen. Der Punkt D beschreibt den Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius AD und der Punkt C den Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius BC. Jeder Punkt M der rechteckigen Fläche $ABCD$ beschreibt einen Kreis mit dem Mittelpunkt M' und dem Radius MM' (M' liegt auf der geschlossenen Strecke AB und MM' steht senkrecht zu AB).

Der so entstandene Körper heißt *gerader Kreiszylinder*.

Der Diskus mit dem Mittelpunkt A und dem Radius AD bzw. der Diskus mit dem Mittelpunkt B und dem Radius BC sind die *Grundflächen* des Zylinders. Die Strecke CD und jede andere Strecke PQ, wo $P \in \mathcal{C}(A, AD)$ und $Q \in \mathcal{C}(B, BC)$, $PQ \parallel AB$, sind *Erzeugende* des Zylinders.



Der gerade Kreiszylinder ist ein *Drehkörper*.
Die Drehachse eines geraden Kreiszylinders ist die Gerade, die von den Mittelpunkten der Grundflächen bestimmt wird.

Definition. Der geometrische Körper, der durch Drehung einer rechteckigen Fläche um eine ihrer Seiten entsteht, heißt *gerader Kreiszylinder.*

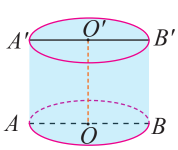
Anmerkung. Ein solcher Zylinder heißt *Kreiszylinder,* weil seine Grundflächen von Kreisen begrenzt werden. Er ist gerade, weil jede Erzeugende zu den entsprechenden Radien in den beiden Grundflächen senkrecht steht. Die Elemente des geraden Kreiszylinders sind: die zwei *Grundflächen*, kongruente Diskusse, die in verschiedenen Ebenen liegen, die *Mittelpunkte der Grundflächen*, *der Radius* der Grundflächen, *die Erzeugende*, die Seitenfläche.

Bemerkung.

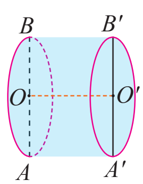
1. Als Zylinder wird oft nur die Menge der Punkte der Grundflächen und der Seitenfläche bezeichnet (ohne die Punkte im Inneren zu berücksichtigen).

2. Wenn nicht anders vereinbart, bezeichnet man die Mittelpunkte der Grundflächen O und O', zwei Erzeugende AA' und BB', mit A und B diametral entgegengesetzten Punkten der Grundfläche $\mathcal{C}(O, OA)$. Die Lage der Achse, um die sich die rechteckige Fläche dreht, ist nicht relevant. Sie kann vertikal, horizontal oder schief liegen.

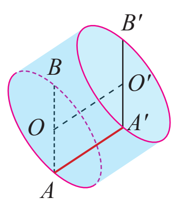
Zylinder mit vertikaler Achse



Zylinder mit horizontaler Achse



Zylinder mit schiefer Achse

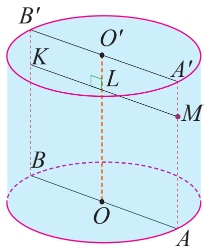


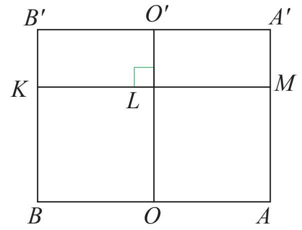
Für die Zeichnungen nebenan gilt: Der Diskus mit dem Mittelpunkt O und dem Radius AO bzw. der mit dem Mittelpunkt O′ und Radius $A'O'$ sind die Grundflächen des Zylinders. Die Strecken OA und OB sind Radien einer Grundfläche und $A'O'$, $O'B'$ Radien der anderen Grundfläche. Die Radien der zwei Grundflächen sind kongruent. Sie werden meistens mit R bezeichnet. Die Strecken AA' und BB' sind Erzeugende der Zylinder und werden meistens mit E bezeichnet.

Anwendungen

1. Anwendung: Wenn M ein beliebiger Punkt auf der Seitenfläche eines Zylinders ist, dann beweist, dass sein Spiegelbild in Bezug auf die Gerade OO' auch auf der Seitenfläche des Zylinders liegt.
(Es bedeutet, dass die Drehachse des Zylinders *Symmetrieachse* der Seitenfläche ist.)

Beweis. Die Gerade OO' ist die Drehachse des Zylinders mit dem Radius R. Sei M ein Punkt auf der Seitenfläche des Zylinders und AA' die Erzeugende, auf der er liegt. Wir zeichnen die Durchmesser AB und $A'B'$ in den beiden Grundflächen. Dann ist $ABB'A'$ ein Rechteck (weil $OBB'O'$ und $OAA'O'$ anliegende kongruente Rechtecke sind).





In der Ebene (ABM) sei $ML \perp OO'$. $L \in OO'$ und K sei der Schnittpunkt der Geraden ML und BB'. Dann sind $OBKL$ und $OAML$ kongruente Rechtecke und $KL = OB = OA = ML$. Folglich ist K sowohl das Spiegelbild von M in Bezug auf OO'als auch ein Punkt auf der Erzeugenden BB', also auf der Seitenfläche des Zylinders.

Bemerkung. Im obigen Beweis haben wir die für die Geometrie der Ebene üblichen Techniken verwendet (Konstruktionen, Eigenschaften der Figuren in der Ebene). Die Elemente des Zylinders, die nicht in der betrachteten Ebene liegen, wurden nicht beachtet. Die Darstellung der untersuchten Fläche als Figur der Ebene (siehe obige rechte Zeichnung) ermöglicht uns, bestimmte Eigenschaften zu erkennen und Lösungen zu begründen.

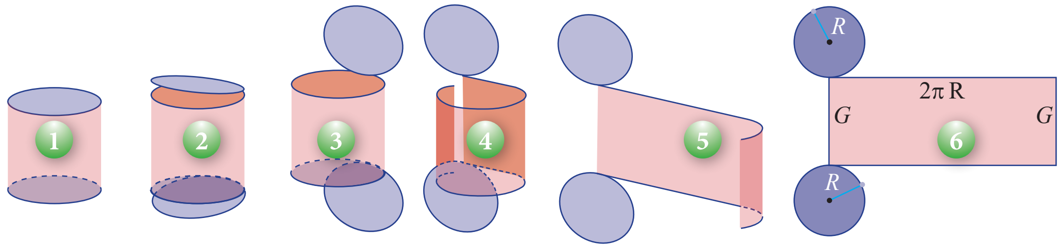
Fürs Portfolio

Beweist, dass die Aussage aus der 1. **Anwendung** gilt, auch wenn M auf einer Grundfläche oder im Inneren des Zylinders liegt. Das bedeutet, dass „die Drehachse des geraden Kreiszylinders *Symmetrieachse des Zylinders* ist.

2. Anwendung: Malt einen geraden Kreiszylinder mit dem Radius R und der Erzeugenden E bunt an. Legt den Zylinder (die Farbe soll noch nicht trocken sein) auf einen Karton, sodass eine Erzeugende auf der Ebene des Kartons liegt. Rollt den Zylinder, bis die Erzeugende wieder auf der Ebene des Kartons liegt. Stellt den Zylinder auf, sodass eine Grundfläche auf dem Karton liegt und dann auch so, dass die andere Grundfläche auf dem Karton liegt. Beschreibt die auf dem Karton erhaltene bunte Fläche.

Lösung. Durch Rollen des Zylinders entsteht eine bunte rechteckige Fläche, deren Dimensionen die Länge der Erzeugenden des Zylinders und die Länge des Kreises der Grundfläche sind. Der Abdruck einer jeden Grundfläche ist je ein Diskus, tangent an das Rechteck.
Praktisch kann man sich Folgendes vorstellen: Wir schneiden den Zylinder entlang einer Erzeugenden und entlang der Kreise, die die Grundflächen begrenzen, auf. Wir erhalten zwei gleiche Diskusse (die Grundflächen) und ein Rechteck, dessen Dimensionen die Länge der Erzeugenden des Zylinders und die Länge des Kreises der Grundfläche sind. Wir haben die Abwicklung des Zylinders erhalten.

Die Bilder zeigen die Etappen der Durchführung der Abwicklung eines Zylinders.



MINITEST Wählt die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort ist richtig.

1. Wenn die Abwicklung der Seitenfläche eines Zylinders ein Rechteck mit den Dimensionen *E* bzw. 12,6 cm ist, dann ist der beste Näherungswert des Radius der Grundfläche:

A. 1,5 cm	B. 2 cm	C. 2,5 cm	D. 3 cm

2. Der Radius der Grundfläche eines Zylinders ist 3 dm. Das Verhältnis zwischen der Erzeugenden des Zylinders und dem Durchmesser der Grundfläche ist 5/2. Die Länge der Erzeugenden ist:

A. 7,5 dm	B. 75 cm	C. 15 dm	D. 15 cm

3. Der Flächeninhalt des Quadrates *ABCD*, das dem Kreis der Grundfläche eines Zylinders einbeschrieben ist, ist 8 dm². Der Radius der Grundfläche ist:

A. 4 dm	B. 2 cm	C. 2 dm	D. 4 cm

Aufgaben

1 Sei *ABCD* ein Rechteck. Wir drehen das Rechteck vollständig um die Seite *AB*. Zeichnet den beschriebenen Körper.

2 Die Abwicklung der Seitenfläche eines geraden Kreiszylinders ist ein Quadrat. Berechnet das Verhältnis zwischen dem Radius und der Erzeugenden des Zylinders.

3 Ein Rechteck rotiert um seine Länge und danach um seine Breite. Es entsteht jeweils ein Zylinder.

a) Zeichnet die beiden Zylinder.

b) Stellt die Abwicklungen der beiden Zylinder dar.

c) a und b seien die Dimensionen des Rechtecks, $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ die Flächeninhalte der Abwicklungen der zwei Zylinder.

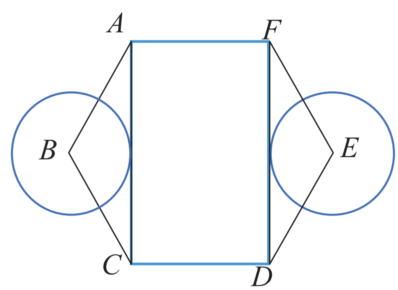
Falls $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, bestimmt $\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2}$.

4 Das Rechteck *ABCD* ist die Abwicklung der Seitenfläche eines geraden Kreiszylinders mit der Erzeugenden 24 cm. Wenn der Punkt *P* die Mitte der Strecke *AB* ist und $CP = 40$ cm, bestimmt den Radius des Zylinders.

5 **a)** Die Punkte *O* und *O*' sind die Mitten der Seiten *AB* bzw. *CD* des Rechtecks *ABCD*. Das Rechteck rotiert um die Gerade *OO*'. Zeichnet den erhaltenen Körper und nennt seine Elemente.

b) Die Punkte *M* und *N* sind die Mitten der Seiten *AB* bzw. *CD* des Quadrates *ABCD*. Das Quadrat rotiert um die Gerade *MN*. Zeichnet den erhaltenen Körper und nennt seine Elemente.

6 *ABCDEF* in der unteren Abbildung ist ein regelmäßiges Sechseck. *B* und *E* sind die Mittelpunkte der Kreise. Argumentiert, ob diese Darstellung die Abwicklung eines geraden Kreiszylinders ist.

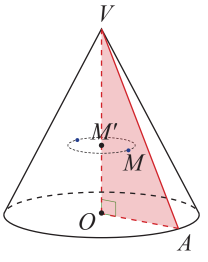


L6. Der gerade Kreiskegel: Darstellung, charakteristische Elemente, Abwicklung

Wir lösen und stellen fest

1. Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck VOA, $\sphericalangle VOA = 90°$. Wir rotieren die Dreieckfläche VOA vollständig um die Kathete VO. Identifiziert in eurem Umfeld Körper, die so erzeugt werden können.

Sei VOA die dreieckige Fläche, die um die Gerade VO, *Drehachse* genannt, gedreht wird. Der Punkt A beschreibt den Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OA. Jeder Punkt M der Dreieckfläche VOA beschreibt einen Kreis mit dem Mittelpunkt M' auf der geschlossenen Strecke VO und dem Radius $MM' \perp VO$. Der Punkt V und alle Punkte der Strecke VO sind fix.
Es entsteht ein Körper, der *gerader Kreiskegel* genannt wird.
Der Diskus mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OA ist die *Grundfläche* des Kegels. Der Punkt V ist die *Spitze* des Kegels.
Die Strecke VA und jede andere Strecke VP, mit $P \in \mathcal{C}(O, OA)$, sind *Erzeugende* des Kegels.
Der gerade Kreiskegel ist ein *Drehkörper*.



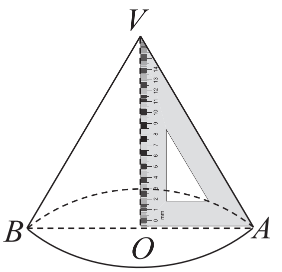
Die Drehachse des geraden Kreiskegels ist die Gerade bestimmt von der Spitze des Kegels und dem Mittelpunkt der Grundfläche.

Definition. Der geometrische Körper, der durch die vollständige Drehung einer von einem rechtwinkligen Dreieck begrenzten dreieckigen Fläche um eine seiner Katheten entsteht, heißt *gerader Kreiskegel*.

Anders gesagt: Wenn VOA ein rechtwinkliges Dreieck ist ($\sphericalangle VOA = 90^\circ$), dann ist die Vereinigung aller geschlossenen Strecken VM, wobei M auf dem Diskus mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OA liegt, der *gerade Kreiskegel* mit der Grundfläche dem Diskus mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OA und der Spitze V.
Der Einfachheit halber werden wir nur *Kegel* sagen. (Da wir nur den einen definiert haben.)

Wir verstehen anhand von Beispielen

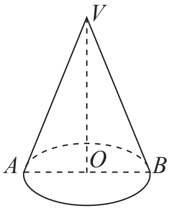
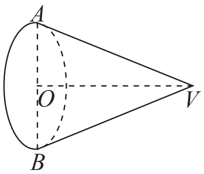
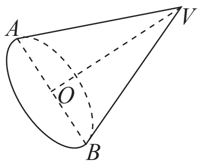
1. Anwendung: Stellt ein Zeichendreieck so wie in der Darstellung nebenan auf das Heft. Dreht es dann um die vertikale Kathete. Stellt euch vor, wie der so erzeugte *geometrische Körper* aussieht.



Lösung. AOV ist das Dreieck, bestimmt von den Ecken des Zeichendreiecks ($\sphericalangle VOA = 90°$). Wir rotieren es um die Kathete VO, sodass die Kathete OA auf dem Heft bleibt. Die Kathete AO beschreibt einen Diskus mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OA. Jeder Punkt der Hypotenuse beschreibt einen Kreis mit dem Mittelpunkt auf OV. Die Hypotenuse AV *generiert* durch die Drehung die Seitenfläche des geraden Kreiskegels mit der Grundfläche $\mathcal{C}(O, OA)$ und der Spitze V.

Bemerkung. **1.** In praktischen Situationen bezeichnet man oft nur die Oberfläche des Kegels als Kegel. Die Punkte im Inneren werden vernachlässigt.

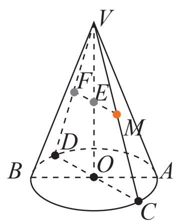
2. Falls nicht anders vereinbart, bezeichnet man den Mittelpunkt der Grundflächen eines Kegels mit O und man zeichnet zwei Erzeugende AV und BV, wobei A und B diametral entgegengesetzte Punkte der Grundfläche $\mathcal{C}(O, R = OA)$ sind.
Die Lage der Achse, um die sich die dreieckige Fläche dreht, ist nicht relevant. Sie kann vertikal, horizontal oder schief liegen.

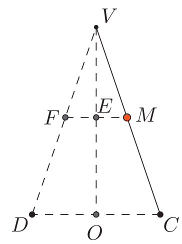
Kegel mit vertikaler Achse	Kegel mit horizontaler Achse	Kegel mit schiefer Achse
		

V ist die Spitze der Kegel, und der Diskus mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OA ist die Grundfläche der dargestellten Kegel.
Die Strecken OA und OB sind Radien der Grundflächen der Kegel. Ihre Längen werden mit R bezeichnet.
Die Strecken VA und VB sind Erzeugende der Kegel. Ihre Längen werden mit E bezeichnet.

Anwendungen

2. Anwendung: Beweist, ähnlich wie beim Zylinder, dass die *Drehachse* eines geraden Kreiskegels seine *Symmetrieachse* ist.



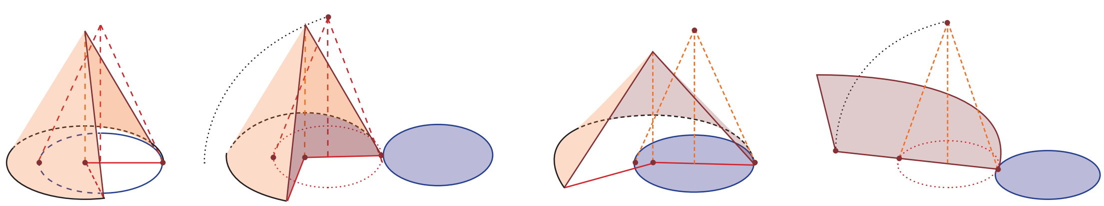


Anleitung. Wir verwenden die rechts dargestellten Figuren, um die Symmetrie der Seitenfläche des Kegels in Bezug auf die Gerade VO zu beweisen.
Sei M ein Punkt auf der Seitenfläche, CV, die Erzeugende, auf der M liegt, und D, der diametral entgegengesetzte Punkt von C auf der Grundfläche.
Wir konstruieren $ME \perp VO$, $E \in VO$ und bezeichnen den Schnittpunkt von ME und VD mit F. Wir beweisen, dass $EM \equiv EF$. Folglich ist F das Spiegelbild von M in Bezug auf VO und gehört zur Seitenfläche des Kegels.

Fürs Portfolio

Beweist, dass die Aussage der **2. Anwendung** auch dann gilt, wenn M auf der Grundfläche oder im Inneren des Kegels liegt.

3. Anwendung: Unten wird eine Methode zum Abwickeln des geraden Kreiskegels dargestellt.



a) Betrachtet die Darstellungen und beschreibt die vier Etappen zum Abwickeln des Kegels.
b) Beschreibt die entstandene Fläche (die Abwicklung des Kegels).

Lösung. **a)** Man schneidet die Grundfläche des Kegels aus und legt sie auf die Ebene, in der wir die Abwicklung erzeugen wollen.
Danach schneiden wir die Seitenfläche entlang einer Erzeugenden auf und glätten die Fläche. Dann legen wir diese Fläche auf die Ebene, wo auch die Grundfläche liegt.
b) Alle Erzeugenden eines geraden Kreiskegels sind kongruent. Die Seitenfläche ist die Menge aller Erzeugenden. Die Abwicklung der Seitenfläche ist ein Kreisausschnitt, dessen Radius die Erzeugende des Kegels ist.
Schlussfolgerung. Die Abwicklung des geraden Kreiskegels ist eine Fläche bestehend aus einem Diskus (der Grundfläche des Kegels) und einem Kreisausschnitt mit dem Radius der Länge E und der Länge gleich dem Umfang des Grundkreises.

Aufgaben

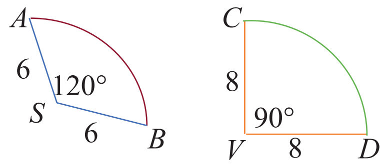
1 Dreht man ein rechtwinkliges Dreieck um seine Katheten AB bzw. AC, erhält man zwei gerade Kreiskegel.

a) Zeichnet die beiden Körper.

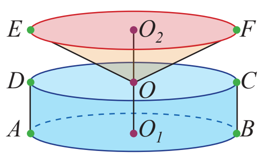
b) Wenn $AB = a$ cm, $AC = b$ cm, $a > b$, schreibt die untere Tabelle in eure Hefte ab und ergänzt sie. R ist der Radius und E die Erzeugende des geraden Kreiskegels.

	Kegel 1	Kegel 2
R	b	a
E		

2 Man kann die Seitenfläche eines Kegels erhalten, wenn man einen Kreisausschnitt „zusammenwickelt“.
Unten sind zwei Kreisausschnitte dargestellt. Aus ihnen werden die Seitenflächen zweier Kegel erhalten.
Bestimmt für jeden Kegel den Radius der Grundfläche und den Umfang des Grundkreises.



3 Unten ist die Skizze eines Ornamentes dargestellt.



a) Identifiziert und nennt die geometrischen Körper, aus denen das Ornament gebildet ist.

b) Nennt die Elemente eines jeden Körpers, aus denen das Ornament gebildet ist.

4 $ABCD$ ist ein Quadrat, $AC \cap BD = \{O\}$ und $AC = 6\sqrt{2}$ cm.

a) Dreht das Quadrat um seine Diagonale BD und beschreibt die entstandenen geometrischen Körper.

b) Nennt die Elemente der zwei Körper und die Längen ihrer Radien und Erzeugenden.

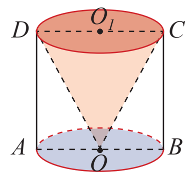
5 Die Seitenlängen des gleichschenkligen Dreiecks ABC sind $AB = 2a$, $AC = 2a$, $BC = 3a$, mit $a > 0$.

a) Zeichnet ein Dreieck, das den Angaben aus der Voraussetzung entspricht und zeichnet seine Symmetrieachse.

b) Beweist, dass durch Drehung der Dreieckfläche um ihre Symmetrieachse ein gerader Kreiskegel entsteht.

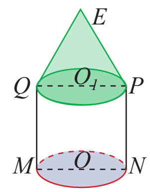
c) Bestimmt die Länge der Erzeugenden und die Länge des Radius des Kegels, der entsteht.

6 Untersucht die nebenan dargestellten Figuren.



a) Nennt die geometrischen Körper und ihre Elemente.

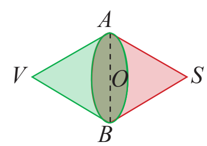
b) Bestimmt den Radius und die Erzeugende des Kegels bzw. des Zylinders in folgenden Fällen:



b1. $ABCD$ ist ein Quadrat, $AB = 6$ cm, O ist die Mitte der Strecke AB.

b2. $MNPQ$ ist ein Quadrat, PQE ist ein gleichseitiges Dreieck, $\mathcal{U}_{MNPEQ} = 20$ cm.

7 Legt man zwei Kegel (wie in der Abbildung) aneinander, erhält man den rechts dargestellten Körper. Die zwei geraden Kreiskegel haben dieselbe Grundfläche mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OA.



a) Nennt die Elemente eines jeden Kegels.

b) Zeigt, dass die Punkte V, O, S kollinear sind.

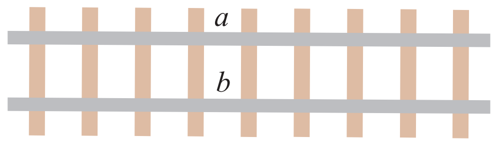
c) Falls $VASB$ ein Rhombus ist, $VS = 40\sqrt{3}$ cm und $\sphericalangle AVB = 60^\circ$, berechnet die Radien und die Erzeugenden der zwei Kegel.

3 Parallelität im Raum

L1. Parallele Geraden, der Winkel zweier Geraden im Raum

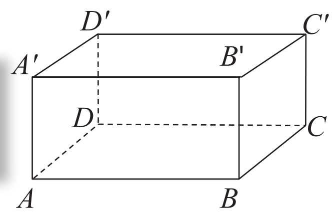
In der Geometrie geht es um den Raum und die Beschaffenheit von Körpern aus der realen Umwelt. Der Mensch war ständig bemüht, naturgetreue Modelle zu schaffen, die ihm ermöglichten, die Realität besser zu verstehen.

Denken wir zum Beispiel an eine Lokomotive, die sich geradlinig bewegt. Sie benötigt eine gewisse Kraft, um die Waggons hinter sich zu ziehen. Die Größe der Kraft wird mithilfe einer Zahl ausgedrückt, aber man muss auch die Richtung und den Richtungssinn der Kraft kennen. Die Räder der Lokomotive bewegen sich auf *zwei Schienen*. Als Modell dafür können *zwei Geraden*, die in derselben Ebene und parallel sind, betrachtet werden.



Wir lösen und stellen fest

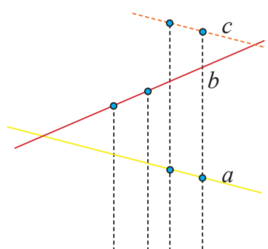
1. Anwendung. a) Wendet das *Parallelenaxiom* im Parallelepiped $ABCDA'B'C'D'$ für die Kanten AB, AD bzw. AA' und die Eckpunkte, die nicht auf ihnen liegen, an.
b) Findet vier Paare von nicht komplanaren Geraden.

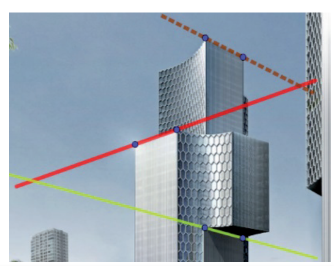


Lösung. **a)** Die einzige Parallele zur Geraden AB durch den Punkt A' ist $A'B'$, durch den Punkt C ist es CD, und durch den Punkt C' ist es $C'D'$. Analog für die anderen Strecken.
b) Die Geraden, die weder parallel zu AB sind noch diese schneiden, sind DD', CC', $A'D'$ und $B'C'$. So erhalten wir die Paare von nicht komplanaren Geraden: AB und DD', AB und CC', AB und $A'D'$, AB und $B'C'$.

In der Ebene sind zwei verschiedene Geraden entweder *parallel* (sie haben keinen gemeinsamen Punkt) oder sie *schneiden* sich (sie haben genau einen gemeinsamen Punkt).
Im Raum gibt es Geraden, die nicht parallel und auch nicht schneidend sind. Sie sind *windschief (nicht komplanar)*.

Aufgabe. Betrachtet die zwei Zeichnungen. Entscheidet, ob zwei von den Geraden a, b, c gemeinsame Punkte haben.





Aus der ersten Zeichnung ist es schwierig festzustellen, ob zwei der Geraden gemeinsame Punkte haben oder nicht. Die Geraden a und b und die Geraden b und c schneiden sich scheinbar. Wir brauchen zusätzliche Informationen. Die Geraden a und c könnten parallel sein, aber es ist nicht gewiss.

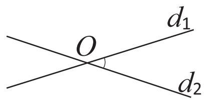
Das Gebäude, dessen Kanten als Geraden *modelliert* wurden, bieten genügend Informationen, um richtig zu antworten. Die Geraden a und c sind komplanar und parallel, sie haben keine gemeinsamen Punkte. Die Geraden a und b sind windschief. Auch die Geraden b und c sind windschief. Also haben sie keine gemeinsamen Punkte.

Bei der zweidimensionalen Darstellung räumlicher geometrischer Körper müssen Konventionen strikt eingehalten werden.
Wenn in der Geometrie der Ebene eine korrekt realisierte Figur einen allgemeinen Überblick über die Ansätze des Problems, der Beziehungen der Elemente, die erscheinen, bietet, werden wir feststellen, dass im Raum die Zeichnung nicht ausreicht, sie zeigt nur „eine Fläche“ der Konfiguration. Mit ein wenig Training und Fantasie werden wir in der Lage sein, „im Raum zu sehen“, d. h. Positionen, Beziehungen, Maßeinheiten zu erkennen.

Wir verstehen anhand von Beispielen

A. Der Winkel zweier Geraden im Raum

Zwei beliebige Geraden im Raum bilden einen Winkel.
Im Raum können zwei Geraden identisch, parallel, sich schneidend oder windschief sein. Es gibt folgende Situationen:
1. Falls $d_1 = d_2$, gilt $\sphericalangle(d_1, d_2) = 0°$. (Zwei identische Geraden bilden einen Nullwinkel.)
2. Falls $d_1 \parallel d_2$, wird vereinbart, dass $\sphericalangle(d_1, d_2) = 0°$. (Zwei parallele Geraden bilden einen Nullwinkel.)
3. Falls die Geraden d_1 und d_2 schneidend sind, bestimmen sie die Ebene (d_1, d_2).
In der Ebene (d_1, d_2) bestimmen die beiden Geraden 4 Winkel um den Schnittpunkt. Genauer gesagt zwei Paare von Scheitelwinkeln.
Zwei beliebige anliegende Winkel (von den 4) sind supplementär.

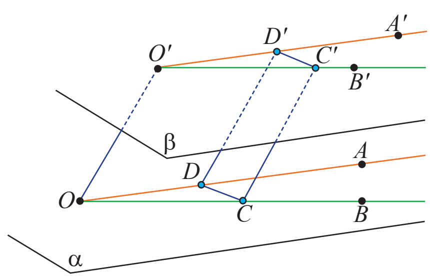


Das kleinste Maß der vier Winkel um den Punkt O ist das *Maß des Winkels* gebildet von den Geraden d_1 und d_2, und wird $\sphericalangle(d_1, d_2)$ bezeichnet.

4. Es gibt auch den Winkel gebildet von zwei windschiefen Geraden.
Wir werden den Winkel zweier Geraden im Raum mithilfe der Begriffe der Geometrie der Ebene definieren und alle möglichen Fälle berücksichtigen.
Wir zeigen zunächst, dass das Ergebnis der Geometrie der Ebene in Bezug auf kongruente oder supplementäre Winkel mit paarweise parallelen Seiten auch im Raum gültig bleibt.

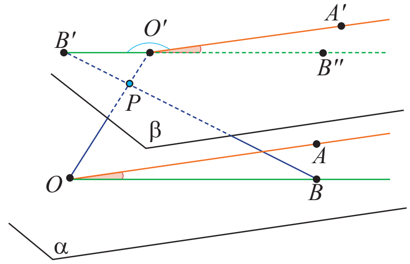
Satz 1. Falls $\sphericalangle AOB$ und $\sphericalangle A'O'B'$ paarweise parallele Schenkel haben, $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$, dann ist $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O'B'$ oder $\sphericalangle AOB + \sphericalangle A'O'B' = 180°$.
Beweis. Wir bezeichnen mit α bzw. β die Ebenen (AOB) bzw. $(A'O'B')$.

Fall 1: Wenn die Gerade OO' die Strecken AA' und BB' in den Ebenen $(OA, O'A')$ und $(OB, O'B')$ nicht schneidet, werden die Punkte C und D auf den Strecken OA bzw. OB und die Punkte C' und D' auf den Strecken $O'A'$ bzw. $O'B'$ so angenommen, dass $OO' \parallel CC' \parallel DD'$. Die Vierecke $OO'C'C$ und $OO'D'D$ sind Parallelogramme (die Gegenseiten sind paarweise parallel). Dann gilt $OC \equiv O'C'$ und $OD \equiv O'D'$, aber auch CC', OO' und DD' sind parallel und kongruent. Also ist $CC'D'D$ ein Parallelogramm und $CD \equiv C'D'$.
Laut Kongruenzfall SSS gilt $\Delta OCD \equiv \Delta O'C'D'$, also $\sphericalangle COD \equiv \sphericalangle C'O'D'$ und $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O'B'$.



Fall 2: Wenn die Gerade OO' sowohl die Strecke AA' als auch die Strecke BB' schneidet, seien $O'A''$ bzw. $O'B''$ die zu den Halbgeraden $O'A'$ bzw. $O'B'$ entgegengesetzten Halbgeraden. Wir erhalten $\sphericalangle A''O'B'' \equiv \sphericalangle A'O'B'$, als Scheitelwinkel. Analog wird bewiesen, dass $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O'B'$.

Fall 3. Wenn die Gerade OO' die Strecke AA' nicht schneidet, aber die Strecke BB' schneidet, sei $OO' \cap BB' = \{P\}$. OB'' sei die der Halbgeraden OB' entgegengesetzte Halbgerade in der Ebene β. Offensichtlich gilt $\sphericalangle A'O'B' + \sphericalangle A'O'B'' = 180°$. Für $\sphericalangle AOB$ und $\sphericalangle A'O'B''$ gilt Fall 1, deshalb sind sie kongruent. Also $\sphericalangle AOB + \sphericalangle A'O'B'' = 180^0$.



Ebenso überlegt man im Fall, dass OO' die Strecke BB' nicht schneidet und die Strecke AA' schneidet.

Nun können wir den Winkel zweier beliebiger Geraden im Raum definieren.

Definition. Der Winkel zweier beliebiger Geraden im Raum ist der Winkel gebildet von zwei Parallelen zu den zwei Geraden durch einen beliebigen gegebenen Punkt.

Bemerkung. Der Punkt, durch den die Parallelen errichtet werden, kann beliebig gewählt werden. Es kann auch ein Punkt auf einer der beiden Geraden sein. Deshalb können wir die Definition anders formulieren:

Der Winkel zwischen den beliebigen Geraden d_1 und d_2 ist der Winkel gebildet von der Geraden d_1 und einer Parallelen zu d_2 durch einen beliebigen Punkt auf d_1.

Anwendungen

1. Anwendung. Sei $ABCDEFGH$ ein Würfel aus Draht. Er hat 12 Kanten, 12 Diagonalen der Flächen und 4 Diagonalen des Würfels. Bestimmt die Maße der Winkel, gebildet von den Geraden:

PA

a) AE und ED; **b)** CD und HG; **c)** AD und BF; **d)** AH und CG; **e)** BG und DE; **f)** BG und CH.

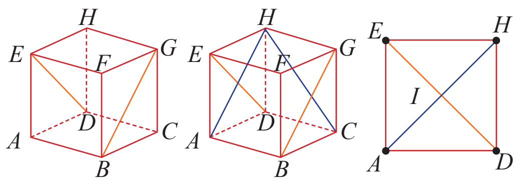
Lösung. Die Flächen des Würfels sind quadratisch.

(1) Die Gegenseiten einer jeden Fläche sind kongruent und parallel.

(2) Die anliegenden Seiten einer Fläche bilden rechte Winkel.

(3) Die Winkel, gebildet von den Diagonalen und den Seiten des Quadrates, sind in jeder Fläche 45°.

(4) Die Diagonalen sind in jeder Fläche senkrecht zueinander.

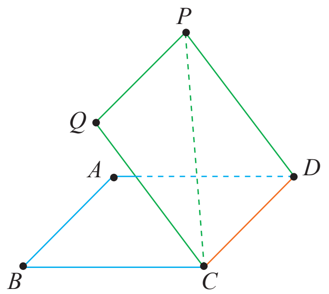


a) Die Geraden AE und ED schneiden sich und $\sphericalangle(AE, ED) = \sphericalangle(AED) \overset{(3)}{=} 45°$. **b)** Die Geraden CD und HG sind parallel ($CDHG$ ist ein Quadrat) und $\sphericalangle(CD, HG) = 0°$. Die anderen sind Paare nicht komplanarer Geraden.

Wir suchen Geraden, die zu mindest zu einer der Geraden parallel sind. **c)** $ABFE$ ist ein Quadrat und $BF \parallel AE$. $\sphericalangle(AD,BF) = \sphericalangle(AD, AE) = \sphericalangle(DAE) \overset{(2)}{=} 90°$. **d)** $CDHG$ ist ein Quadrat und $CG \parallel HD$. Man erhält $\sphericalangle(AH, CG) = \sphericalangle(AH, HD) = \sphericalangle(AHD) \overset{(3)}{=} 45°$. **e)** Wir bestimmen den Winkel, gebildet von den Geraden BG und ED. Die zwei Geraden sind in den Ebenen $ADHE$ bzw. $BCGF$ eingeschlossen. Die Diagonale AH schneidet DE.

Wir beweisen, dass $AH \parallel BG$. Die Kante AB ist parallel und kongruent mit CD. Diese ist parallel und kongruent mit HG. Also ist AB parallel und kongruent mit HG. Deshalb ist $ABGH$ ein Parallelogramm und somit $AH \parallel BG$. Der Winkel der Geraden BG und ED ist der Winkel, gebildet von DE und AH (Geraden in der Ebene $ADHE$). Wir betrachten diese Fläche des Würfels. Sie ist ein Quadrat, in welchem AH und ED senkrecht stehen, also $\sphericalangle(BG,DE) = \sphericalangle(AH,DE) \overset{(4)}{=} 90°$. **f)** Da $AH \parallel BG$, ist $\sphericalangle(BG, CH) = \sphericalangle(AH, CH) = \sphericalangle(AHC)$. Das Dreieck AHC ist gleichseitig, weil seine Seiten Diagonalen in kongruenten Quadraten sind. Also $\sphericalangle(BG, CH) = 60°$.

2. Anwendung. Die Rhomben $ABCD$ und $CDPQ$ liegen in verschiedenen Ebenen. $\sphericalangle BAD = 140°$ und $CD \equiv CP$. Bestimmt die Maße der Winkel: **a)** $\sphericalangle(AB, DP)$ **b)** $\sphericalangle(PQ, BC)$.



Lösung. **a)** Die Seiten des Rhombus $CDPQ$ sind kongruent. Weil $CD \equiv CP$, ist das Dreieck CDP gleichseitig, $\sphericalangle CDP = 60°$.
Die Geraden AB und DP sind windschief. Wir suchen eine Gerade, die eine von ihnen schneidet und mit der anderen parallel ist.
Da $ABCD$ ein Rhombus ist, schneiden sich die Geraden CD und DP und $CD \parallel AB$.
Dann gilt $\sphericalangle(AB, DP) = \sphericalangle(CD, DP) = \sphericalangle CDP = 60°$, also $\sphericalangle(AB, DP) = 60°$.
b) Auf dieselbe Weise berechnen wir das Maß des $\sphericalangle(PQ, BC)$.
$CDPQ$ ist ein Rhombus, also $CD \parallel PQ$. Dann gilt $\sphericalangle(PQ, BC) = \sphericalangle(CD, BC) = \sphericalangle(BCD)$. Aber der Winkel BCD ist stumpf, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 140°$ (gegenüberliegende Winkel im Rhombus).
Der Winkel zwischen den Geraden PQ und BC hat das Maß $\sphericalangle(PQ, BC) = 180° - \sphericalangle BCD = 40°$.

Aufgaben

1 In der Ebene α sei AOB ein Winkel. Durch Punkt $Q \notin \alpha$ konstruiert man die Geraden $QC \parallel OA$ und $QD \parallel OB$. Bestimmt das Maß des Winkels CQD, falls: **a)** $\sphericalangle(AOB) = 72°$; **b)** $\sphericalangle(AOB) = 123°$.

2 Einer der Winkel, gebildet von den sich schneidenden Geraden a und b, hat das Maß $130°$. Durch den Punkt O, der nicht auf der Ebene (a, b) liegt, werden die Geraden c und d, $c \parallel a$, gelegt, und d ist parallel zu der Winkelhalbierenden eines Winkels, gebildet von den Geraden a und b. Berechnet das Maß des Winkels $\sphericalangle(c, d)$.

3 Sei $ABCDEFGH$ ein Würfel.
a) Gebt ein Beispiel zweier windschiefer Geraden, die einen Winkel von $90°$ bilden.
b) Gebt ein Beispiel zweier windschiefer Geraden, die einen Winkel von $45°$ bilden.
c) Gebt ein Beispiel zweier Geraden, die einen Winkel von $60°$ bilden.

4 Gegeben ist die regelmäßige Pyramide $VABC$, mit $AB = 2a$, $VA = a\sqrt{2}$. Falls der Punkt M die Mitte der Kante AB ist und N die Mitte von AC ist, berechnet das Maß des Winkels gebildet von den Geraden:
a) VA und VB; **b)** VN und BC; **c)** VB und MN.

5 Der Rhombus $ABCD$ und das Rechteck $ADEF$ liegen in verschiedenen Ebenen, $AB = 2$ cm, $\sphericalangle(BAD) = 60°$, $FU = 2\sqrt{2}$ cm und $EC = 2\sqrt{3}$ cm.
Berechnet die Maße der Winkel, gebildet von den Geraden:
a) AB und EF; **b)** AE und EC;
c) BF und EC; **d)** EF und AC.

6 Im geraden Parallelepiped (Quader) $ABCDEFGH$ sind $AC \cap BD = \{O\}$, $EG \cap FH = \{Q\}$.
a) Beweist, dass $AE \parallel OQ$.
b) Mithilfe von $HD \perp BD$ berechnet das Maß des Winkels der Geraden AE und BD.

7 Im regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ sind die Punkte M, N, P die Mitten der Strecken BC, BD bzw. CD. Berechnet die Maße der Winkel der Geraden:
a) AD und MN; **b)** AM und NP.

8 $ABCDEFGH$ ist ein Würfel und die Punkte O und Q sind die Mittelpunkte der Flächen $ABCD$ bzw. $BCGF$.
Berechnet die Maße der Winkel: $\sphericalangle(GO, BD)$, $\sphericalangle(HO, BG)$, $\sphericalangle(AB, OQ)$, $\sphericalangle(BO, EF)$.

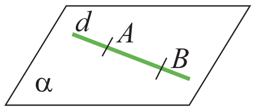
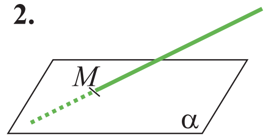
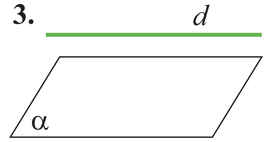
9 Punkt M ist die Mitte der Kante DD' des Quaders $ABCDA'B'C'D'$, $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $BC = 4$ cm, $CC' = 8$ cm.
a) Zeigt, dass $MD \perp B'C'$.
b) Berechnet die Maße der Winkel $\sphericalangle(AM, CC')$, $\sphericalangle(AB, MC)$, $\sphericalangle(AA', MC)$.

10 $CDEF$ sei ein Parallelogramm und $M \notin (CDE)$, sodass $\sphericalangle MED = 90°$, $\sphericalangle DME = 55°$, $\sphericalangle EMF = \sphericalangle EFM = 45°$.
a) Zeigt, dass $CF \perp ME$ und $ME \perp CD$.
b) Berechnet die Maße der Winkel $\sphericalangle(CF, DM)$ und $\sphericalangle(CD, MF)$.

L2. Die Gerade, die parallel zu einer Ebene ist

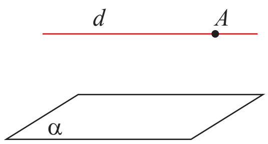
Wir erinnern uns!

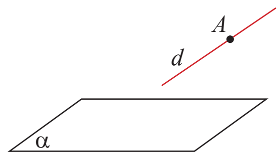
Eine Gerade d kann in Bezug auf eine Ebene α folgende Lage einnehmen:
1. d ist eingeschlossen in α.
2. d schneidet α.
3. d ist parallel zu α.

$d \subset \alpha \Leftrightarrow d \cap \alpha = d$ d und α haben unendlich viele gemeinsame Punkte	$d \cap \alpha = \{M\}$ d und α haben einen einzigen gemeinsamen Punkt	$d \cap \alpha = \varnothing$ d und α haben keinen gemeinsamen Punkt
1. 	**2.** 	**3.** 

Wir verstehen anhand von Beispielen

Definition. Wenn die Gerade d und die Ebene α keinen gemeinsamen Punkt haben, dann ist d parallel zu α. $d \parallel \alpha$.





Bemerkung. $d \parallel \alpha \Leftrightarrow d \cap \alpha = \varnothing$

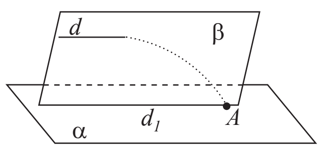
Wenn eine einzige Gerade d parallel zur Ebene α gezeichnet werden soll, vereinbaren wir, dass d parallel zu einer Seite des Parallelogramms, das die Ebene symbolisiert, verläuft.

Der nächste Satz wird oft verwendet, um zu beweisen, dass *eine Gerade parallel zu einer Ebene* ist.

Satz 1. Ist eine Gerade d parallel zu einer Geraden d_1, die in der Ebene α eingeschlossen ist, dann ist die Gerade d parallel zu α oder in α eingeschlossen.

Voraussetzung: $d \parallel d_1$ und $d_1 \subset \alpha$

Behauptung: $d \parallel \alpha$ oder $d \subset \alpha$



Beweis. Die Gerade d_1 sei in der Ebene α eingeschlossen und $d \parallel d_1$, $d \not\subset \alpha$. Wir verwenden die Methode der Zurückführung auf einen Widerspruch.
Wir nehmen an, $d \cap \alpha \neq \varnothing$. Da $d \not\subset \alpha$, folgt, dass d die Ebene in einem Punkt schneidet $d \cap \alpha = \{A\}$. Die parallelen Geraden d und d_1 bestimmen eine Ebene β, verschieden von α, $d_1 \subset \alpha$ und $d_1 \subset \beta$, also $\alpha \cap \beta = d_1$. Weil $A \in \alpha$ und $A \in d \subset \beta$, ist $A \in \alpha \cap \beta$ oder $A \in d \cap d_1$, Widerspruch zu $d \parallel d_1$. Die Annahme war falsch, folglich: $d \cap \alpha = \varnothing$, das heißt $d \parallel \alpha$.
Falls $d \subset \alpha$, folgt direkt die Behauptung des Satzes.

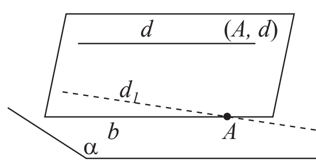
Schlussfolgerung. Um zu beweisen, dass eine Gerade d, die durch einen Punkt außerhalb einer Ebene α geht, parallel zu dieser ist, genügt es, eine Gerade zu finden, die in der Ebene α eingeschlossen ist und parallel zu d ist.

Der nächste Satz wird oft verwendet, um zu beweisen, dass *eine Gerade in einer Ebene eingeschlossen* ist.

Satz 2. Wenn eine Gerade d parallel zur Ebene α ist und die Gerade d_1 parallel zu d ist und einen Punkt A der Ebene α enthält, dann ist die Gerade d_1 in der Ebene α eingeschlossen.

Voraussetzung: $d \parallel \alpha$, $d_1 \parallel d$, $A \in d_1$ und $A \in \alpha$

Behauptung: $d_1 \subset \alpha$.



Beweis. Sei $d \parallel \alpha$ und $A \in \alpha$. Die Gerade d und ein Punkt A außerhalb bestimmen eine Ebene, die einen gemeinsamen Punkt mit α hat und verschieden von α ist. Also ist der Schnitt der zwei Ebenen eine Gerade $b = \alpha \cap (d, A)$. Weil $d \parallel \alpha$ und d, b komplanar sind, gilt $d \parallel b$ (aus $d \nparallel b$ folgt $d \nparallel \alpha$). Also sind die Geraden d_1 und b parallel zur Geraden d, durch Punkt A.
Laut *Parallelenaxiom* (*A.* 5) ist $d_1 = b$. Weil $b \subset \alpha$, gilt $d_1 \subset \alpha$.

Satz 3. (Folgesatz des Satzes 2) Eine Ebene α, die eine Gerade d, parallel zu einer anderen Ebene β, einschließt, schneidet diese in einer zu d parallelen Geraden..

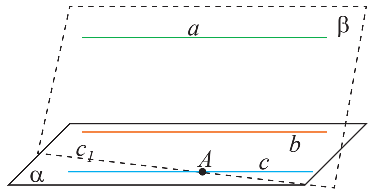
Anwendungen

Nun beweisen wir die Transitivität der Parallelitätsbeziehung.

Satz 4. Wenn zwei verschiedene Geraden zu einer dritten Geraden parallel sind, dann sind sie parallel.
Gegeben sind die Geraden a, b und c, sodass $a \parallel b$ und $b \parallel c$.

Voraussetzung: a, b und c sind verschieden, $a \parallel b$ und $b \parallel c$.	*Behauptung*: $a \parallel c$.

Beweis. **1.** Falls die drei Geraden in derselben Ebene liegen, ist die Behauptung aus der Geometrie der Ebene bekannt.



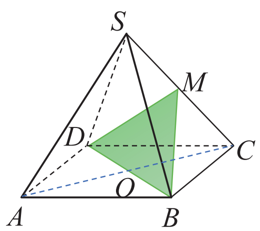
2. Falls die Geraden a, b und c nicht in derselben Ebene liegen, nehmen wir an, die parallelen Geraden b und c bestimmen die Ebene α.
Aus $a \parallel b$ und $b \subset \alpha$ folgt laut Satz 1, dass $a \parallel \alpha$. Seien $A \in c$, $c \subset \alpha$ und $\beta = (a, A)$. Die Ebene β schließt die Gerade a ein und $a \parallel \alpha$. Laut Satz 3 ist der Schnitt der Ebenen α und β eine zu a parallele Gerade. Sei $\{c_1\} = \alpha \cap \beta$. Folglich: $c_1 \parallel a$ und $A \in c_1$.
Aus $b \parallel a$ und $a \subset \beta$ folgt $b \parallel \beta$. Aber $b \subset \alpha$, also $b \parallel \alpha \cap \beta = \{c_1\}$. Die Geraden c und c_1 sind parallel durch A zur Geraden b. Laut Parallelenaxiom gilt dann $c = c_1$ und $c_1 \parallel a$, also $c \parallel a$.

Aufgaben

1 Sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Würfel. Findet:
a) parallele Geraden zur Ebene (ABB');
b) parallele Geraden zur Ebene (ABC').

2 $ABCDMNPQ$ ist ein Quader.
a) Schreibt die von zwei Ecken des Quaders bestimmten Geraden, die parallel zur Ebene (ADQ) sind.
b) Schreibt die von drei Ecken des Quaders bestimmten Ebenen, die parallel zur Geraden NP sind.
c) Beweist, dass $MP \parallel (ACQ)$.

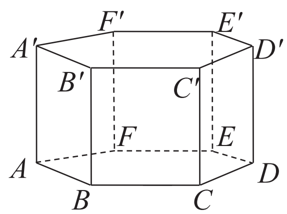
3 Die Grundfläche der Pyramide $SABCD$ ist ein Quadrat. M ist die Mitte der Seitenkante SC. Beweist, dass die Gerade SA parallel ist zur Ebene (MBD).



4 $ABCDEFGH$ ist ein Quader, BK ist die Winkelhalbierende des Winkels CBD, $K \in CD$, und DL die des Winkels ADB, $L \in AB$. Beweist, dass:
a) $BK \parallel (DEL)$; **b)** $DL \parallel (BFK)$.

5 Die Seite $AB = 24$ cm des gleichseitigen Dreiecks ABC liegt in der Ebene α und $C \notin \alpha$. Der Punkt M liegt auf der Halbgeraden AC, sodass $MC = 3 \cdot MA$. Bestimmt NC, wenn N auf der Geraden BC liegt, sodass $MN \parallel \alpha$.

6 Das Prisma in der Zeichnung ist regelmäßig sechsseitig.



a) Nennt die Geraden, die parallel zur Ebene (ABA') sind.
b) Beweist, dass die Gerade AB' parallel zur Ebene (CFC') ist.

7 Im Tetraeder $MNPQ$ liegen die Punkte A und B so auf den Kanten MN bzw. MP, dass $MA = 2 \cdot AN$, $MP = 3 \cdot BP$. Die Parallele durch den Punkt G, dem Schwerpunkt des Dreiecks NPQ, zur Geraden NP schneidet die Kanten PQ bzw. NQ in den Punkten C bzw. D.
a) Zeichnet und bestimmt die Lage der Geraden MQ in Bezug auf die Ebene (ABC).
b) Beweist, dass $NP \parallel (ABG)$.

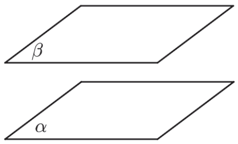
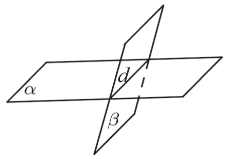
8 Sei $ABCD$ ein Tetraeder. G_1 und G_2 sind die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und ABD. Beweist, dass die Gerade G_1G_2 parallel zu den Ebenen (BCD) und (ACD) ist.

9 Das Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und das Parallelogramm $BCEF$ liegen in verschiedenen Ebenen. Bestimmt die Lage der Geraden:
a) AD in Bezug auf die Ebene (BEF);
b) BF in Bezug auf die Ebene (DCE);
c) EF in Bezug auf die Ebene (ABC).

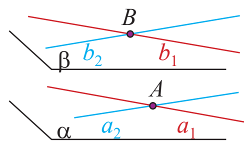
L3. Parallele Ebenen

Wir erinnern uns!

Im Raum gibt es parallele Ebenen.
Die mögliche gegenseitige Lage zweier Ebenen α und β im Raum ist:

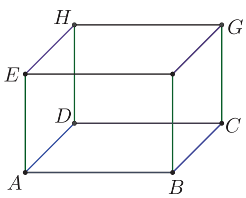
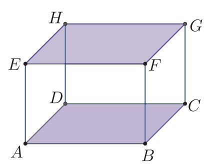
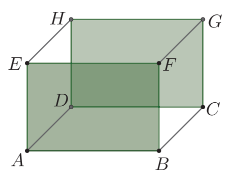
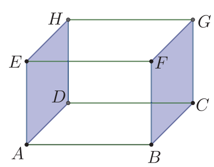
Die Ebenen sind *parallel*. $\alpha \parallel \beta$	Die Ebenen *schneiden* einander. $\alpha \cap \beta = d$	Die Ebenen sind *identisch*. $\alpha = \beta$
 Zwei Ebenen sind *parallel,* wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben.	 Zwei Ebenen *schneiden einander,* wenn ihr Schnitt eine Gerade ist.	 Zwei Ebenen sind *identisch*, wenn jeder Punkt der einen Ebene auch auf der anderen liegt.

Sind zwei sich schneidende Geraden einer Ebene α zu zwei Geraden einer Ebene β parallel, dann ist $\alpha \parallel \beta$.
Bemerkung. Dieses Ergebnis verwenden wir, um zu beweisen, dass zwei Ebenen parallel sind. Wir finden die sich schneidenden Geraden b_1 und b_2 in der Ebene β und die Geraden a_1 und a_2 in der Ebene α, sodass $b_1 \parallel a_1$ und $b_2 \parallel a_2$

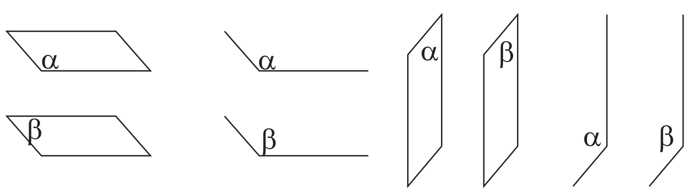


Wir verstehen anhand von Beispielen

1. Die Grundflächen eines jeden Prismas liegen in parallelen Ebenen.
2. Die Grundflächen des Zylinders liegen in parallelen Ebenen.
3. Im Parallelepiped befinden sich je zwei gegenüberliegende Flächen in parallelen Ebenen.

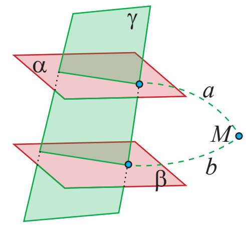
			
ABCDEFGH ist ein Parallelepiped.	$(ABCD) \parallel (EFGH)$	$(ABFE) \parallel (DCGH)$	$(ADHE) \parallel (BCGF)$

Bemerkung. Zwei parallele Ebenen werden als zwei Parallelogramme mit paarweise parallelen Seiten oder als Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln dargestellt.



Parallele Ebenen werden in vielen praktischen Situationen angetroffen, dann sind die nächsten Eigenschaften nützlich.

Satz 1. Wenn zwei parallele Ebene von einer dritten Ebene geschnitten werden, dann sind die Schnittgeraden parallel.



Beweis. Wir wählen die Ebenen $\alpha \parallel \beta$ und die Ebene γ, die diese schneidet. $\alpha \cap \gamma = a$ und $\beta \cap \gamma = b$. Zu beweisen ist $a \parallel b$. Wir verwenden die Methode der Zurückführung auf einen Widerspruch. Wir nehmen an, dass $a \cap b = \{M\}$. Aus $M \in a$, $a \subset \alpha$ und $M \in b$, $b \subset \beta$ folgt, dass $M \in \alpha \cap \beta$, also $\alpha \nparallel \beta$. Widerspruch zur Voraussetzung. Die Annahme ist falsch, also $a \parallel b$.

Anwendungen

Die *Transitivität* der *Parallelitätsbeziehung* gilt auch für Ebenen.

1. Anwendung. α und γ sind verschiedene Ebenen. Die Ebene β liegt so, dass $\alpha \parallel \beta$ und $\beta \parallel \gamma$. Dann ist $\alpha \parallel \gamma$.

Anders gesagt. Wenn zwei verschiedene Ebenen zu einer dritten parallel sind, dann sind sie untereinander parallel.

*Voraus*setzung: $\alpha \neq \gamma$, $\alpha \parallel \beta$ und $\beta \parallel \gamma$.

Behauptung: $\alpha \parallel \gamma$.

Lösung. Wir nehmen an, $\alpha \nparallel \gamma$. Dann gibt es einen Punkt $A \in \alpha \cap \gamma$. Durch A läuft eine einzige Ebene parallel zu β, also $\alpha = \gamma$, widerspricht der Voraussetzung $\alpha \neq \gamma$. Die Annahme ist falsch, also $\alpha \parallel \gamma$.

Satz 2. (Der Lehrsatz des Thales im Raum) Drei oder mehrere parallele Ebenen bestimmen auf zwei sie schneidenden Geraden proportionale Strecken.

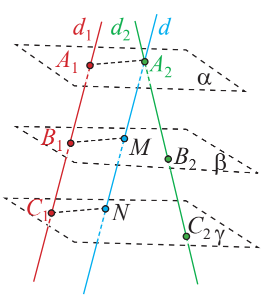
*Voraus*setzung: $\alpha \neq \gamma$, $\alpha \parallel \beta$ und $\beta \parallel \gamma$, Gerade d_1 schneidet die Ebenen α, β, γ in den Punkten A_1, B_1 bzw. C_1 und die Gerade d_2 schneidet sie in A_2, B_2 bzw. C_2.

Behauptung: $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

Beweis. Wir werden den Fall beweisen, dass drei parallele Ebenen $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ von den Geraden d_1 und d_2 in den Punkten A_1, A_2, B_1, B_2 bzw. C_1, C_2 geschnitten werden.

Fall 1: Die Geraden d_1 und d_2 *sind komplanar.* Wir verwenden den Satz des Thales in der Ebene.

Fall 2: Die Geraden d_1 und d_2 *sind windschief.*



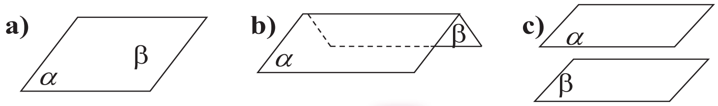
Wir konstruieren die Parallele zu d_1 durch A_2. Diese schneidet die Ebenen β und γ in den Punkten M bzw. N. Die Geraden $d_1 \parallel d$ bestimmen die Ebene (d_1, d) und die Kongruenz der Strecken (Seiten eines Parallelogramms) führt zu $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2M}{MN}$.

Die Geraden d_2 und d schneiden sich, sind also komplanar, und wir erhalten Fall 1 und somit die proportionalen Strecken: $\dfrac{A_2M}{MN} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

Folglich gilt $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

Aufgaben

1 Betrachtet die Zeichnungen und nennt die gegenseitige Lage der Ebenen α und β.



2 Schreibt ab und ergänzt die Lücken, sodass wahre Sätze entstehen.

a) Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene α läuft… Ebene parallel zu α.

b) Wenn $\alpha \parallel \beta$ und $\beta \parallel \gamma$, dann … oder… .

c) Wenn $a \cap b = \{M\}$ und $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha$, dann sind die Ebenen (a,b) und α … .

3 Sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Parallelepiped. Bestimmt die gegenseitige Lage der folgenden Ebenen:

a) (ABC) und $(A'B'D')$;

b) (ACC') und (BDD');

c) (ACC') und $(A'B'C')$;

d) (ADD') und (BCC').

4 $ABCDEFGH$ ist ein Quader. Die Punkte O und Q sind die Mittelpunkte der Grundflächen $ABCD$ bzw. $EFGH$. M ist die Mitte der Strecke BC. Beweist, dass $(ABE) \parallel (MOQ) \parallel (CDH)$.

5 Die Parallelogramme $ABCD$ und $ABEF$ befinden sich in verschiedenen Ebenen.

a) Beweist, dass die Ebenen (ADF) und (BCE) parallel sind.

b) Falls $EG \parallel BC$, beweist, dass die Ebenen (EFG) und (ABC) parallel sind.

6 Der Punkt S liegt außerhalb der Ebene des Quadrates $ABCD$ und die Punkte M, N, P, Q sind die Mitten der Strecken SA, SB, SC bzw. SD. Beweist, dass die Punkte M, N, P, Q komplanar sind und in einer Ebene parallel zur Ebene (ABC) liegen.

7 Durch die Ecken des Rechtecks $ABCD$ konstruiert man die parallelen Geraden AA', BB', CC' und DD', wobei A', B', C' und D' auf derselben Seite der Ebene (ABC) liegen.

a) Beweist, dass $(ABB') \parallel (CDD')$ und $(ADD') \parallel (BCC')$.

b) Falls $AA' = 0{,}1$ m, $BB' = 1$ dm, $CC' = 10$ cm und $DD' = 100$ mm, zeigt, dass $(ABC) \parallel (A'B'D')$.

8 Die Ebenen α, β, γ sind parallel, die Punkte $A, B \in \alpha$ und C, $D \in \beta$. Die Geraden AC, BC, BD und AD schneiden die Ebene γ in den Punkten E, F, G bzw. H. Wenn die Geraden AB und DC windschief sind, beweist, dass E, F, G, H ein Parallelogramm bestimmen.

9 Die Halbgeraden Ox, Oy, Oz bestimmen in den parallelen Ebenen α, β und γ die Dreiecke ABC, DEF bzw. HIJ.

a) Beweist, dass die drei Dreiecke ähnlich sind.

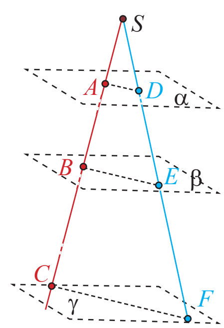
b) M ist die Mitte der Strecke BC und $OM \cap \beta = \{N\}$. Beweist, dass N die Mitte der Strecke EF ist.

c) Auf der Geraden d liegen die Punkte O und G, der Schwerpunkt des Dreiecks HIJ. Beweist, dass auch die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und DEF auf der Geraden d liegen.

10 Die Ebenen α, β und γ in der Zeichnung sind parallel. $SA = 6$ cm, $SC = 36$ cm, $SD = 10$ cm, $SE = 30$ cm und $BE = 24$ cm. Berechnet:

a) die Längen der Strecken AB, BC und SF;

b) $AD + CF$ (die Summe der Längen der Strecken AD und CF).

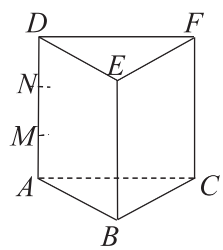


11 Im geraden dreiseitigen Prisma $ABCDEF$ liegen die Punkte M und N so auf der Seitenkante AD, dass $AM = MN = ND$.

a) Ergänzt die Zeichnung mit $a \parallel AB$, $b \parallel AC$, sodass $a \cap b = \{M\}$.

b) Zeichnet $c \parallel DE$, $d \parallel DF$, sodass $c \cap d = \{N\}$.

c) Beweist, dass $(a, b) \parallel (c, d)$.



L4. Schnitte der geometrischen Körper mit Ebenen parallel zur Grundfläche

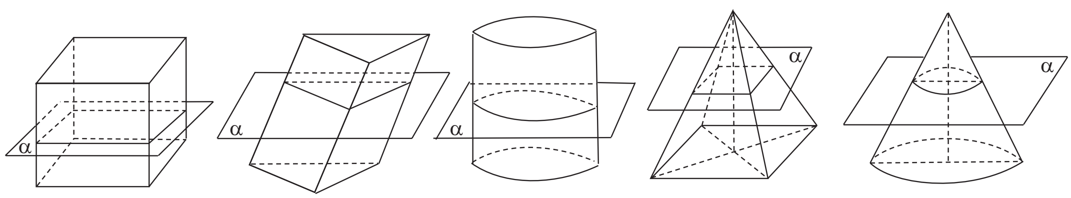
Wir erinnern uns!

Das Prisma hat zwei konvexe polygonale kongruente Grundflächen, die in parallelen Ebenen liegen.
Der Zylinder hat zwei Grundflächen, kongruente Diskusse, die in parallelen Ebene liegen.

Definition. Die Menge aller Schnittpunkte eines geometrischen Körpers mit einer Ebene α wird *Schnitt der* des Körpers mit der Ebene α genannt.

Der Schnitt hängt von der Lage der Ebene in Bezug auf den Körper ab. Zu Beginn betrachten wir Ebenen, die parallel zu der Grundfläche/den Grundflächen des Körpers sind.

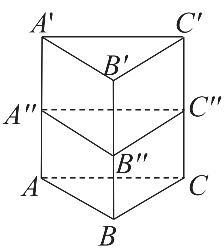
Stellt euch vor, dass eine Ebene α, die parallel zur Grundfläche (den Grundflächen) liegt, einen Würfel, ein dreiseitiges Prisma, eine Pyramide, einen Zylinder oder einen Kegel schneidet. Betrachtet die unteren Zeichnungen.
Findet in eurem Umfeld Beispiele solcher Ebenen, die einen Körper parallel zur Grundfläche schneiden.



Wir wollen folgende Fragen beantworten:
a) Welche Körper entstehen nach dem Schnitt eines Körpers mit einer Ebene parallel zur Grundfläche?
b) Welche Eigenschaften haben diese Körper?
c) Welche *Spur* hinterlässt der Körper in der Ebene α? (Oder was für eine Fläche ist der Schnitt?)

Wir verstehen anhand von Beispielen

A. Schnitte parallel zu den Grundflächen: im Prisma; im Zylinder

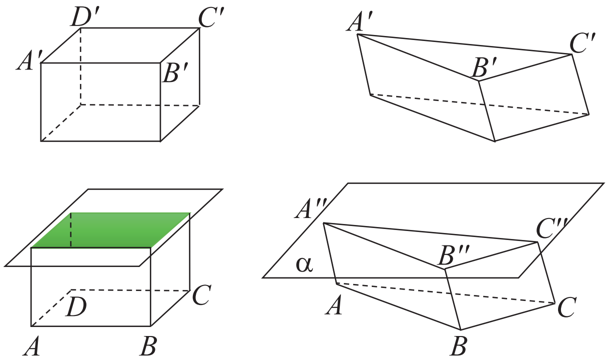


Satz 1. Der Schnitt eines Prismas mit einer Ebene parallel zu den Grundflächen ist eine polygonale Fläche, kongruent mit den Grundflächen.
Beweis. Wir beweisen die Behauptung nur für ein dreiseitiges Prisma. Ähnlich wird der Beweis für die anderen Prismen durchgeführt.
$ABCA'B'C'$ ist ein dreiseitiges Prisma. $\alpha \parallel (ABC)$ und A'', B'', C'' sind die Schnittpunkte von α mit den Seitenkanten des Prismas.
Die Ebene (ABB') schneidet die Ebene (ABC) in der Geraden AB und die Ebene α in der Geraden $A''B''$. Weil $\alpha \parallel (ABC)$, gilt $AB \parallel A''B''$. Aber $AA' \parallel BB'$, also ist $ABB''A''$ ein Parallelogramm und somit $A''B'' \equiv AB$.
Analog $B''C'' \equiv BC$ und $A''C'' \equiv AC$.
Laut dem Kongruenzfall SSS ist $\Delta ABC \equiv \Delta A''B''C''$ und $\Delta A''B''C'' \equiv \Delta A'B'C'$.

Schlussfolgerung. **a)** Durch den Schnitt eines Prismas mit einer Ebene parallel zu den Grundflächen entstehen *zwei Prismen*.

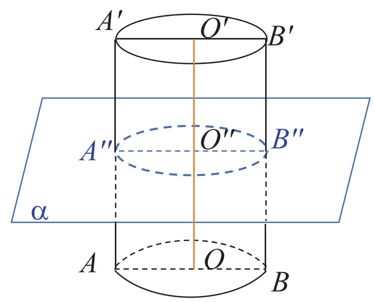
b) 1. Die *Grundflächen* der zwei Prismen sind *kongruent* mit jenen des ursprünglichen Körpers.
2. War das Prisma gerade, dann sind auch die zwei Prismen gerade.
3. War das Prisma regelmäßig, dann sind es auch die zwei.

c) Der Schnitt eines Prismas mit einer Ebene parallel zu den Grundflächen ist eine *polygonale Fläche, kongruent mit den ursprünglichen Grundflächen.*



Satz 2. Der Schnitt eines geraden Kreiszylinders mit einer Ebene parallel zu den Grundflächen ist ein Diskus, kongruent mit den Grundflächen des Zylinders.

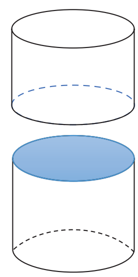
Beweis. Gegeben ist der gerade Kreiszylinder, der durch die Drehung des Rechtecks $AOO'A'$ um die Strecke OO' entstand. Die Ebene „α" ist parallel zu den Grundflächen und schneidet OO' und AA' in O'' bzw. A''.
Laut Satz 1 von Seite 150 schneidet die Ebene $(AOO'A')$ die drei parallelen Ebenen und $AO \parallel A''O'' \parallel A'O'$. Weil $AA'' \parallel OO''$, ist das Viereck $AOO''A''$ ein Parallelogramm, also $O''A'' = OA$. Die erhaltene Beziehung hängt nicht von der Wahl des Punktes A ab, deshalb ist der Schnitt von α und dem Zylinder ein Diskus, kongruent mit den Grundflächen.



Schlussfolgerung. **a)** Durch den Schnitt eines geraden Kreiszylinders mit einer Ebene parallel zu den Grundflächen entstehen *zwei gerade Kreiszylinder*.

b) Die *Grundflächen* der zwei Zylinder sind *kongruent* mit jenen des ursprünglichen Körpers.

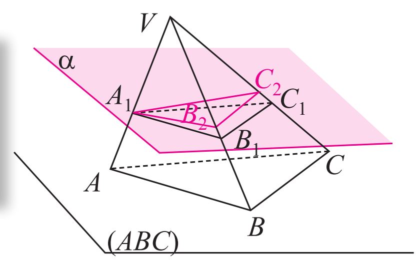
c) Der Schnitt eines Zylinders mit einer Ebene parallel zu den Grundflächen ist ein *Diskus, kongruent mit den ursprünglichen Grundflächen.*



Anwendungen

B. Schnitte parallel mit der Grundfläche: in der Pyramide; im Kegel

1. Anwendung. Auf den Kanten VA, VB und VC des Tetraeders $VABC$ nehmen wir die Punkte A_1, B_1 bzw. C_1 an, sodass $\frac{VA_1}{A_1A} = \frac{VB_1}{B_1B} = \frac{VC_1}{C_1C}$.
Zeigt, dass die Ebenen $(A_1B_1C_1)$ und (ABC) parallel sind.



Lösung. Durch A_1, außerhalb der Grundfläche, kann die Ebene α parallel zu (ABC) gelegt werden. B_2 und C_2 sind die Schnittpunkte von α mit den Seitenkanten VB bzw. VC. Weil $\alpha \parallel (ABC)$ und die Ebene (VAB) beide schneidet, ist $A_1B_2 \parallel AB$.

Im Dreieck VAB gilt laut Voraussetzung $\frac{VA_1}{A_1A} = \frac{VB_1}{B_1B}$. Aus dem Kehrsatz des Satzes des Thales folgt, dass $A_1B_1 \parallel AB$. Laut Parallelenaxiom kann durch A_1 eine einzige Parallele zu AB errichtet werden. Somit sind die Geraden A_1B_1 und A_1B_2 identisch, also $B_1 = B_2$. Analog $C_1 = C_2$. Dann sind $(A_1B_1C_1) = (A_1B_2C_2) = \alpha$ und $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.
Bemerkung. Wir haben im Tetraeder $VABC$ durch einen Punkt A_1 auf VA eine Ebene parallel zur Grundfläche konstruiert. Diese schneidet die anderen Seitenkanten in B_1 bzw. C_1. Es entsteht die Pyramide $VA_1B_1C_1$ mit ähnlichen Eigenschaften wie die ursprüngliche Pyramide.

1. Es gilt $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$ und $BC \parallel B_1C_1$. Die Winkel der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind paarweise kongruent, da ihre Seiten paarweise parallel sind. Laut Ähnlichkeit (Fall WW) gilt $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ und die Verhältnisreihe $k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$.

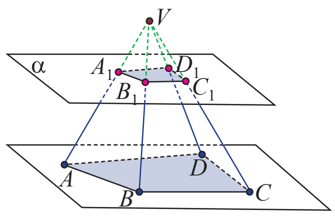
2. In der Seitenfläche VAB gilt laut Hauptsatz der Ähnlichkeit $\Delta VA_1B_1 \sim \Delta VAB$ und $\frac{VA_1}{VA} = \frac{VB_1}{VB} = \frac{A_1B_1}{AB} = k$.
Analog für die anderen Seitenflächen.

Wir haben bewiesen: Wenn eine Ebene parallel zur Grundfläche die Seitenkanten eines Tetraeders in den Punkten A_1, B_1 bzw. C_1 schneidet, wird die Pyramide $VA_1B_1C_1$ erhalten, die *ähnlich* mit der Pyramide $VABC$ ist. Dann gilt:
a) Die entsprechenden Winkel sind kongruent;
b) Das Verhältnis der entsprechenden Kantenlängen ist konstant und heißt Ähnlichkeitsverhältnis der Pyramiden.

Bemerkung. Die Ergebnisse, die wir für ein Tetraeder erhalten haben, können für eine Pyramide mit einer konvexen polygonalen Grundfläche mit n Seiten verallgemeinert werden.

Satz 3. Der Schnitt einer Pyramide mit einer Ebene parallel zur Grundfläche ist eine *polygonale Fläche ähnlich mit der Grundfläche der ursprünglichen Pyramide*.

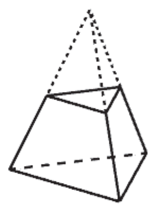
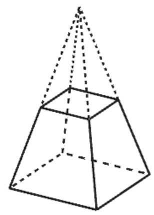
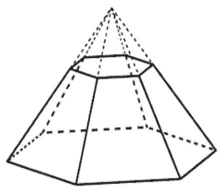
Beim Schnitt einer Pyramide mit einer Ebene parallel zu der Grundfläche entsteht zwischen der Schnittebene und der Ebene der Grundfläche ein geometrischer Körper, *Pyramidenstumpf* genannt.
Beispiel. Gegeben ist die vierseitige Pyramide $VABCD$.
Sie wird von einer Ebene α parallel zur Grundfläche geschnitten. A_1, B_1, C_1 bzw. D_1 seien die Schnittpunkte mit den Seitenkanten der Pyramide.
Der geometrische Körper, der beim Entfernen der Pyramide $VA_1B_1C_1D_1$ (der *kleinen* Pyramide) aus der Pyramide $VABCD$ (der *großen* Pyramide) entsteht, heißt *Pyramidenstumpf*. Wir haben den vierseitigen Pyramidenstumpf $ABCDA_1B_1C_1D_1$ erhalten.



Die Elemente eines Pyramidenstumpfes werden wir am Beispiel des vierseitigen Pyramidenstumpfes $ABCDA_1B_1C_1D_1$ veranschaulichen.

Die Grundflächen: Die *große Grundfläche,* die der großen Pyramide und die *kleine Grundfläche,* die der kleinen Pyramide.	$ABCD$ ist die große Grundfläche und $A_1B_1C_1D_1$ ist die kleine Grundfläche.
Die Grundkanten: Die Seiten der beiden Grundflächen.	AB, BC, CD, AD sind die Kanten der großen und A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1 die Kanten der kleinen Grundfläche.
Die Seitenkanten: Die Strecken, die von den Seitenkanten der großen Pyramide bleiben, nachdem die kleine Pyramide entfernt wurde.	AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sind die Seitenkanten.
Die Seitenflächen: Die Flächen, die von den Seitenflächen der großen Pyramide bleiben, nachdem die kleine Pyramide entfernt wurde.	Die Trapezflächen ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1.

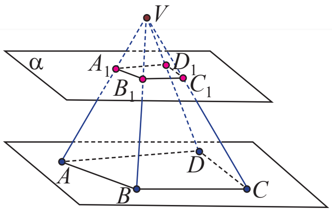
Bemerkungen. **1.** Die Schnittebene bestimmt auf den Seitenflächen der Pyramide, aus welcher der Stumpf entstand, ähnliche Dreiecke mit gleichem Ähnlichkeitsverhältnis. Dann ist: $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1A_1}{DA}$.
2. Die Winkel der Grundflächen mit paarweise parallelen Schenkeln sind kongruent.
Je nach Art der ursprünglichen Pyramide ist der Pyramidenstumpf:
1) dreiseitig, vierseitig, fünfseitig, sechsseitig, … .
2) regelmäßig oder beliebig.
Man zeichnet die Pyramide, aus welcher der Stumpf entsteht, gestrichelt und danach die Kanten des Stumpfes.

Regelmäßiger dreiseitiger Pyramidenstumpf	Regelmäßiger vierseitiger Pyramidenstumpf	Regelmäßiger sechsseitiger Pyramidenstumpf
		

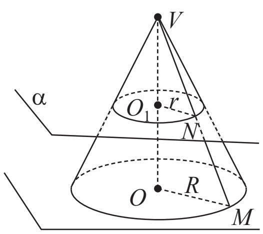
Bemerkung. Aus der Zeichnung geht nicht hervor, dass der Pyramidenstumpf regelmäßig ist. Man muss die Voraussetzungen kennen.

Fürs Portfolio

Die vierseitige Pyramide $VABCD$ wird von der Ebene $\alpha \parallel (ABC)$ geschnitten. Die Schnittpunkte A_1, B_1, C_1 bzw. D_1 bestimmen die vierseitige Pyramide $VA_1B_1C_1D_1$.
Nennt und begründet die Beziehungen zwischen den entsprechenden Elementen der Pyramiden $VA_1B_1C_1D_1$ und $VABCD$ anhand der Zeichnung.



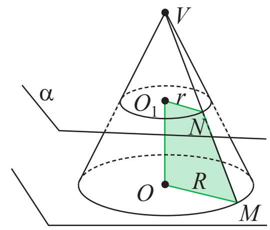
2. Anwendung. Der Schnitt eines Kegels mit einer Ebene parallel zu seiner Grundfläche ist ein *Diskus* mit dem Mittelpunkt auf der Symmetrieachse des Kegels.



Beweis. Sei $M \in \mathcal{C}(O, R)$ ein beliebiger Punkt des Kegels mit der Grundfläche dem Kreis $\mathcal{C}(O, R)$ und der Symmetrieachse OV. Durch den Punkt O_1 auf der Strecke OV wird die Ebene α parallel zur Grundfläche gelegt. Sie schneidet die Erzeugende VM in N.
Die Ebene (VOM) schneidet die parallelen Ebenen α und die Grundfläche in zwei parallelen Geraden. Also ist $O_1N \parallel OM$. Wir erhalten im Dreieck VOM laut Hauptsatz der Ähnlichkeit $\Delta VO_1N \sim \Delta VOM$, und $\frac{VN}{VM}=\frac{O_1N}{OM}=\frac{VO_1}{VO}$. Für den veränderlichen Punkt M des Kreises bleiben $\frac{VO_1}{VO}=k$ und $OM=R$ konstant. Also ist $O_1N=\frac{VO_1 \cdot OM}{VO}=k \cdot R$ konstant. Wir bezeichnen $O_1N=r$. Dann ist der Kreis $\mathcal{C}(O_1, r)$ der Schnitt der Ebene α mit dem Kegel.
Schlussfolgerung: **a)** Schneidet man einen geraden Kreiskegel mit einer Ebene parallel zur Grundfläche, dann entstehen zwei Körper. Der eine ist ein Kegel mit der Spitze V.
b) Der Schnitt ist ein Diskus begrenzt vom Kreis $\mathcal{C}(O_1, r)$.
c) Der zweite Körper ist ein *gerader Kegelstumpf*.

Die Elemente des Kegelstumpfes sind:

Die Grundflächen: Die Grundfläche des Kegels ist die *große Grundfläche* und der Schnitt ist die *kleine Grundfläche.*	Der Diskus begrenzt vom Kreis $\mathcal{C}(O, R)$ ist die große und der Diskus begrenzt von $\mathcal{C}(O_1, r)$ ist die kleine Grundfläche.
Die Erzeugenden: Die Strecken, die nach Entfernen der Erzeugenden des kleinen Kegels auf den Erzeugenden des ursprünglichen Kegels bleiben.	Die Strecke MN ist eine Erzeugende des Kegelstumpfes.
Die Symmetrieachse: Die Symmetrieachse des Kegels.	Die Gerade OO_1 ist die Symmetrieachse des Kegelstumpfes.



Bemerkung. Der gerade Kreiskegelstumpf ist ein Drehkörper. Er entsteht durch Rotation eines rechtwinkligen Trapezes um den Schenkel, der senkrecht zu den Grundlinien verläuft.

Aufgaben

1 $ABCDEFGH$ ist ein vierseitiges Prisma und M, N, P, Q sind Punkte auf den Seitenkanten AE, BF, CG bzw. DH, sodass $MA = NB = PC = QD$.

a) Zeichnet.

b) Beweist, dass die Punkte M, N, P, Q komplanar sind.

c) Beschreibt die Körper, die durch den Schnitt des Prismas mit der Ebene (MNP) entstehen.

2 $ABCA'B'C'$ ist ein dreiseitiges Prisma. M, N, P sind die Schnittpunkte der Diagonalen der Seitenflächen $ABB'A'$, $BCC'B'$ bzw. $ACC'A'$.

a) Beweist, dass die Ebenen (MNP) und (ABC) parallel sind.

b) Stellt das Prisma und seinen Schnitt mit der Ebene (MNP) dar.

c) Berechnet das Verhältnis der Flächen der Dreiecke ΔMNP und ΔABC.

d) Berechnet das Verhältnis der Fläche des Schnittes und der Fläche von ΔABC.

3 Die Pyramide $VABC$ mit der Grundfläche dem Dreieck ABC wird von einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten.

a) Zeichnet die Pyramide, den Schnitt und die Schnittpunkte der Ebene mit den Seitenkanten.

b) Benennt die Schnittpunkte der Ebene mit den Seitenkanten und nennt die entstandenen Körper.

c) Nennt die Grundflächen und Kanten der entstandenen Körper.

4 Das regelmäßige Tetraeder $SABC$ wird von der Ebene α, parallel zu ABC, durch die Mitte der Kante SA geschnitten.

a) Zeichnet.

b) Wenn $\{N\} = \alpha \cap SB$ und $\{P\} = \alpha \cap SC$, dann beweist, dass $SN + CP = SA$.

c) Wenn der Flächeninhalt einer Fläche des Tetraeders $4\sqrt{3}$ cm² ist, dann berechnet die Kantenlängen des Pyramidenstumpfes.

5 Wenn AA', BB', CC', DD' die Seitenkanten eines vierseitigen Pyramidenstumpfes sind, beweist, dass sie paarweise komplanar sind.

6 Die Grundflächen eines geraden Kreiszylinders sind $\mathcal{C}(O, r)$ und $\mathcal{C}(O', r)$. AB ist ein Durchmesser des $\mathcal{C}(O, r)$ und AA', BB' sind Erzeugende. Die Ebene α, parallel zu den Grundflächen, schneidet AA' und BB' in den Punkten C bzw. C'.

a) Zeichnet.

b) Nennt die Radien und die Erzeugenden der zwei Zylinder, die nach dem Schnitt entstehen.

7 Ein gerader Kreiskegel mit dem Durchmesser der Grundfläche $AB = 10$ cm und der Erzeugenden $VA = 13$ cm wird von einer Ebene geschnitten, die parallel zur Grundfläche durch das Orthozentrum des Dreiecks VAB verläuft. Berechnet den Flächeninhalt des Schnittes.

4 Orthogonalität

L1. Senkrechte Geraden; die Gerade senkrecht auf eine Ebene; der Abstand von einem Punkt zu einer Ebene

Wir erinnern uns!

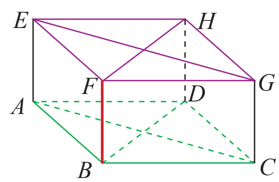
1. Als Winkel zweier Geraden bezeichnet man den Winkel, der von den Parallelen zu diesen Geraden durch einen Punkt des Raumes gebildet wird und nicht stumpf ist.
2. Zwei Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln sind kongruent oder supplementär.

Definition. Zwei Geraden d_1 und d_2 sind senkrecht zueinander, wenn sie einen rechten Winkel bilden.

Mathematisch geschrieben: $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \sphericalangle(d_1, d_2) = 90°$.

Wir lösen und stellen fest

Beispiel. Gegeben ist der Quader $ABCDEFGH$. Findet alle Kanten, Diagonalen der Seitenflächen und Diagonalen des Körpers, die mit der Kante BF rechte Winkel bilden.
Lösung. Alle Flächen des Quaders sind Rechtecke. Wir untersuchen den Winkel zwischen BF und GH.

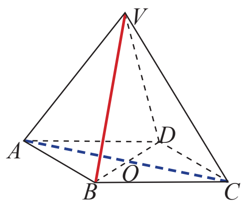


Die Geraden BF und GH sind windschief. Die Gerade CG ist parallel zu BF und komplanar mit GH. Dann ist $\sphericalangle(BF, GH) = \sphericalangle(CG, GH) = \sphericalangle CGH$ ein Winkel des Rechtecks $CGHD$, also $\sphericalangle(BF, GH) = 90°$ und $BF \perp HG$.
Bemerkung. CG ist nicht die einzige Parallele zu BF durch einen Punkt der Geraden GH. Findet noch eine!
Man findet die folgenden senkrechten Geraden zu FB: **a)** die Geraden CD, AB, EF, BC, GF, EH, AD; **b)** die Geraden FH, EG, AC, BD (die Trägergeraden der Diagonalen des Quaders).

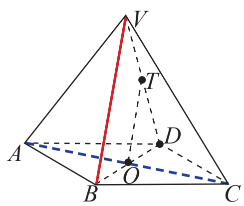
Wir verstehen anhand von Beispielen

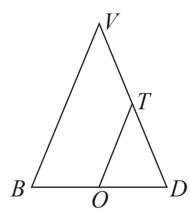
1. Anwendung: Das Dach von Großmutters Haus hat die Form einer vierseitigen regelmäßigen Pyramide $VABCD$, mit der Grundfläche dem Dachboden. Zeigt, dass die Kante VB senkrecht ist zu der Diagonalen AC.

Lösung. Günstig ist es, die Parallele zu BV durch den Punkt O, dem Schnittpunkt der Diagonalen, auf AC zu konstruieren. Die Parallele liegt in der Ebene (VBO). Wir betrachten ΔVBD in der Ebene.

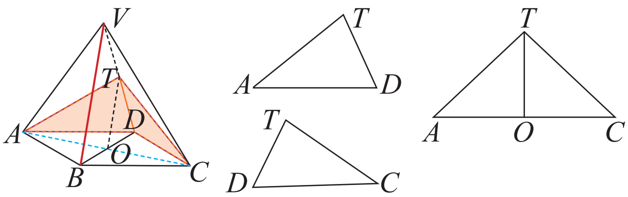


Das Dreieck VBD ist gleichschenklig (da die Seitenkanten der regelmäßigen Pyramide kongruent sind), OT ist Mittellinie (O ist Mittelpunkt des Quadrates und $OT \parallel BV$).
Also $\sphericalangle(VB, AC) \equiv \sphericalangle(TO, AC)$. Wir untersuchen das Dreieck TAC. TA und TC sind Seiten der kongruenten Dreiecke ΔTDA und ΔTDC. Deshalb sind TA und TC kongruent.





Für die Dreiecke TDA und TDC gilt: $DA \equiv DC$ (Seiten des Quadrates), $\sphericalangle TDA \equiv \sphericalangle TDC$ (die Seitenflächen der Pyramide sind gleichschenklige kongruente Dreiecke), $TD \equiv TD$ (gemeinsame Seite). Laut SWS-Fall sind $\Delta TDA \equiv \Delta TDC$, also $TA \equiv TC$.



Im gleichschenkligen Dreieck TAC ist TO die Seitenhalbierende der Grundlinie, also auch Höhe $TO \perp AC$.
Behauptung: Aus $TO \perp AC$ und $\sphericalangle(VB, AC) \equiv \sphericalangle(TO, AC) = 90°$ folgt $BV \perp AC$.

Die Seitenkante BF des Quaders $ABCDEFGH$ ist senkrecht zu den Geraden AB, BC, CD, DA, AC, BD der Ebene $ABCD$. Wir prüfen, ob BF senkrecht ist zu allen Geraden der Ebene (ABC).

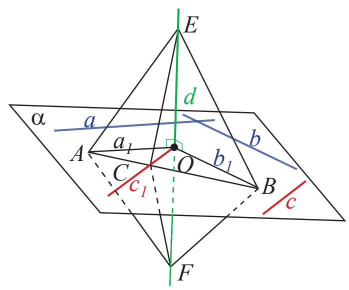
Definition. Eine Gerade d ist senkrecht zu einer Ebene α, falls sie zu allen Geraden der Ebene α senkrecht steht.

Ist die Gerade d senkrecht auf die Ebene α, schreibt man $d \perp \alpha$.
Da es unmöglich ist zu beweisen, dass eine Gerade senkrecht ist auf alle Geraden einer Ebene (es sind unendlich viele), werden wir folgenden Satz verwenden, um zu zeigen, dass eine Gerade auf eine Ebene senkrecht steht.

Satz 1. Wenn eine Gerade auf zwei sich schneidende Geraden einer Ebene senkrecht steht, dann ist sie auf die Ebene senkrecht.

Voraussetzung: $d \perp a$ und $d \perp b$, a und b schneiden einander, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$
Behauptung: $d \perp \alpha$

Beweis. Seien a und b zwei sich schneidende Geraden in der Ebene α, und eine Gerade d, sodass $d \perp a$, $d \perp b$. Durch O, wobei $\{O\} = d \cap \alpha$, werden die Parallelen a_1 und b_1 zu a bzw. b geführt. Auf ihnen nehmen wir die Punkte A bzw. B, verschieden von O, an. Wir beweisen, dass für jede Gerade c aus der Ebene α die Beziehung $d \perp c$ gilt.

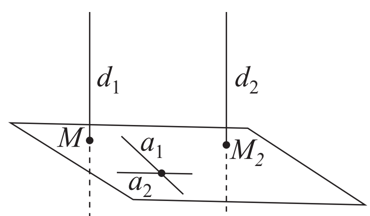


Durch O wird die Gerade $c_1 \parallel c$ gezeichnet, und ihr Schnittpunkt mit AB wird mit C bezeichnet.
Auf der Geraden d zeichnen wir die Punkte E und F, sodass O die Mitte der Strecke EF ist.
Da $OE \equiv OF$, $OA \equiv OA$, gilt $\Delta OAE \equiv \Delta OAF$ (KK), also $AE \equiv FU$ **(1)**.
Da $OE \equiv OF$, $OB \equiv OB$, gilt $\Delta OBE \equiv \Delta OBF$ (KK), also $BE \equiv BF$ **(2)**.
Aus (1) und (2) folgt $\Delta EAB \equiv \Delta FAB$ (SSS).
Und daraus folgt $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle FAC$ **(3)**
Da $AE \equiv FU$, $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle FAC$ (3) und $AC \equiv AC$, folgt:
$\Delta EAC \equiv \Delta FAC$ (SWS), also $EC \equiv FC$. ΔEFC ist gleichschenklig und CO ist die Seitenhalbierende, die der Grundlinie entspricht. Deshalb ist CO Höhe, also $CO \perp EF$.
Folglich: $d \perp a$ und $d \perp b$ mit $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, d und a sich schneidend, impliziert $d \perp c$, für jede Gerade $c \subset \alpha$.
Also: $d \perp \alpha$.

1. Anwendung: Jede Gerade, die parallel ist zu einer Senkrechten auf eine Ebene, ist auf die Ebene senkrecht.

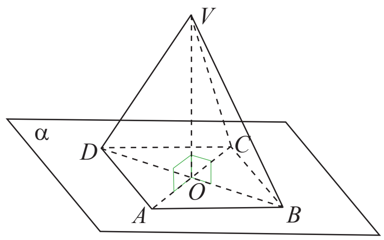
Voraussetzung: $d_1 \parallel d_2$ und $d_2 \perp \alpha$
Behauptung: $d_1 \perp \alpha$

Lösung. Wir wählen die Geraden d_1, d_2 und die Ebene α, sodass $d_1 \parallel d_2$ und $d_2 \perp \alpha$. Da $d_2 \perp \alpha$, gibt es zwei sich schneidende Geraden a_1 und a_2 in der Ebene α, sodass $d_2 \perp a$ und $d_2 \perp b$. Die Parallelität bewahrt die Winkelmaße, deshalb gilt $d_1 \perp a_1$ und $d_1 \perp a_2$, also $d_1 \perp \alpha$.



2. Anwendung: Beweist, dass die Gerade, bestimmt von der Spitze einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide und dem Mittelpunkt der Grundfläche, senkrecht ist auf die Grundfläche.

Lösung. Angenommen werden die Grundfläche der vierseitigen Pyramide $VABCD$ in der Ebene α und der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche O. Wir sollen zeigen, dass $VO \perp \alpha$. Laut Satz 1 muss bewiesen werden, dass VO senkrecht zu zwei sich schneidenden Geraden der Ebene liegt. Die Dreiecke VBD und VAC sind gleichschenklig ($VD \equiv VB \equiv VA \equiv VD$) und VO ist die Seitenhalbierende der Grundlinien. VO ist somit Höhe, also $VO \perp AC$ und $VO \perp BD$. Wir haben in der Ebene der Grundfläche sich schneidende Geraden AC und BD gefunden, auf die VO senkrecht ist. Laut Satz 1 ist $VO \perp \alpha$.



Bemerkung. Das Ergebnis aus Satz 1 gehört zu den wichtigsten Ergebnissen der Raumgeometrie, insbesondere wenn es um eine Gerade geht, die senkrecht auf eine Ebene sein soll.

Satz 2. Durch einen Punkt des Raumes gibt es eine einzige Senkrechte auf eine gegeben Ebene.

Satz 3. Zwei verschiedene Geraden, die senkrecht auf dieselbe Ebene stehen, sind parallel.

Satz 4. Durch einen Punkt M des Raumes gibt es eine einzige Ebene, die senkrecht auf eine gegebene Gerade d ist. Sie wird „die durch M senkrechte Ebene auf d" genannt.

Satz 5. Zwei verschiedene Ebenen, die senkrecht auf dieselbe Gerade stehen, sind parallel.

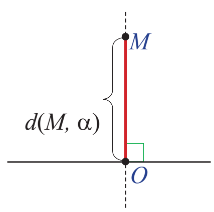
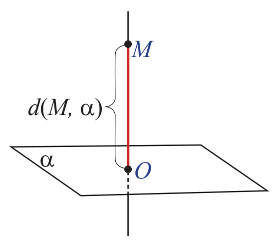
Versucht die Sätze 2, 3 und 4 zu beweisen. Sucht Hilfe im Web.

Fürs Portfolio

Beweist Satz 5 mithilfe der Methode der Zurückführung auf einen Widerspruch.

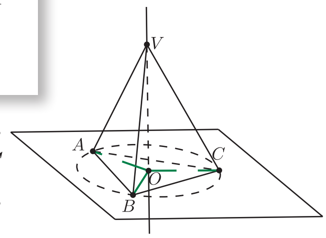
Sowohl in der Raumgeometrie als auch in der Geometrie der Ebene spielt der Begriff „Abstand zwischen zwei geometrischen Objekten" eine wichtige Rolle. Deshalb muss die Definition des Begriffes bekannt sein und richtig angewendet werden. Der Abstand von einem Punkt zu einer Geraden ist aus der Geometrie der Ebene bekannt und wird im Raum genauso definiert.

Ähnlich definieren wir den Abstand von einem Punkt zu einer Ebene.

<table>
<tr><th colspan="2">In der Ebene</th><th colspan="2">Im Raum</th></tr>
<tr><td>M ist ein Punkt und d eine Gerade.</td><td rowspan="3">
</td><td>M ist ein Punkt und α eine Ebene.</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>Durch M wird die Gerade d_1 senkrecht auf d gezeichnet (sie ist einzig).</td><td>Durch M wird die Gerade d_1 senkrecht auf α gezeichnet (sie ist einzig).</td></tr>
<tr><td>Wenn $\{O\} = d_1 \cap d$, dann heißt O *Fußpunkt der Senkrechten* aus M auf d.</td><td>Wenn $\{O\} = d_1 \cap \alpha$, dann heißt O *Fußpunkt der Senkrechten* aus M auf α.</td></tr>
<tr><td colspan="2">*Definition 1.* Die Länge der Strecke MO ist der Abstand von M zu der Geraden d; sie wird mit $d(M, d)$ bezeichnet.</td><td colspan="2">*Definition 2.* Die Länge der Strecke MO ist der Abstand von M zu der Ebene α; sie wird mit $d(M, \alpha)$ bezeichnet.</td></tr>
</table>

Anwendungen

3. Anwendung: Zeigt, dass die Gerade, bestimmt von der Spitze einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide und dem Mittelpunkt der Grundfläche, senkrecht steht auf die Ebene der Grundfläche.



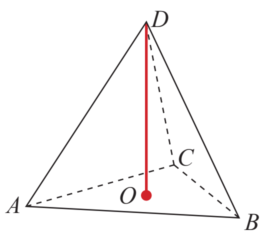
Lösung. Aus der Spitze V der Pyramide $VABC$ wird $VO \perp (ABC)$ gezeichnet. Es entstehen die rechtwinkligen kongruenten Dreiecke ΔVOA, ΔVOB und ΔVOC (HK-Fall). Dann sind $OA \equiv OB \equiv OC$, also ist O der Mittelpunkt des Umkreises des gleichseitigen Dreiecks ABC, also dessen Mittelpunkt.
Dann ist $VO \perp (ABC)$.
Bemerkung. Die Ergebnisse aus den Anwendungen 1 und 2 können mit Leichtigkeit verallgemeinert werden.

Für jede regelmäßige Pyramide ist die Gerade, bestimmt von der Spitze und dem Mittelpunkt des Umkreises der Grundfläche, senkrecht auf die Ebene der Grundfläche.

Bemerkung. Die Länge der Strecke, bestimmt von der Spitze einer regelmäßigen Pyramide und dem Mittelpunkt der Grundfläche, ist der *Abstand (die Distanz)* von der Spitze zur Grundfläche.

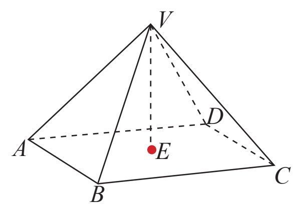
Definition 1. Der Abstand von der Spitze einer Pyramide zu seiner Grundfläche heißt ***Höhe der Pyramide.***

Sei ABC die Grundfläche des Tetraeders $ABCD$. Seine Höhe ist $d(D, (ABC))$, also die Länge der Strecke DO, wobei O der Schnittpunkt der Ebene (ABC) mit der Senkrechten aus D auf (ABC) ist.



$DO \perp (ABC)$

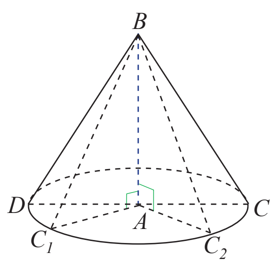
Für die vierseitige Pyramide $VABCD$ ist die Höhe $d(V, (ABCD))$ die Länge der Strecke VE, wobei E der Schnittpunkt der Ebene (ABC) und der Senkrechten aus V auf (ABC) ist.



$VE \perp (ABC)$

Bemerkung. **1)** Es gibt wenig Vereinbarungen für die Darstellung von Senkrechten auf eine Ebene. Bei einer einzigen Senkrechten auf eine Ebene wird meistens die Ebene horizontal und die Senkrechte vertikal dargestellt.
Achtung! Nicht jede vertikal gezeichnete Gerade steht senkrecht auf eine horizontal gezeichnete Ebene.
2) Im Tetraeder kann jede Fläche als Grundfläche betrachtet werden, deshalb können wir von vier Höhen sprechen.

4. Anwendung: Beweist, dass die Symmetrieachse des geraden Kreiskegels senkrecht auf seine Grundfläche steht.



Lösung. Durch Drehung des Dreiecks ΔABC, $\sphericalangle BAC = 90°$, um die Kathete AB entsteht ein Kegel. Angenommen werden ΔABC_1 und ΔABC_2, zwei nicht komplanare Lagen des rotierenden Dreiecks. $AB \perp AC_1$ und $AB \perp AC_2$. AB ist senkrecht auf zwei sich schneidende Geraden der Grundfläche, also senkrecht auf die Grundfläche.

Definition 2. Der Abstand von der Spitze des geraden Kreiskegels zu der Grundfläche heißt ***Höhe des Kegels.***.

Die Höhe des geraden Kreiskegels ist die Länge der Strecke, bestimmt von seiner Spitze und dem Mittelpunkt der Grundfläche.

Aufgaben

1 Die gleichseitigen Dreiecke ABC und BCD liegen in verschiedenen Ebenen und E ist die Mitte der Seite BC. Beweist, dass $BC \perp (ADE)$.

2 Die Quadrate $ABCD$ und $BCEF$ liegen in verschiedenen Ebenen und die Halbgerade CM ist die Winkelhalbierende des Winkels DCE, $M \in DE$. Beweist, dass:
a) $BC \perp (CDE)$; b) $CM \perp (ADE)$.

3 Im Tetraeder $ABCD$ sind ABC, ACD, ABD jeweils in A rechtwinklige Dreiecke.
a) Beweist, dass $AC \perp (ABD)$, $AD \perp (ABC)$ und $AB \perp (ACD)$.
b) Bestimmt die Lage der Geraden BC in Bezug auf die Ebene (ABD).
c) Beweist, dass je zwei entgegengesetzte Kanten des Tetraeders $ABCD$ senkrecht sind.

4 $ABCDEFGH$ ist ein Würfel, $AC \cap BD = \{O\}$, $EG \cap FH = \{Q\}$. Beweist, dass:
a) $BD \perp (ACE)$; **b)** $AC \perp BH$;
c) $OQ \parallel AE$; **d)** $OQ \perp (ABC)$.

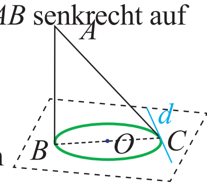
5 Das gleichschenklige Dreieck ABC, $(AC = BC)$ und das Rechteck $ABDE$ liegen in verschiedenen Ebenen und $EA \perp AC$. Beweist, dass:
a) $EA \perp (ABC)$.
b) das Dreieck BDC rechtwinklig ist.
c) die Gerade AC nicht senkrecht ist zu (ABD).
d) $AB \perp (CMN)$, wobei M und N die Mitten der Strecken AB bzw. DE sind.

6 $MNPQ$ ist ein Quadrat, $MN = 40$ cm und $AM \perp (MNP)$, $AM = 30$ cm. MB ist die Höhe des Dreiecks MAN und $BC \parallel NP$, $C \in PA$.
a) Beweist, dass $NP \perp (AMN)$ und $PQ \perp (AMQ)$.
b) Berechnet $d(A, (NPQ))$, $d(N, (AMQ))$, $d(P, (AMN))$.
c) Beweist, dass $AN \perp (BCM)$ und bestimmt den Abstand vom Punkt A zur Ebene (BCM).

7 Auf die Ebene des rechtwinkligen Dreiecks ABC, $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, errichtet man die Senkrechte AM. Wenn $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm und $MB = 2 \cdot AB$, berechnet den Abstand vom:
a) Punkt M zur Ebene (ABC).
b) Punkt B zur Ebene (ACM).
c) Punkt C zur Ebene (ABM).

8 $ABCD$ ist ein Rhombus mit $AB = a$, $\sphericalangle BAD = 60^\circ$, $AC \cap BD = \{O\}$. Man weiß, dass die Geraden AE und CF senkrecht zu der Ebene des Rhombus stehen und $AE = CF = BD$.
a) Zeichnet.
b) Beweist, dass $BD \perp (EOF)$.
c) Bestimmt den Abstand vom Punkt O zur Geraden EF. Untersucht alle möglichen Fälle.

9 In der Zeichnung nebenan ist AB senkrecht auf die Ebene des Kreises $\mathcal{C}(O, r = OB)$, BC ist ein Durchmesser und die Gerade d ist tangent an den Kreis im Punkt C.

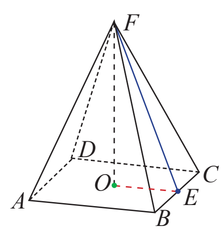


a) Zeigt, dass $d \perp (ABC)$.
b) Wenn $AB = 20$ cm und $AC = 2{,}5 \cdot r$, berechnet den Radius des Kreises.

10 $ABCD$ ist ein Rechteck mit dem Mittelpunkt O, $AB = 12$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm und der Punkt S liegt außerhalb der Ebene (ABC), sodass $SA = SB = SC = SD = AB$.
a) Zeigt, dass $SO \perp AC$.
b) Zeigt, dass $SO \perp (ABC)$.
c) Berechnet den Abstand vom Punkt S zur Ebene (ABC).

11 Das regelmäßige Polygon $A_1A_2...A_n$, $n \in \{3, 4, 6\}$, ist die Grundfläche der Pyramide $VA_1A_2...A_n$ und der Punkt O ist der Fußpunkt der Senkrechten aus der Spitze V auf die Grundfläche. Beweist, dass O genau dann der Mittelpunkt des Umkreises des regelmäßigen Polygons $A_1A_2...A_n$ ist, wenn $VA_1 = VA_2 = ... = VA_n$.

12 In der Zeichnung ist FO die Höhe der regelmäßigen vierseitigen Pyramide $FABCD$. Der Flächeninhalt des Dreiecks FOE ist $6\sqrt{3}$ cm², Punkt E ist die Mitte der Kante BC und $\sphericalangle FEO = 60^\circ$. Berechnet die Höhe der Pyramide.



13 Die Grundfläche des Tetraeders $DABC$ ist das gleichseitige Dreieck ABC, $AB = 6$ cm. O ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC und $d(D,(ABC)) = 2\sqrt{6}$ cm.
Berechnet $d(A, (BCD))$.

L2. Der Abstand zwischen zwei parallelen Ebenen, die Höhe des geraden Prismas, des Quaders, des geraden Kreiskegels, des Pyramidenstumpfes und des geraden Kreiskegelstumpfes

Wir erinnern uns!

In der Ebene ist der Abstand zwischen zwei parallelen Geraden der Abstand von einem beliebigen Punkt der einen Geraden zur anderen Geraden. Die Definition gilt auch im Raum, da zwei parallele Geraden komplanar sind. Der Abstand zwischen zwei parallelen Geraden hängt nicht vom gewählten Punkt ab.

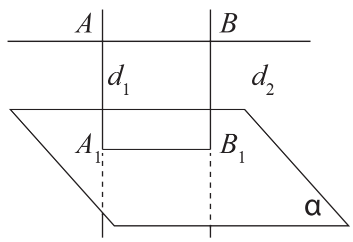
Wir verstehen anhand von Beispielen

A. Der Abstand von einer Geraden zu einer parallelen Ebene

Sei d eine Gerade parallel zur Ebene α. Wir werden den Abstand von d zu α definieren.

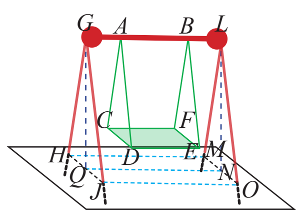
Satz 1. Wenn der Punkt A auf der Geraden d liegt, $d \parallel \alpha$, $AA_1 \perp \alpha$ und $A_1 \in \alpha$, dann ist die Länge der Strecke AA_1 konstant (unabhängig von der Wahl des Punktes A auf der Geraden d).

Beweis. Wir wählen auf d den Punkt B, verschieden von A, und zeichnen $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, $A_1 \in \alpha$, $B_1 \in \alpha$. Wir beweisen, dass die Strecken AA_1 und BB_1 kongruent sind. Die Geraden AA_1 und BB_1 stehen senkrecht auf dieselbe Ebene, also sind $AA_1 \parallel BB_1$ und sie bestimmen eine Ebene, welche mit α die gemeinsame Gerade A_1B_1 parallel zu d besitzt. Folglich gilt $AA_1 \parallel BB_1$, $AB \parallel A_1B_1$, $AA_1 \perp A_1B_1$. Das Viereck AA_1B_1B ist ein Rechteck und somit $AA_1 \equiv BB_1$.



Definition 1. Der Abstand von der Geraden d zur Ebene α, die parallel zu d ist, ist der Abstand von einem beliebigen Punkt auf d zur Ebene α und wird $d(d, \alpha)$ bezeichnet.

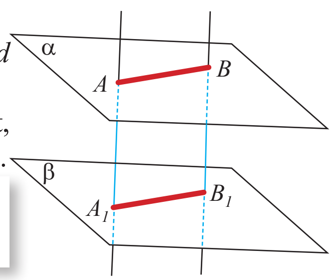
PA Tudor und Andrei wollen eine Schaukel wie in der anliegenden Abbildung bauen. Die Körper $ACDBFE$ und $GHJLMO$ sind dreiseitige Prismen, $AC = AD$ und $GH = GJ$.



1. Stellt fest, welche Streckenlängen bekannt sein müssen, um den Abstand von AB zur Ebene $(CDEF)$ und den Abstand von GL zur Ebene $(HJOM)$ zu berechnen.
2. Drückt den Abstand von den Geraden CD, DE, EF, CF zur Ebene $(HJOM)$ aus.
3. Identifiziert den Abstand zwischen der Bodenfläche $(HJOM)$ und der Ebene der Schaukel $(CDEF)$.

B. Der Abstand zwischen zwei parallelen Ebenen

Aus dem obigen Beispiel erkennen wir die Notwendigkeit des Begriffes „*Abstand zwischen zwei Ebenen*“ (Schaukel und Boden).
So wie in der Ebene nur der Abstand zwischen zwei parallelen Geraden sinnvoll ist, kann im Raum nur der Abstand zwischen zwei parallelen Ebenen einen Sinn haben.



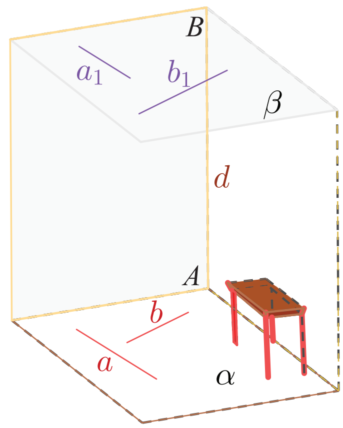
Satz 2. Wenn zwei Geraden senkrecht sind auf die parallelen Ebenen α und β und diese in A und B bzw. A_1 und B_1 schneiden, dann: $AA_1 \equiv BB_1$.

Beweis. Zwei Geraden, die senkrecht zu derselben Ebene stehen, sind parallel. Also $AA_1 \parallel BB_1$. Die Ebene (AA_1B_1B) schneidet die parallelen Ebenen α und β in parallelen Geraden, also $AB \parallel A_1B_1$. Das Viereck AA_1B_1B mit paarweise parallelen Seiten ist ein Parallelogramm, somit $AA_1 \equiv BB_1$.

Bemerkung. Satz 2 ist ein Sonderfall des Satzes: „Zwei parallele Ebenen bestimmen auf zwei parallelen Geraden, die sie schneiden, kongruente Strecken.“

1. Anwendung: Der Fußboden und die Decke eines Zimmers liegen in zwei parallelen Ebenen α und β. Die vertikale Kante d steht senkrecht auf die Ebene des Fußbodens. Wir wollen den *kürzesten Abstand* von einem Punkt der Decke zu einem Punkt des Fußbodens finden und danach den Abstand zwischen den zwei Ebenen bestimmen.

a) Beweist, dass $d \perp \beta$.
b) Findet auf der unteren Zeichnung den Abstand vom Punkt B zum Fußboden. Begründet die Antwort.
c) Findet auf der unteren Zeichnung den Abstand vom Punkt A zur Decke. Begründet die Antwort.
d) Vergleicht die bei **b)** und **c)** gefundenen Abstände.
e) Findet eine Beziehung zwischen dem Abstand AB und der Länge der Strecke MN, wenn M auf der Ebene α liegt und N auf β.



Lösung. Die Ebenen α, β sind parallel und $d \perp \alpha$, $d \cap \alpha = \{A\}$, $d \cap \beta = \{B\}$.
a) Angenommen werden in α die sich schneidenden Geraden a und b. Weil $d \perp \alpha$, $a \subset \alpha$ und $b \subset \alpha$, gilt $d \perp a$ und $d \perp b$. **(1)**
Die Ebenen α, β sind parallel, $a \subset \alpha$ und $b \subset \alpha$, also sind a und b parallel zur Ebene β. Dann gibt es die Geraden a_1 und b_1 in der Ebene β, sodass $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$. **(2)** Aus (1) und (2) folgt $d \perp a_1$ und $d \perp b_1$, also $d \perp (a_1, b_1) = \beta$.
b) Aus $BA \perp \alpha$ und $A \in \alpha$ folgt $d(B, \alpha) = AB$. **c)** Aus $AB \perp \beta$ und $B \in \beta$ folgt $d(A, \beta) = AB$. **d)** $d(B, \alpha) = d(A, \beta)$. **e)** Seien $M \in \alpha$ und $N \in \beta$.
Fall 1. Wenn $MN \perp \alpha$, dann folgt aus den obigen Ergebnissen $MN = AB$.
Fall 2. Wenn $MN \not\perp \alpha$, zeichnen wir $NP \perp \alpha$, $P \in \alpha$, und es entsteht das rechtwinklige Dreieck MPN mit der Hypotenuse MN und $NP = AB$, also $MN > AB$.
Schlussfolgerungen. 1. Eine Gerade, die senkrecht auf eine Ebene steht, ist senkrecht auf jede Ebene, die zu dieser parallel ist.
2. Die Länge der Strecken, die zwei parallele Ebenen auf einer schneidenden senkrechten Geraden bestimmen, ist konstant.

Definition 2. Der Abstand zwischen den parallelen Ebenen α und β ist der Abstand von einem Punkt der einen Ebene zur anderen Ebene und er wird mit $d(\alpha, \beta)$ bezeichnet.

Bemerkung. Wenn $\alpha \parallel \beta$, dann ist der Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten $M \in \alpha$ und $N \in \beta$ mindestens gleich mit dem Abstand zwischen den zwei Ebenen.

Anwendungen

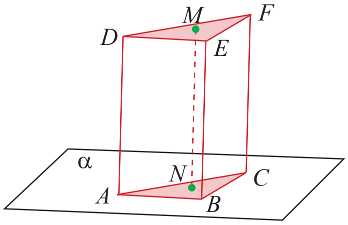
C. Die Höhe eines Prismas. Die Höhe eines geraden Kreiszylinders

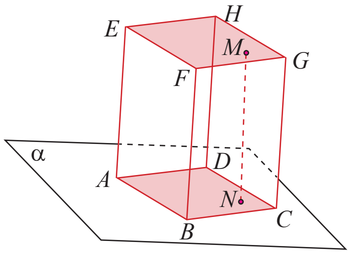
Die Grundflächen des Prismas sind polygonale kongruente Flächen in parallelen Ebenen.

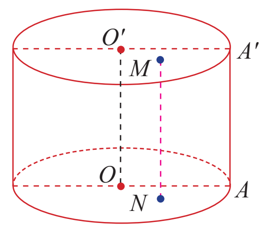
Definition 3. Der Abstand zwischen den Grundflächen des Prismas heißt Höhe des Prismas.

Die Grundflächen des Zylinders sind kongruente Diskusse in parallelen Ebenen.

Definition 4. Der Abstand zwischen den Grundflächen des Zylinders heißt Höhe des Zylinders.





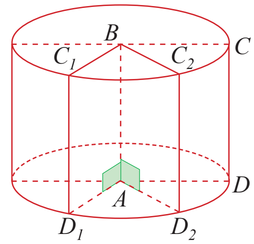


2. Anwendung: Beweist, dass jede Seitenkante eines geraden Prismas Höhe ist.

Lösung. Die Seitenflächen des geraden Prismas sind Rechtecke. Jede Seitenkante bildet mit den anliegenden Grundkanten rechte Winkel. Demnach ist eine Seitenkante auf zwei sich schneidende Geraden der Grundfläche senkrecht, folglich ist sie zur Grundfläche senkrecht, also Höhe.
Schlussfolgerung. Die Höhe eines geraden Prismas ist die Länge einer Seitenkante des Prismas.
Der Quader ist ein gerades Prisma.

3. Anwendung: Das Rechteck $ABCD$ rotiert um die Seite AB und erzeugt den unten dargestellten Zylinder.

a) Beweist, dass AB die Höhe des Zylinders ist.
b) Beweist, dass jede Erzeugende des Zylinders Höhe des Zylinders ist.



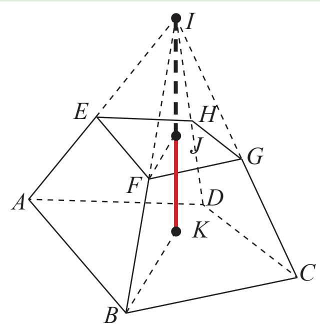
Beweis. **a)** Wir betrachten zwei nicht komplanare Lagen des rotierenden Rechtecks: ABC_1D_1 und ABC_2D_2. ABC_1D_1 und ABC_2D_2 sind Rechtecke, also $AB \perp AD_1$ und $AB \perp AD_2$. Demnach ist AB senkrecht auf die Ebene der Grundfläche (des Diskus mit dem Mittelpunkt A und dem Radius AD). Weil die Grundflächen in parallelen Ebenen liegen, ist AB senkrecht auf die Ebene des Diskus mit dem Mittelpunkt B und dem Radius BC.
b) CD ist eine beliebige Erzeugende. $ABCD$ ist ein Rechteck, also $CD \parallel AB$. Folglich ist CD senkrecht auf die Grundflächen, also Höhe.
Schlussfolgerung. Die Höhe eines geraden Kreiszylinders ist die Länge der Strecke, bestimmt von den Mittelpunkten seiner Grundflächen. Jede Erzeugende dieses Zylinders ist ebenfalls eine Höhe.

D. Die Höhe eines Pyramidenstumpfes. Die Höhe eines geraden Kreiskegelstumpfes

Der Pyramidenstumpf wird durch den Schnitt einer Pyramide mit einer Ebene parallel zur Grundfläche erhalten.
Der Kegelstumpf wird durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene parallel zur Grundfläche erhalten.
Die Grundflächen der Stümpfe liegen in parallelen Ebenen.

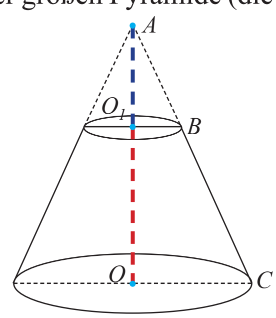
Definition 5. Der Abstand zwischen den Grundflächen des Pyramidenstumpfes ist seine Höhe.
Definition 6. Der Abstand zwischen den Grundflächen des Kegelstumpfes ist seine Höhe.

4. Anwendung: Bestimmt die Höhe der Pyramide, aus welcher der vierseitige Pyramidenstumpf $ABCDEFGH$ entstanden ist, wenn das Verhältnis der Grundkanten $\frac{1}{4}$ ist und die Höhe des Stumpfes $JK = 12$ cm.



Lösung. Sei I die Spitze der Pyramide, aus der der Stumpf entstand. Laut Hauptsatz der Ähnlichkeit sind $\Delta IAB \sim \Delta IEF$ und $\Delta IBK \sim \Delta IFJ$. Daraus folgt $\frac{IK}{IK - IJ} = \frac{4}{3}$, also $\frac{IK}{JK} = \frac{4}{3}$ und $IK = 16$ (cm).
Bemerkung. Die Höhe des Pyramidenstumpfes ist die Differenz zwischen den Höhen der großen Pyramide (die ursprüngliche) und der Höhe der kleinen Pyramide (die entfernt wurde).

5. Anwendung: Bestimmt die Höhe des Kegels, aus dem der Kegelstumpf mit den Radien $OC = 7$ cm, $O_1B = 3$ cm und der Höhe $OO_1 = 8$ cm entstanden ist.



Lösung. Sei A die Spitze des Kegels, aus der der Stumpf entstand. Laut Hauptsatz der Ähnlichkeit gilt $\Delta AO_1B \sim \Delta AOC$ und $\frac{O_1B}{OC} = \frac{AO_1}{AO}$. Daraus erhalten wir $\frac{OC - O_1B}{OC} = \frac{AO - AO_1}{AO}$, also $\frac{4}{7} = \frac{8}{AO}$ und $AO = 14$ cm.
Bemerkung. Die Höhe des Kegelstumpfes ist die Differenz zwischen den Höhen des großen Kegels (dem ursprünglichen) und der Höhe des kleinen Kegels (der entfernt wurde).

Aufgaben

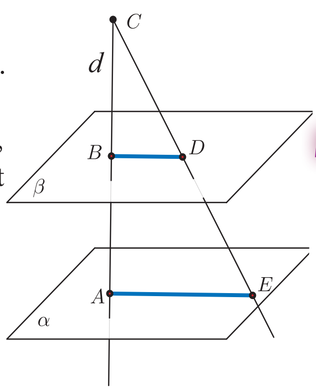
1 $ABCDMNPQ$ ist ein Würfel.
a) Zeigt, dass $AB \perp (ADM)$ und $AB \perp (BCN)$.
b) Wenn $AN = 4\sqrt{2}$ cm, berechnet den Abstand zwischen den Ebenen (ADM) und (BCN).

2 Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze:
a) Wenn die Ebenen α und β parallel sind, dann $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$.
b) Wenn die Ebenen α und β parallel sind und $d \perp \alpha$, dann $d \perp \beta$.
c) Die Länge der Seitenkante eines geraden Prismas ist größer als die Höhe des Prismas.
d) $ABCDEFGH$ ist ein Würfel. Dann gilt: $d((ABC), (EFG)) = d((ADH), (BCG))$.

3 $ABCDEFGH$ ist ein regelmäßiges vierseitiges Prisma. Die Punkte L, M, N, P sind die Mitten der Kanten AB, BC, CD bzw. DA und die Punkte Q, R, S, T sind die Mitten der Kanten EF, FG, GH bzw. HE.
a) Zeichnet das Prisma und die Punkte.
b) Zeigt, dass die Ebenen (LMQ) und (NPS) parallel sind.
c) Berechnet den Abstand zwischen den Ebenen (LMQ) und (NPS), wenn die Grundkante l ist .

4 Die Seitenflächen des regelmäßigen sechsseitigen Prismas $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ sind quadratische Flächen und $AD = 24$ cm. Eine Ebene α, parallel zu den Grundflächen des Prismas, schneidet die Strecke AB' im Punkt M, $AM = 2\sqrt{2}$ cm. Berechnet die Höhen der Prismen, die beim Schnitt mit α entstehen.

5 In der Zeichnung sind, $d \perp \alpha, \alpha \parallel \beta, d \cap \alpha = \{A\}$, $d \cap \beta = \{B\}$ und Punkt $C \in d$, $BC = 2{,}4$ cm. Eine Gerade durch C schneidet die Ebene β im Punkt D und die Ebene α in E, sodass $BD = 4$ cm, $AE = 10$ cm.
Berechnet den Abstand zwischen α und β.



6 Die Spitze eines geraden Kreiskegels ist A und der Durchmesser der Grundfläche $BC = 36$ cm. Die Winkelhalbierende des Winkels ABC schneidet AC in D und $\frac{AD}{DC} = \frac{5}{6}$.
a) Berechnet die Höhe des Kegels.
b) Der Kegel wird mit einer Ebene durch den Punkt D parallel zur Grundfläche geschnitten. Berechnet die Höhe des Stumpfes, der entsteht.

7 Die Grundfläche eines regelmäßigen vierseitigen Prismas ist 16 cm^2 und der Flächeninhalt einer Seitenfläche ist $20\sqrt{2}$ cm^2. Berechnet die Höhe des Prismas.

8 $ABCMNP$ ist ein gerades dreiseitiges Prisma. Die Punkte D, E, F liegen auf den Seitenkanten AM, BN bzw. CP, sodass $AD = 3 \cdot DM$, $BN = 4 \cdot EN$ und $PF = 0{,}(3) \cdot CF$.
a) Zeichnet das Prisma und markiert die Ebene (DEF).
b) Beweist, dass $(DEF) \parallel (ABC) \parallel (MNP)$.
c) Zeigt, dass $d((ABC), (DEF)) = 3 \cdot d((DEF), (MNP))$.

9 Die Grundfläche des Quaders $BCDELMNP$ ist das Rechteck $BCDE$, $BC = 7$ cm, $BD = 25$ cm und $CN = 40$ cm. Berechnet:
a) die Höhe BL des Quaders;
b) den Abstand vom Punkt L zur Ebene (PND).

10 Gegeben ist ein gerader Kreiszylinder. AD ist eine Erzeugende, AB und CD sind nicht komplanare Durchmesser, O und Q die Mittelpunkte der Grundflächen des Zylinders. Wenn $CO = 12$ cm und $\sphericalangle COD = u$, berechnet die Höhe des Zylinders für $u \in \{60°, 90°, 120°\}$.

11 Die Punkte A, B, C, D liegen auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$, der Grundfläche eines geraden Kreiszylinders, und AA', BB', CC', DD' sind Erzeugende des Zylinders. Die Punkte B, C liegen so auf derselben Seite des Durchmessers AD, dass $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{CD}$.
a) Beweist, dass $(ADD') \parallel (BCC')$.
b) Berechnet die Höhe des Zylinders, die gleich ist mit dem Abstand zwischen den Ebenen (ADD') und (BCC').

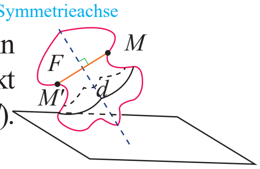
L3. Senkrechte Ebenen, Diagonalschnitte, Achsenschnitte

Wir erinnern uns!

Falls die Gerade d senkrecht steht auf die Ebene α und die Gerade d_1 parallel zu d ist, dann ist d_1 senkrecht auf α.

Ein konvexes Polygon mit n Seiten, $n \geq 4$, hat $\dfrac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen.

Das Spiegelbild eines Punktes M in Bezug auf eine Gerade d ist der Punkt M' mit $MM' \perp d$ und $d(M,d) = d(M',d)$. M und M' sind verschieden.



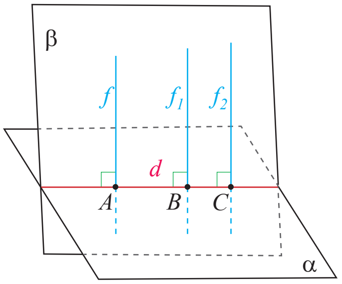
Die Diagonalen eines konvexen Polygons aus derselben Ecke teilen das Vieleck in $n-2$ Dreiecke, deren Ecken die des Vielecks sind.

Die Gerade d ist Symmetrieachse der Figur F, falls das Spiegelbild eines jeden Punktes M der Figur F in Bezug auf die Gerade d zu der Figur gehört.

Wir verstehen anhand von Beispielen

Viele Flächen aus unserem Umfeld sind ebene Flächen: die Häuserfront, die Wand eines Raumes, die Türe eines Schrankes. Einige sind vertikale Ebenen, die von horizontalen Ebenen geschnitten werden. Eine Gerade, die in der vertikalen Ebene senkrecht auf die Schnittkante steht, ist senkrecht zur horizontalen Ebene.

Definition 1. Der Schnitt der Ebenen α und β ist die Gerade d. Die zwei Ebenen sind *senkrecht,* falls eine Gerade f, die in einer der zwei Ebenen liegt und senkrecht zu der Geraden d steht, senkrecht auf die andere Ebene ist.[1]

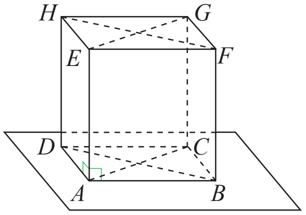


Mathematisch: $\alpha \perp \beta$ genau dann, wenn $f \subset \beta$ existiert, sodass $f \perp d$ und $f \perp \alpha$. Die Aussage ist wahr, auch wenn wir β mit α vertauschen.

Bemerkung. **1)** Die Eigenschaft der Geraden f aus der Ebene β, senkrecht auf α zu sein, bleibt erhalten für jede andere Gerade aus β, die senkrecht auf die Gerade d ist.

Beweis. Sei $f_1 \perp d$, eine andere Gerade in der Ebene β. Weil $f_1 \parallel f$ und $f \perp \alpha$, ist $f_1 \perp \alpha$.

2) Wenn eine Ebene α eine Gerade d einschließt, die senkrecht auf eine Ebene β ist, dann ist $\alpha \perp \beta$. Diese Aussage gilt als ein Kriterium zum Beweisen, dass zwei Ebenen senkrecht sind.



Anwendung: *ABCDEFGH* ist ein Quader.
Findet alle Ebenen, die von zwei Seitenkanten bestimmt werden, und beweist, dass sie auf die Ebene (ABC) senkrecht sind.

Lösung. Alle Flächen des Quaders sind Rechtecke. Für die Kante AE gilt: $AE \perp AB$, $AE \perp AD$, also $AE \perp (ABCD)$. Laut *Bemerkung* 2 sind $(ABFE) \perp (ABCD)$, $(ADHE) \perp (ABCD)$, $(AEGC) \perp (ABCD)$. Aus $BF \parallel AE \parallel DH$ und $AE \perp (ABCD)$ folgt $BF \perp (ABCD)$ und $DH \perp (ABCD)$.

[1] Die klassische Definition von senkrechten Ebenen wird später gegeben.

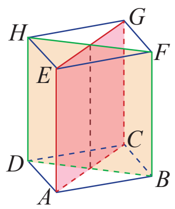
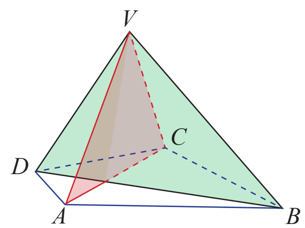
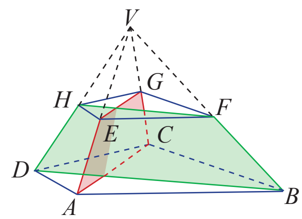
Die Ebenen ($DBFH$), ($BCGF$) und ($DCGH$) enthalten eine dieser Senkrechten auf ($ABCD$) und sind deshalb senkrecht auf die Ebene ($ABCD$). Wir haben somit im Quader sechs Ebenen gefunden, die senkrecht auf die Ebene ($ABCD$) stehen und je zwei Seitenkanten einschließen.

A. Diagonalschnitte

In der Lösung der 1. **Anwendung** erscheinen zwei Ebenen, die Diagonalen der Grundflächen und Seitenkanten.

Definition 2. Der Schnitt eines geometrischen Körpers (Prisma, Pyramide, Pyramidenstumpf), der als Grundfläche ein Polygon von mindestens 4 Seiten hat, mit einer Ebene, bestimmt von einer Diagonale einer Grundfläche und einer Seitenkante, heißt *Diagonalschnitt*.

Die Elemente des Diagonalschnittes nennen wir in den folgenden Beispielen für vierseitige Körper.

Das Prisma	Die Pyramide	Der Pyramidenstumpf
		
1) Der Diagonalschnitt wird begrenzt von: **a)** zwei Seitenkanten, die nicht in derselben Seitenfläche liegen; **b)** zwei entsprechenden Diagonalen der beiden Grundflächen. **2)** Wenn das Prisma gerade ist, dann ist der Diagonalschnitt senkrecht auf die Ebenen der Grundflächen.	**1)** Der Diagonalschnitt wird begrenzt von: **a)** zwei Seitenkanten, die nicht in derselben Seitenfläche liegen; **b)** einer Diagonale der Grundfläche und der Spitze der Pyramide.	**1)** Der Diagonalschnitt wird begrenzt von: **a)** zwei Seitenkanten, die nicht in derselben Seitenfläche liegen; **b)** zwei entsprechenden Diagonalen der beiden Grundflächen. **2)** Die Ebene des Diagonalschnittes des Pyramidenstumpfes ist identisch mit der Ebene des Diagonalschnittes der Pyramide, aus der der Stumpf entstand.

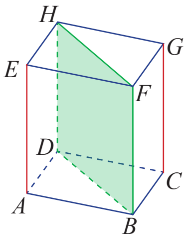
Bemerkung. **a)** Falls die Grundfläche ein n-*Eck* ist, $n \geq 4$, gibt es $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalschnitte.
b) Die Diagonalschnitte schließen keine Grundkanten ein.

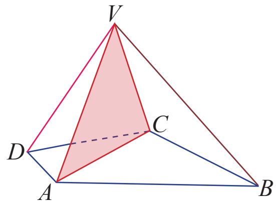
Fürs Portfolio

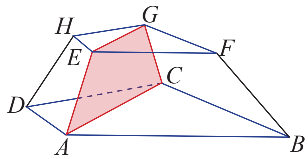
Sei $ABCDEFGH$ ein Quader.

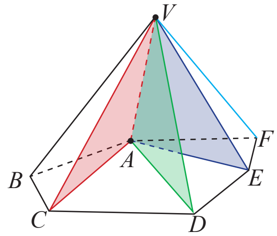
a) Zeichnet den Quader und seine Diagonalschnitte.
b) Zeigt mithilfe von Zeichnungen, dass jeder Diagonalschnitt den Quader in zwei gerade dreiseitige Prismen teilt.
c) Beweist, dass die zwei Diagonalschnitte des Quaders kongruent sind.
d) Wiederholt die Schritte a), b) und c), wenn $ABFE$ die Grundfläche des Quaders ist.

Bemerkung. Die Diagonalschnitte durch dieselbe Seitenkante bestimmen im *n-seitigen* Polyeder $n - 2$ Körper, deren Grundflächen Dreiecke sind.









Für $n = 4$ erzeugt jeder der zwei Diagonalschnitte zwei Körper mit dreieckiger Grundfläche.
Für $n = 6$ gibt es für jede Seitenkante drei Diagonalschnitte und es entstehen je vier Körper mit dreieckiger Grundfläche.

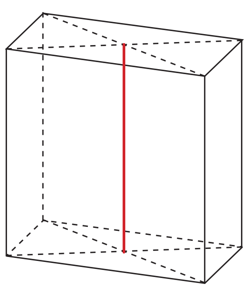
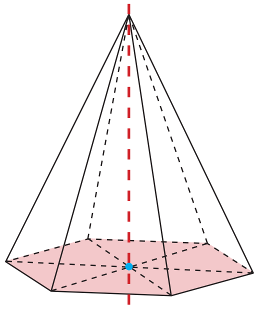
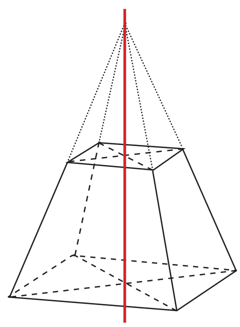
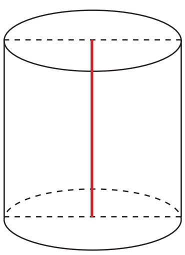
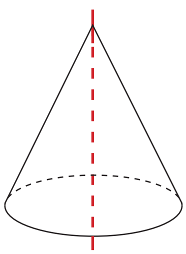
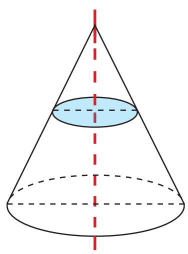
B. Achsenschnitte

Falls ein Körper eine Symmetrieachse hat, gilt:

1) Das Spiegelbild eines beliebigen Punktes, der auf der Oberfläche des Körpers liegt, in Bezug auf keine Symmetrieachse, liegt ebenfalls auf seiner Oberfläche.

2) Das Spiegelbild eines beliebigen Punktes, der im Inneren des Körpers liegt, in Bezug auf die Symmetrieachse, liegt ebenfalls in seinem Inneren.

Folgende Körper besitzen eine Symmetrieachse:

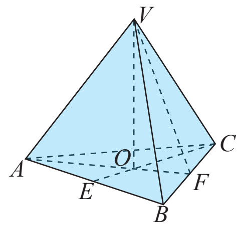
Der Quader und das regelmäßige *n* -seitige Prisma, wenn *n* gerade ist	Die regelmäßige *n*-seitige Pyramide, wenn *n* gerade ist	Der regelmäßige *n*-seitige Pyramidenstumpf, wenn *n* gerade ist
		
Die Symmetrieachse ist bestimmt von den Mittelpunkten der Basen.	Die Symmetrieachse ist bestimmt von dem Mittelpunkt der Basis und der Spitze.	Die Symmetrieachse ist bestimmt von den Mittelpunkten der Basen.
		
Der gerade Kreiszylinder	Der gerade Kreiskegel	Der gerade Kreiskegelstumpf

Anwendungen

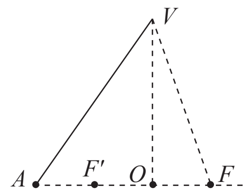
Bemerkung. Die Symmetrieachse eines Körpers steht senkrecht auf dessen Grundfläche.

1. Anwendung: Beweist, dass die Gerade, bestimmt vom Mittelpunkt der Grundfläche und der Spitze der regelmäßigen dreiseitigen Pyramide, keine Symmetrieachse der Pyramide ist.

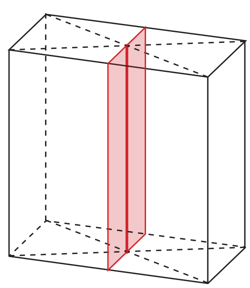
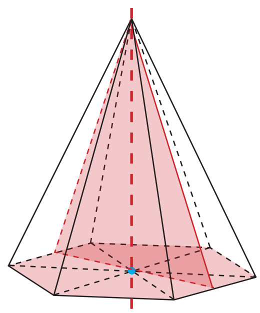
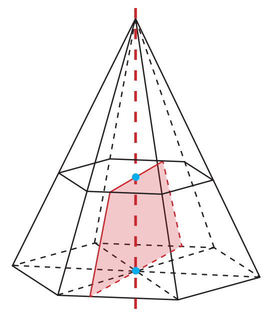
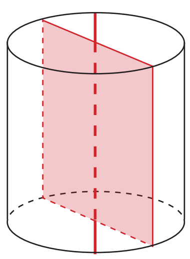
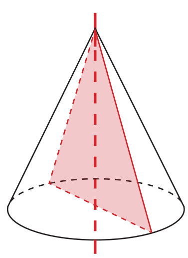
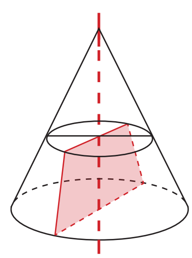
Beweis. $VABC$ ist eine regelmäßige dreiseitige Pyramide und O der Mittelpunkt der Grundfläche. Wir beweisen, dass VO keine Symmetrieachse ist. Sei F der Schnittpunkt der Geraden AO und BC. Punkt F liegt auf der Oberfläche der Pyramide.



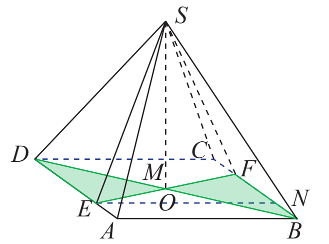
Es genügt zu beweisen, dass das Spiegelbild von F in Bezug auf VO nicht auf dieser Oberfläche liegt. VO ist die Höhe der Pyramide, also $VO \perp (ABC)$. Deshalb gilt $VO \perp AO$.
Das Spiegelbild von F in Bezug auf VO ist F', die Mitte der Strecke AO. Aber F' liegt nicht auf der Oberfläche der Pyramide.



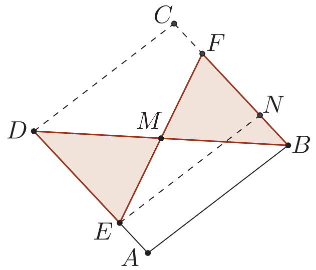
Definition. Der Schnitt eines Körpers, der eine Symmetrieachse besitzt, mit einer Ebene, die die Symmetrieachse enthält, heißt *Achsenschnitt*.

Der Quader und das regelmäßige n-seitige Prisma, wenn n gerade ist	Die regelmäßige n-seitige Pyramide, wenn n gerade ist	Der regelmäßige n-seitige Pyramidenstumpf, wenn n gerade ist
		
Rechteck	Gleichschenkliges Dreieck	Gleichschenkliges Trapez
		
Der gerade Kreiszylinder	Der gerade Kegel	Der gerade Kreiskegelstumpf

2. Anwendung: Auf den Kanten AD und BC der regelmäßigen vierseitigen Pyramide $SABCD$, $AB = 8$ cm, liegen die Punkte E bzw. F, $AE = 2$ cm, $BF = 6$ cm.
a) Zeigt, dass die Dreieckfläche SEF ein Achsenschnitt der Pyramide ist.
b) Beweist, dass $(SEF) \perp (ABC)$.
c) Berechnet die Höhe der Pyramide, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks SEF $32\sqrt{5}$ cm² ist.



Lösung: **a)** $ABCD$ ist ein Quadrat, also $AD = AB = 8$ cm und $DE = AD - AE = 6$ cm.
Sei $EF \cap BD = \{M\}$.
Da $\sphericalangle EDM \equiv \sphericalangle FBM$ (=45°), $DE \equiv BF$, $\sphericalangle DEM \equiv \sphericalangle BFM$ (innere Wechselwinkel), folgt $\Delta DEM \equiv \Delta BFM$ (WSW). Dann sind $DM \equiv BM$ und $EM \equiv FM$, also ist der Punkt M identisch mit O, dem Mittelpunkt der Grundfläche der Pyramide.
Die Ebene (SEF) schließt die Höhe der Pyramide ein. SO ist die Symmetrieachse der Pyramide. Deshalb ist die Dreieckfläche SEF ein Achsenschnitt.



b) SO ist eingeschlossen in der Ebene (SEF) und $SO \perp (ABC)$, also ist die Ebene $(SEF) \perp (ABC)$.
c) Sei $EN \perp BC$, $N \in BC$. Das Viereck $ABNE$ hat drei rechte Winkel, ist also ein Rechteck und $NE = AB = 8$ cm, $BN = AE = 2$ cm und $NF = BF - BN = 4$ cm. Im Dreieck EFN ist $\sphericalangle ENF = 90°$. Mithilfe des Lehrsatzes des Pythagoras erhält man $EF = 4\sqrt{5}$ cm. $\mathcal{A}_{SEF} = 32\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{EF \cdot SO}{2} = 32\sqrt{5}$, also $SO = 16$ cm.

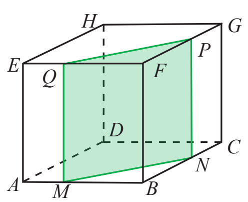
Fürs Portfolio

Begründet mithilfe von Beispielen und einer Geometrie-Software (zum Beispiel ***Geogebra***) die folgenden Aussagen.
1. Der Achsenschnitt liegt in einer Ebene senkrecht auf die Grundfläche.
2. Für einen Körper mit Symmetrieachse gibt es unendlich viele Achsenschnitte.
3. Alle Achsenschnitte eines Zylinders (Kegels bzw. Kegelstumpfes) sind kongruent.

Aufgaben

1 Zeichnet ein regelmäßiges vierseitiges Prisma und einen Diagonalschnitt. Berechnet die Dimensionen des Prismas, wenn der Diagonalschnitt ein Quadrat mit der Diagonale $8\sqrt{2}$ cm ist.

2 $ABCDEFGH$ ist ein Würfel, $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in FG$, $Q \in EF$, sodass $AM = CN = EQ = GP = \dfrac{1}{3} \cdot AB$.



Falls $\mathcal{A}_{MNPQ} = 24\sqrt{2}$ cm², bestimmt den Flächeninhalt des Diagonalschnittes.

3 $ABCDEFGH$ ist ein Quader, $AB = 10$ cm, $AD = 6\sqrt{3}$ cm und das Maß des Winkels der Geraden GA und BH ist 60°. Berechnet den Umfang des Vierecks $ACGE$.

4 Die Grundkante des sechsseitigen Prismas $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ misst 4 cm und $AD' = 16$ cm. Berechnet die Flächeninhalte der Diagonalschnitte durch die Seitenkante AA'.

5 $ABCDEFGH$ ist ein regelmäßiges vierseitiges Prisma. Der Umfang des Vierecks $ACGE$ ist 24 cm und $\operatorname{ctg}\sphericalangle EDF = 3$.
a) Berechnet die Höhe des Prismas.
b) Berechnet den Flächeninhalt von $BDHF$.

6 $ABCDMNPQ$ ist ein Würfel. E, F, G, H sind die Mitten der Kanten AD, BC, NP bzw. MQ.
a) Stellt fest, ob die viereckige Fläche $EFGH$ ein Achsenschnitt des Würfels ist.
b) Wenn $GA = 6$ cm, berechnet den Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$.

7 P ist die Mitte der Kante VA der regelmäßigen vierseitigen Pyramide $VABCD$. Der Flächeninhalt des Dreiecks VPC ist 24 cm². Berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks VBD.

8 $VABCD$ ist eine regelmäßige vierseitige Pyramide mit der Höhe VO, $OE \perp VA$, $E \in VA$.
Der Flächeninhalt des Diagonalschnittes ist 8 cm². Das Dreieck ACV ist rechtwinklig. Berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks BEO.

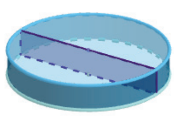
9 Die Mittelpunkte der Grundflächen des regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes $ABCDMNPR$ sind O bzw. Q. E und F sind die Mitten der Kanten AD bzw. BC. Der Umfang des gleichseitigen Dreiecks QEF ist 48 cm.
Wenn $MN = 12$ cm, berechnet:
a) den Flächeninhalt des Diagonalschnittes;
b) die Höhe der Pyramide, aus der der Stumpf entstanden ist.

10 **a)** Zeichnet ein regelmäßiges vierseitiges Prisma $ABCDEFGH$ und den Achsenschnitt, der die Seitenkante CG enthält.
b) Wenn dieser Schnitt ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 72 cm² ist, berechnet Grundkante und Höhe des Prismas.

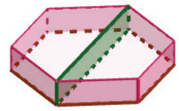
11 $ABCD$ ist ein Achsenschnitt eines geraden Kreiszylinders. O ist der Mittelpunkt der Grundfläche mit dem Durchmesser AB und $OC = 8$ cm.
Wenn $\sphericalangle CDO = 60°$, berechnet Radius und Erzeugende des Zylinders.

12 Die dreieckige Fläche VAB, $VA = VB = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$, ist ein Achsenschnitt eines Kegels. Wenn der Umfang des Dreiecks VAB $2 \cdot (2+\sqrt{2})$ cm ist, berechnet den Radius des Kegels.

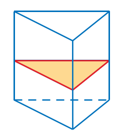
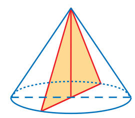
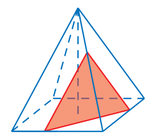
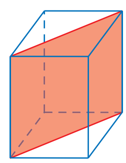
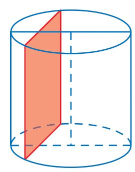
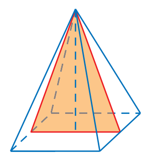
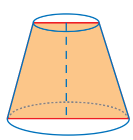
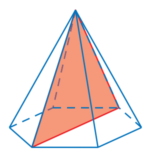
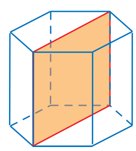
13 Das zylinderförmige Becken eines Delphinariums wurde mithilfe einer rechteckigen Wand in zwei gleiche Zonen geteilt. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist 300 m². Der Radius des Zylinders ist 15 m. Berechnet die Tiefe des Beckens.



14 Ein Unternehmen nimmt einen Raum in Form eines regelmäßigen sechseckigen Prismas ein. Um einen Gewinn im Umsatz zu erzielen, verwandelt es die Hälfte des Raumes, den es besitzt, in ein Kino. Die Trennwand (siehe Abbildung) hat eine Höhe von 6 m und einen Flächeninhalt von 324 m². Berechnet die Fläche des Raumes, den die Firma nutzt, und drückt sie in Hektar aus.



15 **a)** Wählt die Zeichnungen aus, in denen Diagonalschnitte dargestellt sind:

a) Regelmäßiges dreiseitiges Prisma	**b)** Gerader Kreiskegel	**c)** Regelmäßige vierseitige Pyramide
		
d) Regelmäßiges vierseitiges Prisma	**e)** Gerader Kreiszylinder	**f)** Regelmäßige vierseitige Pyramide
		
g) Gerader Kreiskegelstumpf	**h)** Regelmäßige sechsseitige Pyramide	**i)** Regelmäßiges sechsseitiges Prisma
		

b) Wählt die Zeichnungen aus, in denen Achsenschnitte dargestellt sind.

c) Zeichnet die Körper von **a)** und **b)** in eure Hefte.

d) Bestimmt für jeden Körper von **c)** die Anzahl der Schnitte, die sowohl Diagonal- als auch Achsenschnitte sind.

5 Orthogonale Projektionen im Raum

L1. Projektionen von Punkten, Strecken und Geraden auf eine Ebene

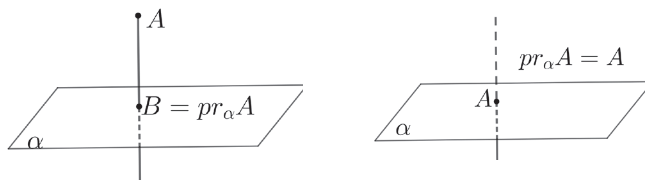
Man behauptet, der berühmte Wissenschaftler Sir Isaac Newton (1642 – 1727) sei, während er unter einem Baum meditierte, unerwartet durch den Schlag eines reifen Apfels, der vom Baum fiel, geweckt worden. Dieser Vorfall half ihm, das berühmte Gesetz der universellen Anziehung zu formulieren.
Wenn wir die Geschichte von Newtons Apfel geometrisch betrachten, ist die Erdoberfläche unter dem Baum eine *horizontale Ebene* und die Richtung, in der der Apfel fällt, vertikal, *senkrecht* zur Ebene des Bodens. Daher fiel der Apfel von der Anfangsposition A senkrecht auf die Bodenebene α und blieb im Punkt B, wo die Senkrechte durch A die Ebene schneidet, stehen.

Wir entdecken und verstehen anhand von Beispielen

Definition 1. Der Schnittpunkt B der Senkrechten durch den Punkt A auf die Gerade d mit dieser Geraden heißt *orthogonale Projektion des Punktes A auf die Gerade d*. Man schreibt: $B = pr_d A$.

Wenn $A \in d$, dann $pr_d A = A$.

Definition 2. Der Schnittpunkt B der Senkrechten durch den Punkt A auf die Ebene α mit dieser Ebene heißt *orthogonale Projektion des Punktes A auf die Ebene α*. Man schreibt: $B = pr_\alpha A$.

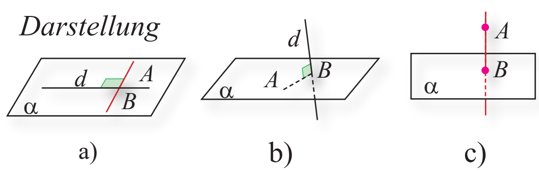


Falls $A \in \alpha$, dann $pr_\alpha A = A$.

Bemerkung. **1)** Wir werden von nun an statt „orthogonale Projektion" nur „Projektion" sagen.
2) Im Raum ist die Projektion eines Punktes auf eine Gerade die Projektion dieses Punktes auf die gegebene Gerade in der von ihnen bestimmten Ebene.
3) Die *Projektion eines Punktes* auf eine Gerade oder eine Ebene *ist ein Punkt* auf der Geraden bzw. auf der Ebene.
4) Die Strecke AB war in den obigen Darstellungen nur zur Konstruktion der Projektion notwendig.

1. Anwendung:
a) Sei B ein fester Punkt auf der Geraden d in der Ebene α. Findet alle Punkte A der Ebene, für die $B = pr_d A$.
b) Sei B ein fester Punkt auf der Geraden d im Raum. Findet alle Punkte A des Raumes, für die $B = pr_d A$.
c) Sei B ein fester Punkt der Ebene α. Findet alle Punkte A des Raumes, für die $B = pr_\alpha A$.

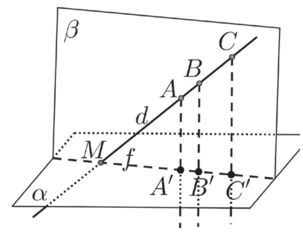
Darstellung



Lösung.
a) Die Punkte der Senkrechten in B auf d erfüllen die Bedingung.
b) Die Ebene α sei senkrecht zu d in B und A sei ein beliebiger Punkt dieser Ebene. Weil $d \perp \alpha$ und $AB \subset \alpha$, ist $AB \perp d$. Also $B = pr_d A$. Die gesuchten Punkte, deren Projektion auf d der Punkt B ist, bilden die Ebene, die durch B senkrecht auf B steht.
c) Die Punkte auf der Senkrechten in B auf α werden in den Punkt B projiziert.

2. Anwendung: Bestimmt die Projektionen eines Punktes auf die Ebenen der Flächen eines Tetraeders. (Das digitale Lehrbuch oder das Web können behilflich sein.)

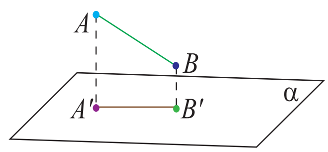
3. Anwendung: **a)** Wenn A, B und C kollineare Punkte sind, dann sind ihre Projektionen auf die Ebene α ebenfalls kollineare Punkte.
b) Wenn $A' = pr_\alpha A$, $B' = pr_\alpha B$ und $C' = pr_\alpha C$, dann $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.



Lösung. **a)** Wenn die Punkte A, B und C auf der Geraden d liegen, $d \not\subset \alpha$ und $d \cap \alpha = \{M\}$, sei $\beta = (AA'M)$ und $f = \alpha \cap \beta$.
Aus $AA' \perp \alpha$, $BB' \perp \alpha$ und $CC' \perp \alpha$ folgt $AA' \parallel BB' \parallel CC'$.
Aus $B \in d$, $d \subset \beta$, $AA' \subset \beta$ und $AA' \parallel BB'$ folgt $BB' \subset \beta$, also $B' \in \alpha \cap \beta$. Analog: $C' \in \alpha \cap \beta$. Dann sind A', B', C' kollinear.
b) In der Ebene β bestimmen *parallele Geraden auf zwei sich schneidende Geraden proportionale Strecken*, also $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.
Schlussfolgerungen. **1)** Die *Projektion der Mitte einer Strecke* auf eine Ebene ist die Mitte der Strecke, bestimmt von den Projektionen der Endpunkte der betreffenden Strecke auf die Ebene.
2) Falls B auf der Strecke AC liegt, dann liegt B' auf der Strecke $A'C'$.
Die geometrischen Figuren sind Mengen von Punkten. Man kann somit von der Projektion einer Menge von Punkten auf eine Gerade oder eine Ebene sprechen.

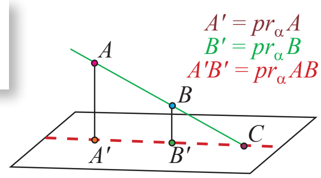
Definition 3. Die Menge der Projektionen aller Punkte einer geometrischen Figur F auf eine Ebene α heißt Projektion der Figur F auf die Ebene α.

Lehrsatz 1. Gegeben sind die Stecke AB, eine Ebene α, $A' = pr_\alpha A$ und $B' = pr_\alpha B$.
1) Falls $AB \not\perp \alpha$, ist die Projektion der Strecke AB auf α die Strecke $A'B'$, wobei $A' = pr_\alpha A$ und $B' = pr_\alpha B$.
2) Falls $AB \perp \alpha$, ist die Projektion der Strecke AB auf α der Punkt A'.



Folgesatz. Die Projektion einer Strecke auf eine Ebene ist höchstens so lang wie die Strecke.
Beweis. Relevant ist der Fall $AB \not\perp \alpha$.
Möglich sind folgende Situationen: **a)** Falls $AB \subset \alpha$, ist jeder Punkt der Strecke AB mit seiner Projektion identisch, also $pr_\alpha AB = AB$. Die Länge der Projektion ist gleich mit der Länge der projizierten Strecke.
b) Falls $AB \parallel \alpha$, ist $AA' \parallel BB'$, $ABB'A'$ ein Parallelogramm und $AB = A'B'$. **c)** Falls $AB \not\subset \alpha$ und $AB \nparallel \alpha$, genügt es anzunehmen, dass die Strecke die Ebene α nicht schneidet. Es entsteht das rechtwinklige Trapez $ABB'A'$ mit den Schenkeln AB und $A'B'$, wobei $AB > A'B'$ ($A'B'$ ist die Höhe des Trapezes). Falls die Strecke die Ebene schneidet, wird im Trapez $AA'BB'$ die Strecke AB eine Diagonale sein, länger als die Höhe $A'B'$.

Lehrsatz 2. Die Projektion einer Geraden auf eine Ebene ist eine Gerade oder ein Punkt.

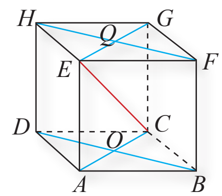


Beweis. Seien AB eine Gerade, α eine Ebene, $A' = pr_\alpha A$ und $B' = pr_\alpha B$.
1) Falls $AB \not\perp \alpha$, $A' = pr_\alpha A$ und $B' = pr_\alpha B$, sind A' und B' verschieden. Da die Projektionen kollinearer Punkte kollinear sind, ist die Projektion der Geraden AB auf die Ebene α die Gerade $A'B'$.
2) Falls $AB \perp \alpha$, ist $pr_\alpha AB = \{A'\} = \{B'\}$, also ist die Projektion ein Punkt.
Folgesatz. Falls $AB \cap \alpha = \{C\}$, ist $C \in A'B' = pr_\alpha AB$ (der Schnittpunkt liegt auf der Projektion).

Anwendungen

4. Anwendung: Im Würfel $ABCDEFGH$ sind O und Q die Mittelpunkte der Grundflächen. Ergänzt in der Tabelle die Projektion einer jeden Strecke auf die entsprechende Ebene. Im Schnitt der Zeile α mit der Spalte MN steht $pr_\alpha MN$.

Strecke, die projiziert wird / Ebene, auf die projiziert wird	CE	DH	HB
(ABC)	AC		
(ABE)			
(DBF)			



Anleitung. Die Projektion der Strecke CE auf die Ebene (ABC) ist die Strecke, bestimmt von den Projektionen der Endpunkte C bzw. E dieser Strecke auf die Ebene. Aus $C \in (ABC)$ folgt $pr_{(ABC)} C = C$. Aus $E \notin (ABC)$ und $EA \perp (ABC)$, $A \in (ABC)$, folgt $pr_{(ABC)} E = A$. Die Projektion der Strecke CE auf die Ebene (ABC) ist somit die Strecke AC. Im Schnitt der Zeile (ABC) mit der Spalte CE steht AC (siehe Modell).

Aufgaben

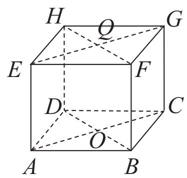
1 Die Gerade d ist parallel zur Ebene α und $g = pr_\alpha d$. Beweist, dass die Gerade g parallel zu d ist.

2 Die Strecke AB liegt auf einer parallelen Gerade zur Ebene α und die Strecke $A'B'$ ist ihre Projektion auf α. Der Punkt P gehört zur Strecke AB, $PA = 2 \cdot PB$ und $Q = \mathrm{pr}_\alpha P$.
a) Beweist, dass der Punkt Q auf der Strecke $A'B'$ liegt.
b) Berechnet das Verhältnis $\dfrac{QB'}{A'B'}$.

3 α ist eine Ebene, $A \in \alpha$ und $B \notin \alpha$, $AB = 8\sqrt{2}$ cm. Wenn die Projektion des Punktes B auf α der Punkt C ist und $AC \equiv BC$, berechnet die Länge der Projektion der Strecke AB auf α.

4 Die Seite BC des gleichseitigen Dreiecks ABC, $AB = 20$ cm, liegt in der Ebene α. BM und CN sind Höhen des Dreiecks. $M \in AC$, $N \in AB$. Berechnet die Länge der Projektion der Strecke MN auf die Ebene α.

5 Im abgebildeten Würfel sind O bzw. Q die Mittelpunkte von $ABCD$ bzw. $EFGH$. Bestimmt:



a) $pr_{AD}C$, $pr_{EF}B$
b) $pr_{(ABC)}A$, $pr_{(EFG)}D$
c) $pr_{(ABC)}Q$, $pr_{(EFG)}O$
d) $pr_{(ABC)}AE$, $pr_{(BCF)}AE$
e) $pr_{(ABC)}GA$, $pr_{(BCF)}EC$
f) $pr_{(ADE)}OA$, $pr_{(ADE)}AB$, $pr_{(ADE)}BG$

6 A, B, C, D sind vier nicht komplanare Punkte, sodass $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$.
a) Beweist, dass $AD \perp (ABC)$.
b) Bestimmt die Projektionen der Strecken BD und CD auf die Ebene (ABC).
c) Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze:
c_1) Die Projektion der Strecke BC auf die Ebene (ABD) ist die Strecke AB.
c_2) Die Projektion der Strecke BD auf die Ebene (ACD) ist die Strecke CD.
c_3) Die Projektion der Strecke AD auf die Ebene (ABC) ist der Punkt A.

7 Die Projektionen der verschiedenen kollinearen Punkte A, B, C auf eine Ebene β sind die verschiedenen Punkte A', B, C'.
a) Zeigt, dass $B \in \beta$ und die Punkte A', B, C' kollinear sind.
b) Beweist, dass $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B}{BC'}$.
c) Wenn $A'C' = 25$ cm und $\dfrac{A_{ABA'}}{A_{BCC'}} = \dfrac{9}{4}$,
berechnet die Längen der Strecken $A'B$ und BC'.

8 Das Dreieck DEF ist die Projektion eines beliebigen Dreiecks ABC auf eine Ebene α. Beweist, dass die Projektion des Punktes G, des Schwerpunkts des Dreiecks ABC auf die Ebene α, der Punkt P ist, der Schwerpunkt des Dreiecks DEF.

L2. Der Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene, die Länge der Projektion einer Strecke auf eine Ebene

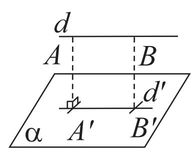
Wir verstehen anhand von Beispielen

Problemsituation. Wenn d eine beliebige Gerade im Raum, α eine Ebene und a eine in α eingeschlossene Gerade ist, fragen wir uns: **1)** Wie bestimmen wir den Winkel, gebildet von den Geraden d und a?
2) Welche Gerade aus der Ebene bildet mit der Geraden d den kleinsten Winkel?
Lösung. Falls $d \subset \alpha$, sind die Geraden a und d komplanar. Der kleinste Winkel gilt für $a = d$ oder $a \parallel d$ (0°).
Falls $d \perp \alpha$, ist $d \perp a$ für alle $a \subset \alpha$. Die Gerade d bildet mit jeder Geraden der Ebene α einen Winkel von 90°.
Falls d die Ebene schneidet und $d \not\perp \alpha$, ist der Winkel der Geraden d und a der Winkel, gebildet von der Geraden d mit der Parallelen zu a durch den Schnittpunkt mit der Ebene. Die Winkelmaße der Winkel zwischen d und a liegen dann zwischen 0° und 90°.
Man beweist, dass die Gerade a, die den kleinsten Winkel mit der Geraden d bildet, die Projektion von d auf die Ebene α ist. Diese ist einzig.

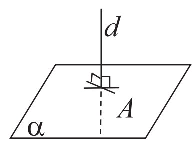
Definition 1. Der Winkel zwischen der Geraden d und der Ebene α, $d \not\perp \alpha$ und $d \nparallel \alpha$, ist der Winkel, gebildet von der Geraden d und ihrer Projektion auf α.

Vereinbarungen

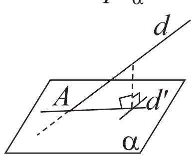
1) Falls $d \parallel \alpha$, dann $\sphericalangle(d, \alpha) = 0°$.



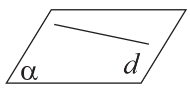
2) Falls $d \perp \alpha$, dann $\sphericalangle(d, \alpha) = 90°$.



Falls d die Ebene schneidet und $d \not\perp \alpha$, dann $\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, d')$, wobei $d' = pr_{\alpha} d$.

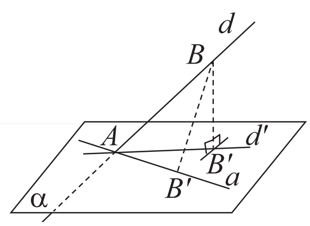


Wenn $d \subset \alpha$, dann $\sphericalangle(d, \alpha) = 0°$.



Bemerkung. Wenn d eine beliebige Gerade im Raum ist und α eine beliebige Ebene, dann $0 \leq \sphericalangle(d, \alpha) \leq 90°$.

1. Anwendung: Für jede Gerade d des Raumes und jede Gerade $a \subset \alpha$ gilt die Beziehung $\sphericalangle(d, \alpha) \leq \sphericalangle(d, a)$.

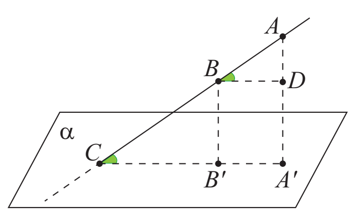


Den Beweis findet ihr im rumänischsprachigen digitalen Lehrbuch.

Wir haben bewiesen, dass die Länge der Projektion einer Strecke auf eine Ebene höchstens die Länge der Strecke ist. Das nächste Ergebnis ermöglicht uns, die Länge der Projektion einer Strecke auf eine Ebene zu berechnen.

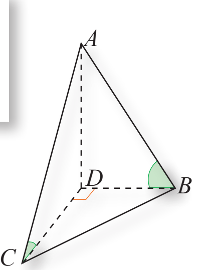
Satz 1. Die Länge der Projektion einer Strecke AB auf eine Ebene α ist das Produkt der Länge der Strecke und dem Kosinus des Winkels, gebildet von der Geraden AB und der Ebene α.

Beweis. Falls die Gerade AB die Ebene im Punkt C schneidet, sei $A'B'$ die Projektion der Strecke AB auf die Ebene α.
In der Ebene (ACA') konstruieren wir durch B die Parallele zu $A'B'$ und bezeichnen mit D ihren Schnittpunkt mit AA'. Es entsteht das Rechteck $BB'A'D$, mit $BD = A'B'$. Der Winkel zwischen AB und α ist $\sphericalangle ACA' \equiv \sphericalangle ABD$ (Stufenwinkel). Im rechtwinkligen Dreieck ABD ist $\cos(\sphericalangle ABD) = \dfrac{BD}{AB}$, daraus $BD = AB \cdot \cos(\sphericalangle ABD)$, also $A'B' = AB \cdot \cos(\sphericalangle ACA')$. Die Behauptung gilt auch für $AB \parallel \alpha$ und $AB \perp \alpha$.



Anwendungen

2. Anwendung: Die Projektion des Dreiecks ABC auf die Ebene α ist das Dreieck DBC mit $DB = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle BDC = 90°$ und $AD = 6$ cm. Bestimmt die Maße der Winkel der Geraden AB und AC mit der Ebene α.



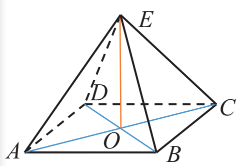
Lösung. Das Dreieck BCD ist rechtwinklig ($\sphericalangle BDC = 90°$), $DB = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$, also $CD = 6$ cm. Laut Voraussetzung $A \notin \alpha$ und $pr_\alpha A = D$, $pr_\alpha B = B$, $pr_\alpha C = C$, dann gilt $pr_\alpha AB = DB$ und $pr_\alpha AC = DC$. Dann gilt laut Definition $\sphericalangle(AB, \alpha) = \sphericalangle(AB, DB) = \sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle(AC, \alpha) = \sphericalangle(AC, DC) = \sphericalangle ACD$.

Da $AD \perp \alpha$, $DB, DC \subset \alpha$, sind $AD \perp DB$ und $AD \perp DC$, woraus folgt, dass ADB und ADC rechtwinklige Dreiecke sind. Im Dreieck ADB sind $\sphericalangle ADB = 90°$; $\operatorname{tg}\sphericalangle ABD = \frac{AD}{DB} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Dann sind $\sphericalangle ABD = \sphericalangle(AB,\alpha) = 60°$.

Im Dreieck ADC sind $\sphericalangle ADC = 90°$, $AD = DC = 6$ cm und $\sphericalangle ACD = \sphericalangle(AC, \alpha) = 45°$.

3. Anwendung $ABCD$ ist ein Rhombus, $BD = 12$ cm und E ist ein Punkt außerhalb der Ebene des Rhombus, sodass $EA = EC = 12$ cm, $EB = ED$ und der Winkel zwischen EA und der Ebene des Rhombus 30° misst.

a) Berechnet die Projektion der Strecke EA auf die Ebene des Rhombus.
b) Berechnet die Projektion der Strecke EA auf die Ebene (EBD).
c) Berechnet das Maß des Winkels zwischen der Geraden EB und der Ebene (ABC).



Lösung. $\{O\} = AC \cap BD$ ist der Schnittpunkt der Diagonalen des Rhombus. Dann ist EO Seitenhalbierende in den gleichschenkligen Dreiecken EAC und EBD, also auch Höhe. Weil $EO \perp AC$ und $EO \perp BD$, ist $EO \perp (ABC)$ und $pr_{(ABC)}AE = AO$, $pr_{(ABC)}EB = BO$. Dann ist $\sphericalangle(AE, (ABC)) = \sphericalangle EAO$ und $\sphericalangle(BE, (ABC)) = \sphericalangle EBO$.

a) Weil $\sphericalangle(AE, (ABC)) = 30°$, ist $AO = AE \cdot \cos 30° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm.

b) Die Diagonalen des Rhombus stehen senkrecht zueinander, also $AO \perp BD$. Da $EO \perp (ABCD)$ und AO eingeschlossen ist in ($ABCD$), ist $EO \perp AO$. Es folgt: $AO \perp (EBD)$ (AO ist senkrecht zu zwei sich schneidenden Geraden dieser Ebene) und $pr_{(EBD)}EA = EO$.
Das Dreieck EOA ist rechtwinklig und EO liegt gegenüber einem Winkel von 30°, also $EO = 6$ cm.
Wir haben bewiesen, dass $pr_{(ABC)}EB = BO$, und daraus folgt: $\sphericalangle(BE, (ABC)) = \sphericalangle EBO$.
Die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks EOB. $BO = EO = 6$, folglich ist $\sphericalangle EBO = 45°$.

Fürs Portfolio

1. Beweist, dass es keine regelmäßige sechsseitige Pyramide gibt, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.
2. a) Bestimmt den Kosinus der Winkel, gebildet von den Seitenkanten eines regelmäßigen Tetraeders der Kantenlänge a mit der Ebene der Grundfläche. Wendet *Satz 1* an.
b) Bestimmt den Kosinus der Winkel, gebildet von den Seitenkanten der Länge a einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mit der Ebene der Grundfläche, wenn die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.

Aufgaben

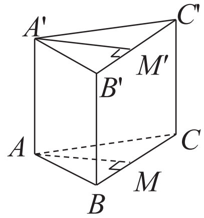
1 Zeichnet den Quader $ABCDEFGH$. Nennt:

a) die Projektion der Geraden AF auf die Ebene (BCF) und den Winkel von AF mit (BCF);

b) die Projektion der Geraden BH auf die Ebene (ACD) und den Winkel von BH mit (ACD);

c) die Projektion der Geraden CE auf die Ebene (ADE) und den Winkel von CE mit (ADE).

2 Im geraden regelmäßigen dreiseitigen Prisma $ABCA'B'C'$ sind $AB = AA'$, $AM \perp BC$ und $A'M' \perp B'C'$.



a) Nennt den Winkel der Geraden AC' mit der Ebene (BCC').

b) Bestimmt das Maß des Winkels der Geraden $A'B$ mit der Ebene (ABM).

c) Bestimmt $\sphericalangle(AM, (BCC'))$, $\sphericalangle(BM, (AMM'))$.

d) Beweist, dass $\sphericalangle(AC', (ABC)) \equiv \sphericalangle(A'B, (A'B'C'))$.

3 Im Quader $ABCDA'B'C'D'$ sind $AB = BC = 9\sqrt{2}$ cm und $AC' = 12\sqrt{3}$ cm.

a) Beweist, dass $AC' = 2 \cdot AA'$.

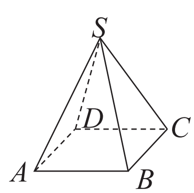
b) Berechnet das Maß des Winkels der Geraden AC' mit der Ebene (ABC).

4 ABC ist ein rechtwinkliges Dreieck, $\sphericalangle BAC = 90°$, BB' und CC' sind sekrecht auf die Dreieckebene. Wenn $B'A$ und $C'A$ Winkel von 60° bzw. 45°mit der Ebene (ABC) bilden und $B'B = 3\sqrt{3}$ cm, $C'C = 2$ cm, dann berechnet:

a) die Längen der Projektionen der Strecken AB', AC' auf die Ebene (ABC);

b) den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

5 Alle Kanten der Pyramide $SABCD$ sind 6 cm.



a) Bestimmt $pr_{(ABC)}S$, $pr_{(ABC)}SA$, $pr_{(ABC)}SB$.

b) Berechnet die Maße der Winkel des Dreiecks SAC.

c) Beweist, dass $DB \perp (SAC)$.

d) Bestimmt $\sphericalangle(SA, (ABC))$, $\sphericalangle(SB, (SAC))$.

6 Auf die Ebene des rechtwinkligen Dreiecks ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = AC = 4\sqrt{3}$ cm, wird die Senkrechte TA errichtet, sodass $TA = 2\sqrt{2}$ cm. N ist die Mitte der Strecke BC.

a) Beweist, dass $BC \perp (ANT)$.

b) Berechnet die Maße der Winkel $\sphericalangle(AT, (ABC))$, $\sphericalangle(AT, (ANT))$, $\sphericalangle(AB, (ANT))$, $\sphericalangle(NT, (ABC))$.

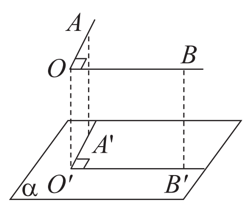
7 Die Geraden AM und DN stehen senkrecht auf die Ebene des regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$. Die Punkte M und N liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene (ABC), $AM = DN = AB = a$.

a) Zeichnet.

b) Beweist, dass die Punkte M, A, N, D die Ecken eines Parallelogramms sind.

c) Bestimmt die Maße der Winkel $\sphericalangle(MN, (ABC))$, $\sphericalangle(MA, (ABC))$, $\sphericalangle(AD, (BCE))$.

8 Der rechte Winkel AOB wird auf die Ebene α projiziert und man erhält den rechten Winkel $A'O'B'$. $OA \nparallel \alpha$.

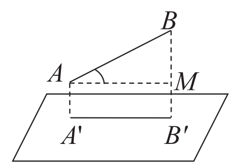


a) Beweist, dass $O'A' \perp (OB'O')$.

b) Beweist, dass $OB \perp (O'A', OA)$.

c) Beweist, dass $OB \parallel \alpha$.

9 Die Gerade AB bildet mit der Ebene α einen Winkel von 30°. Die Projektion $A'B'$ der Strecke AB auf α ist 24 cm lang.



a) Berechnet die Länge der Strecke AB.

b) Berechnet die Länge der Projektion der Strecke AB auf die Gerade BB'.

10 Auf die Ebene des rechtwinkligen Dreiecks ABC wird in der Mitte M der Hypotenuse BC eine Senkrechte errichtet. Darauf liegt der Punkt N, sodass $MN = 8$ cm. Wenn $AB = AC = 6\sqrt{2}$ cm, berechnet die Länge der Projektion:

a) der Strecke AN auf die Ebene (BCN);

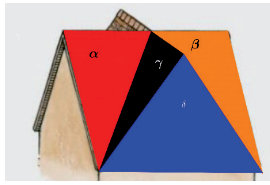
b) der Strecke AC auf die Ebene (AMN).

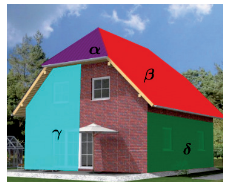
L3. Flächenwinkel, ebener Winkel eines Flächenwinkels, Winkel zweier Ebenen, senkrechte Ebenen

Wir erinnern uns!

Die Menge aller Punkte der Ebene, die auf derselben Seite einer Geraden liegen, bilden eine Halbebene. Eine Gerade d, die in der Ebene α eingeschlossen ist, bestimmt in der Ebene zwei Halbebenen.

Die Raumgeometrie *modelliert mathematisch* viele Elemente des realen Umfelds. Betrachtet die abgebildeten Häuser und erkennt einige Ebenen, die sie begrenzen: in denen die Wände oder Teile des Daches liegen.

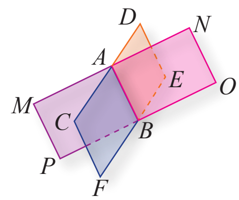




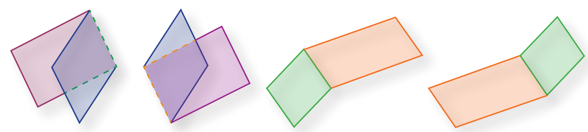
Man fragt sich: Wie kann die *Neigung* dieser Flächen oder ihre gegenseitige Lage ausgedrückt werden? Kann man vom „Winkel zweier Ebenen“ sprechen?

Die Ebenen, die auf den Abbildungen markiert sind, schneiden sich paarweise.

Betrachten wir zwei sich schneidende Ebenen. Ihre Schnittgerade AB bestimmt in jeder Ebene je zwei Halbebenen. Man erkennt dabei eine geometrische Konstruktion, bestehend aus zwei Halbebenen, die aus verschiedenen Ebenen stammen und die eine gemeinsame *Grenze* haben (siehe Abbildung).

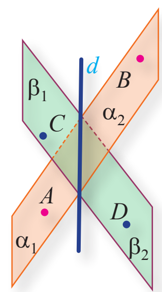


Definition 1. Die geometrische Figur, gebildet von zwei Halbebenen, die von derselben Geraden begrenzt werden, heißt *Flächenwinkel* oder *Diederwinkel (kurz Dieder).*



Die gemeinsame Gerade der beiden Halbebenen heißt *Kante des Flächenwinkels* und die Halbebenen heißen *Flächen des Flächenwinkels.*

Bemerkung. In der Ebene α nehmen wir die Gerade $d \subset \alpha$ und A und $B,$ zwei Punkte der Ebene auf verschiedenen Seiten der Geraden d (die Strecke AB und die Gerade d schneiden einander), an. Wir bezeichnen mit α_1 die Halbebene bestimmt von der Geraden d und dem Punkt $A,$ und α_2, die Halbebene bestimmt von der Geraden d und dem Punkt B. Man bezeichnet $\alpha_1 = (d, A$ und $\alpha_2 = (d, B$.



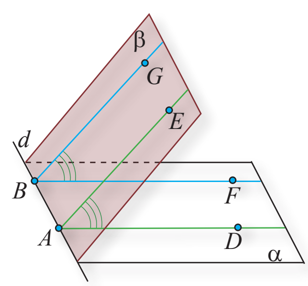
Beispiel. Die Ebenen α und β schneiden einander in der Geraden $d.$ Die von d bestimmten Halbebenen seien α_1, α_2 bzw. β_1 und β_2. Es entstehen vier Flächenwinkel: $\sphericalangle(\alpha_1, \beta_1)$, $\sphericalangle(\alpha_1, \beta_2)$, $\sphericalangle(\alpha_2, \beta_1)$ und $\sphericalangle(\alpha_2, \beta_2)$.

Satz 1. Auf der Kante d des Flächenwinkels $\sphericalangle(\alpha, \beta)$ nehmen wir die Punkte A und B an. Durch sie konstruieren wir die Ebenen $\gamma_1 \perp d$ und $\gamma_2 \perp d$. Die Halbgeraden AD und AE seien die Schnitte der Ebene γ_1 mit dem Flächenwinkel und BF und BG der Schnitt der Ebene γ_2 mit dem Flächenwinkel.

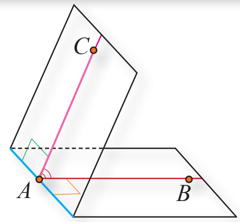
Dann gilt: $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle FBG.$

Beweis. Weil $\gamma_1 \perp d$ und $\gamma_2 \perp d,$ ist $\gamma_1 \parallel \gamma_2$.

Die parallelen Ebenen γ_1 und γ_2 werden von α in den parallelen Geraden $AD \parallel BF$ geschnitten und von β in $AE \parallel BG$. Folglich sind die Schenkel der $\sphericalangle DAE$ und $\sphericalangle FBG$ paarweise parallel und die Winkel kongruent.

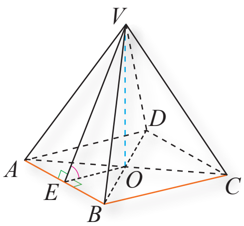


Definition 2. Den Winkel, der entsteht, wenn ein Flächenwinkel mit einer Ebene senkrecht auf die Kante des Flächenwinkels geschnitten wird, nennt man *„ebenen Winkel des Flächenwinkels"*.
Definition 3. Das Maß eines Flächenwinkels ist gleich mit dem Maß seiner ebenen Winkel.



Bemerkung. **1)** Aus *Satz 1* folgt, dass das Maß des ebenen Winkels eines Flächenwinkels nicht von der Wahl des Punktes abhängt, in dem die senkrechte Ebene auf die Kante errichtet wird.
2) Die Halbgeraden, die den ebenen Winkel eines Flächenwinkels bilden, stehen senkrecht zu der Kante des Flächenwinkels.
Laut dieser Bemerkung können wir den ebenen Winkel eines Flächenwinkels wie folgt konstruieren:
a) Wir wählen einen Punkt auf der Kante des Flächenwinkels.
b) In diesem Punkt zeichnen wir in jeder Fläche des Flächenwinkels je eine senkrechte Halbgerade zu seiner Kante.
c) Die zwei Halbgeraden bilden den ebenen Winkel des Flächenwinkels.

1. Anwendung: **a)** Konstruiert die ebenen Winkel der Flächenwinkel, gebildet von der Grundfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide und ihren Seitenflächen. **b)** Berechnet das Maß dieser Flächenwinkel, wenn die Höhe der Pyramide halb so groß wie ihre Grundkante ist.



Lösung. **a)** Für den Flächenwinkel, gebildet von den Halbebenen $(AB, C$ und $(AB, V$ wählen wir E, die Mitte der Strecke AB. Weil die Dreiecke ABV und ABO gleichschenklig sind, gilt $VE \perp AB$, $EO \perp AB$. Somit ist $\sphericalangle VEO$ der ebene Winkel des Flächenwinkels.
b) Laut Voraussetzung ist $VO = \dfrac{1}{2}AB$ und $ABCD$ ist ein Quadrat. $OE = \dfrac{1}{2}AB$ (Bestimmungshöhe des Quadrates). Die Katheten des Dreiecks ΔVOE mit dem rechten Winkel O $(VE \perp EO)$ sind kongruent. Deshalb ist $\sphericalangle VEO = 45°$.
Für die sich schneidenden Ebenen α und β, $\alpha \cap \beta = d$, definieren wir *das Maß* ihres Winkels wie folgt:

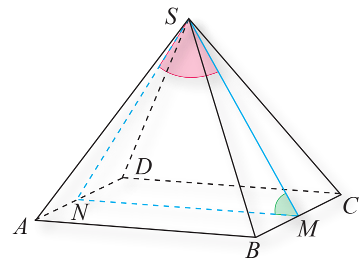
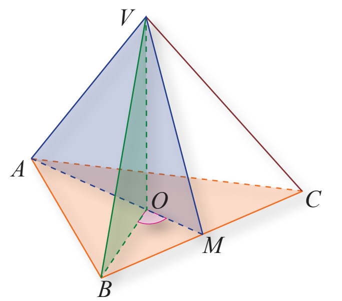
Definition 4. Das Maß des Winkels gebildet von zwei nicht parallelen Ebenen ist das kleinste Maß der ebenen Winkel der von ihnen bestimmten Flächenwinkel.

Bemerkung. Zwei sich schneidende Ebenen bestimmen zwei Paare von Flächenwinkeln mit gleichem Maß bzw. zwei Paare von supplementären Flächenwinkeln.
Laut Vereinbarung ist *das Maß des Winkels zwischen zwei parallelen Ebenen* 0°.
In einer der vorigen Lektionen haben wir behauptet, zwei Ebenen seien senkrecht, falls in einer eine Gerade eingeschlossen ist, die senkrecht zu der Schnittgeraden der beiden Ebenen steht. Daraus folgt, dass das Maß des Flächenwinkels senkrechter Ebenen 90° ist. Also ist das Maß des Winkels gebildet von senkrechten Ebenen 90°.
Schlussfolgerung. *Das Maß des Winkels* zweier Ebenen liegt zwischen 0° und 90°.
Nun können wir den Begriff *senkrechte Ebenen* anders definieren.

Definition 5. Zwei Ebenen sind senkrecht, wenn das Maß ihres Winkels 90° ist.

Bemerkung. Die folgende Zusammenfassung hilft beim Lösen von Aufgaben.
1. Zwei sich schneidende Ebenen sind senkrecht zueinander, wenn sie rechte Flächenwinkel bilden.
2. Wenn eine Ebene eine Gerade, die senkrecht auf eine andere Ebene steht, einschließt, dann sind die zwei Ebenen senkrecht.
3. Wenn zwei Ebenen senkrecht sind und in der einen eine Gerade eingeschlossen ist, die senkrecht auf die Schnittgerade steht, dann ist diese Gerade auch auf die andere Ebene senkrecht.
4. Wenn zwei Ebenen senkrecht sind und durch einen Punkt der einen Ebene eine senkrechte Gerade auf die zweite Ebene errichtet wird, dann ist die Gerade in der ersten Ebene eingeschlossen.

MINITEST Wählt die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort ist richtig.

1. *SABCD* ist eine regelmäßige vierseitige Pyramide und die Punkte *M*, *N* sind die Mitten der Kanten *BC* bzw. *AD*.			
a) Rot markiert ist in der Zeichnung der Winkel der Ebenen:			
A. (*SAD*) und (*SAB*)	B. (*SAD*) und (*SBC*)	C. (*SAD*) und (*SCD*)	
b) Grün markiert ist in der Zeichnung der Winkel der Ebenen:			
A. (*SBC*) und (*SCD*)	B. (*SBC*) und (*SAB*)	C. (*SBC*) und (*ABD*)	
2. *VABC* ist eine regelmäßige dreiseitige Pyramide, *VO* ist die Höhe und $AO \cap BC = \{M\}$.			
a) Der ebene Winkel des Flächenwinkels der Halbebenen (*OV*, *M* und (*VO*, *B* ist:			
A. $\sphericalangle VOA$	B. $\sphericalangle VOB$	C. $\sphericalangle BOM$	
b) Der ebene Winkel des Flächenwinkels der Halbebenen (*BC*, *A* und (*BC*, *V* ist:			
A. $\sphericalangle VBA$	B. $\sphericalangle VMA$	C. $\sphericalangle VCA$	
c) Das Maß des Winkels der Ebenen (*VOA*) und (*VOB*) ist:			
A. 60°	B. 90°	C. 120°	

Aufgaben

1 Zeichnet ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma *ABCDEF*.

a) Identifiziert die Flächenwinkel der folgenden Flächenpaare: (*BCFE*) und (*ACFD*), (*ABED*) und (*BCFE*).

b) Markiert auf der Zeichnung je einen ebenen Winkel eines jeden Flächenwinkels.

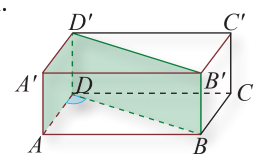
2 **a)** Zeichnet die Rechtecke *ABCD* und *CDEF* in verschiedenen Ebenen und identifiziert einen ebenen Winkel ihres Flächenwinkels.

b) Falls das Dreieck *ADE* gleichseitig ist, bestimmt das Maß des Winkels der Ebenen der Rechtecke.

3 *ABCDEFGH* ist ein Würfel. Berechnet die Maße der Winkel der Ebenen:

a) (*ABCD*) und (*BCGF*) **b)** (*ABE*) und (*ADH*)
c) (*ADH*) und (*EFG*) **d)** (*ABG*) und (*ABH*)
e) (*ABD*) und (*ADF*) **f)** (*ACG*) und (*BDF*)

4 Im Quader $ABCDA'B'C'D'$ sind $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm, $AA' = 2\sqrt{3}$ cm.



a) Findet zwei ebene Winkel des Flächenwinkels der Halbebenen (*DD'*, *A* und (*DD'*, *B*).

b) Berechnet das Maß des Winkels der Ebenen (*DD'A*) und (*DD'B*).

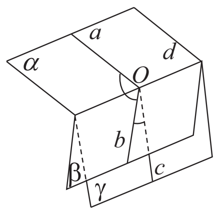
5 Die Grundkante der regelmäßigen vierseitigen Pyramide $SABCD$ ist 10 cm und die Seitenkante $5\sqrt{5}$ cm.

a) Identifiziert die Flächenwinkel der folgenden Flächenpaare: SBC und $ABCD$; SAD und $ABCD$; SBC und SAD.

b) Bestimmt das Maß des Winkels der Ebenen (SAD) und (ABC).

c) Bestimmt das Maß des Winkels der Ebenen (SAD) und (SBC).

6 In der Abbildung ist $\sphericalangle(a, b)$ ein ebener Winkel des Flächenwinkels (α, β) und $\sphericalangle(b, c)$ ist ein ebener Winkel des Flächenwinkels (β, γ), sodass $\sphericalangle(a, b) \le 45°$, $\sphericalangle(b, c) \le 45°$.



a) Beweist, dass die Halbgeraden a, b, c komplanar sind.

b) Beweist, dass das Maß des Flächenwinkels (α, γ) die Summe der Maße der Flächenwinkel (α, β) und (β, γ) ist.

7 $ABCD$ ist ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge a.

a) Beweist, dass alle Flächenwinkel das gleiche Maß haben.

b) Berechnet den Kosinus des Winkels der Ebenen (ABC) und (BCD).

8 Die Grundkante des regelmäßigen Prismas $ABCDEF$ ist 36 cm.

a) Beweist, dass $DB = DC$.

b) Wenn das Maß des Winkels der Ebenen (DBC) und (ABC) 60° ist, berechnet die Höhe des Prismas.

9 $ABCDEF$ ist ein dreiseitiges regelmäßiges Prisma, $AB = 18$ cm und $AD = 9$ cm. Berechnet das Maß des Winkels der Ebenen (DBC) und (ABC).

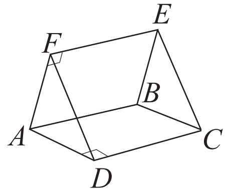
10 Im dreiseitigen regelmäßigen Prisma $ABCA'B'C'$ ist die Grundkante 16 cm, DE ist Mittellinie des Dreiecks ABC, $D \in AB$, $E \in AC$ und das Maß des Winkels der Ebenen $(A'DE)$ und (ABC) ist 60°.

a) Zeichnet das Prisma und die Ebene $(A'DE)$.

b) Zeigt, dass $AA' = 12$ cm.

c) Berechnet das Maß des Winkels der Ebenen $(A'DE)$ und $(B'C'ED)$.

11 Die Quadrate $ABCD$ und $ABEF$ liegen in verschiedenen Ebenen und bilden einen Flächenwinkel von 70°.



a) Markiert einen ebenen Winkel dieses Flächenwinkels.

b) Markiert den Winkel der Ebenen (ABC) und (DCE).

c) Berechnet das Maß des Winkels der Ebenen (ABC) und (DCE).

12 Das Quadrat $ABCD$ und das rechtwinklige Trapez $ABMN$, mit $AB \parallel MN$ und $\sphericalangle BAN = 90°$, liegen in verschiedenen Ebenen und bestimmen einen Flächenwinkel vom Maß 30°. Falls $AB = AN = 12$ cm, berechnet das Maß:

a) des Winkels der Ebenen (ABC) und (CDN);

b) des Winkels der Ebenen (ABN) und (CDM).

13 Der Flächenwinkel, bestimmt von den Halbebenen der Quadrate $ABPM$ und $ABQN$, hat das Maß 60°.

a) Beweist, dass $AMNBPQ$ ein regelmäßiges Prisma ist, dessen Kanten kongruent sind.

b) Berechnet den Tangens des Winkels der Ebenen (APQ) und (BPQ).

14 $VABCD$ ist eine regelmäßige vierseitige Pyramide, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind. $AB = 24$ cm. Berechnet:

a) den Kosinus des Winkels der Ebenen (ABC) und (VBC).

b) den Sinus des Winkels der Ebenen (VAC) und (VBC).

15 Zeichnet einen Würfel $ABCDEFGH$. Beweist, dass:

a) $(ABC) \perp (BCF)$

b) $(ADH) \perp (CDG)$

c) $(ACG) \perp (BDF)$

16 Das gleichseitige Dreieck PAB und das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck QAB, $\sphericalangle AQB = 90^\circ$, liegen in verschiedenen Ebenen. $AB = PQ = 30$ cm und M ist die Mitte der Seite AB.

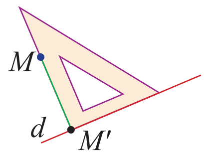
a) Berechnet das Maß des Winkels PMQ.

b) Beweist, dass $(PAB) \perp (QAB)$.

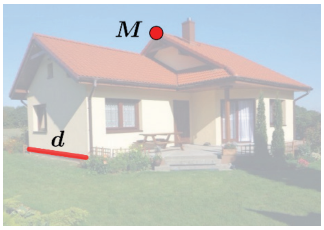
6 Der Lehrsatz der drei Senkrechten

L1. Der Lehrsatz der drei Senkrechten. Berechnen des Abstandes von einem Punkt zu einer Geraden

Wir verstehen anhand von Beispielen

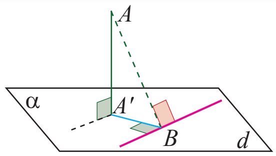


In der Ebene konstruieren wir die Senkrechte aus einem Punkt auf eine Gerade mithilfe des Zeichendreiecks. Dafür müssen die Abstände genügend klein oder die Zeichengeräte genügend groß sein.



Im Raum ist es schwieriger. In der Praxis sind die Abstände meistens zu groß, um sie mit Zeichengeräten zu konstruieren, zum Beispiel der Abstand vom Dach eines Hauses zu einer Geraden am Fundament.
Mithilfe *des Lehrsatzes der drei Senkrechten* können wir im Raum den Abstand von einem Punkt zu einer Geraden bestimmen.

Der Lehrsatz der drei Senkrechten. Sei α eine Ebene, $A \notin \alpha$ ein Punkt und $d \subset \alpha$ eine Gerade.
Wenn $AA' \perp \alpha$, $A' \in \alpha$, und $A'B \perp d$, $B \in d$, dann ist $AB \perp d$.

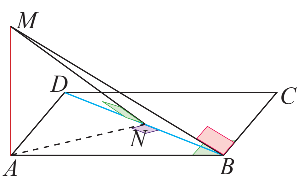


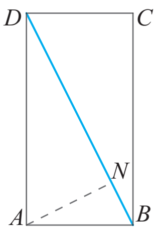
Beweis. Da $AA' \perp \alpha$, ist die Gerade AA' senkrecht *zu jeder Gerade der Ebene*. Also auch $AA' \perp d$ oder $d \perp AA'$. Aber $d \perp A'B$. d ist senkrecht zu zwei sich schneidenden Geraden AA' und $A'B$, also ist d senkrecht auf die *von ihnen bestimmte Ebene*. Da $d \perp (A'AB)$ und $AB \subset (A'AB)$, ist $d \perp AB$.

Anwendungen

1. Anwendung: Auf die Ebene des Rechtecks $ABCD$, $AB = 5$, $AD = 12$, wird in A die Senkrechte AM errichtet, sodass $AM = 12$.

a) Berechnet den Abstand von M zu BC.
b) Konstruiert die Senkrechte aus M auf die Diagonale BD.
c) Berechnet den Abstand von M zur Diagonale BD.





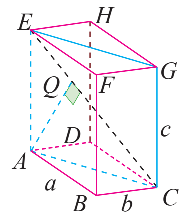
Lösung. **a)** Laut Voraussetzung sind $MA \perp (ABCD)$, $AB \perp BC$ und $BC \subset (ABCD)$. Laut *Lehrsatz der drei Senkrechten* ist $MB \perp BC$. Folglich ist $d(M, BC) = MB$. Wir wenden den Lehrsatz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck ABM an und erhalten $MB = \sqrt{AM^2 + AB^2} = 13$.
b) Wenn $AN \perp BD$, $N \in BD$, erfüllen $MA \perp (ABCD)$, $AN \perp BD$ und $BD \subset (ABCD)$ die Voraussetzung des Lehrsatzes der drei Senkrechten, also gilt die Behauptung $MN \perp BD$.

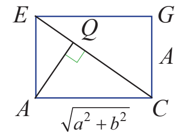
c) Im rechtwinkligen Dreieck ABD ist $AN = \dfrac{AB \cdot AD}{BD}$ die Höhe aus A und laut Lehrsatz des Pythagoras $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 13$. Also $AN = \dfrac{60}{13}$.

Im rechtwinkligen Dreieck AMN, $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \dfrac{12}{13}\sqrt{194}$.

2. Anwendung: $ABCDEFGH$ ist ein Quader, $AB = a$, $BC = b$ und $AE = c$.
Berechnet die Abstände von der Ecke A zu den Diagonalen des Quaders.

Lösung: Die Diagonalen des Quaders sind: GA, EC, BH, DF. Wir suchen die Abstände von A zu BH, DF und EC.
Die Diagonale EC des Quaders ist auch Diagonale des Rechtecks $ACGE$, des Diagonalschnitts. Die Seiten des Rechtecks sind $EA = c$ und $AC = \sqrt{a^2+b^2}$.





Das Dreieck AEC ist rechtwinklig und $d(A, EC) = \dfrac{c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Der Abstand von A zu den Diagonalen DF und BH wird mithilfe des *Lehrsatzes der drei Senkrechten* bestimmt.
DF und BH gehören zum Diagonalschnitt $(DBFH)$.
$HD \perp (ABCD)$ und $HD \subset (DBFH)$, also $(DBFH) \perp (ABCD)$, wobei die Gerade DB gemeinsam ist.
Die Senkrechte AR aus A auf BD ist senkrecht auf $(DBFH)$, also $AR \perp (DBFH)$.
Wir konstruieren $RT \perp BH$, $T \in BH$. Weil $AR \perp (DBFH)$, $BH \subset (DBFH)$ und $RT \perp BH$, gilt laut Lehrsatz der drei Senkrechten $d(A, BH) = AT$.

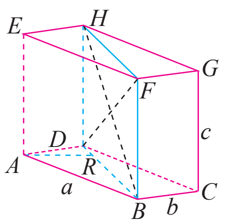
In der Ebene $(ABCD)$ ist $AR = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und laut Kathetensatz $DR = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $BR = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

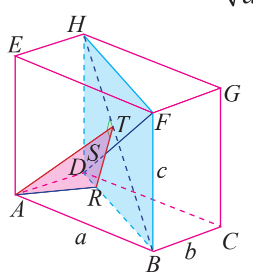
Die rechtwinkligen Dreiecke BTR und BDH sind ähnlich (WW), also $RT = \dfrac{ca^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

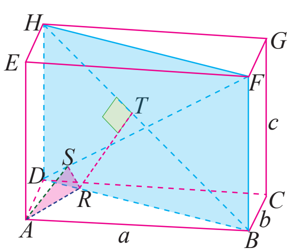
Da $AR \perp (DBFH)$, folgt $AR \perp RT$. Laut Lehrsatz des Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck ART

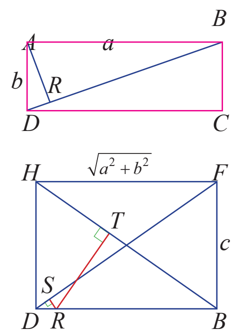
$$d(A,BH) = AT = \frac{a\sqrt{b^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Ähnlich überlegt man, dass $AR \perp (DBFH)$, $FD \subset (DBFH)$ und $RS \perp FD$ und laut Lehrsatz der drei Senkrechten, $d(A, FD) = AS$. Man erhält $d(A,DF) = AS = \dfrac{b\sqrt{b^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.







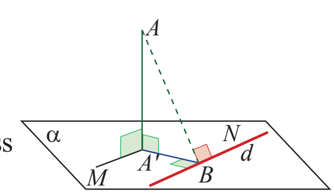


Fürs Portfolio

Löst die **2. Anwendung,** falls $a = 12$, $b = 5$, $c = 4$.

Bemerkung: Die geometrische Darstellung, die den Lehrsatz der drei Senkrechten erläutert, dient auch als Modell für die *Konstruktionstechnik* einer Senkrechten aus einem Punkt auf eine Gerade (im Raum).

Kommentar. Warum der Name *Lehrsatz der* ***drei*** *Senkrechten*?
Die Gerade $AA' \perp \alpha$ bildet mit mindestens zwei sich schneidenden Geraden rechte Winkel. $\sphericalangle AA'M = 90°$ und $\sphericalangle AA'B = 90°$. Und die Gerade $AB \perp d$, $\sphericalangle A'BN = 90°$.
In der Voraussetzung gibt es drei rechte Winkel, die den Namen rechtfertigen. Die Folgerung ist, dass es einen vierten rechten Winkel gibt $\sphericalangle ABN = 90°$. Der Ansatz, dass es vier rechte Winkel gibt, hilft, die Kehrsätze des Lehrsatzes zu finden. Da werden andere drei rechte Winkel vorausgesetzt und es folgt, dass der vierte recht ist.



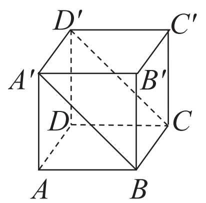
Aufgaben

1 Die Gerade PA ist senkrecht auf die Ebene des Quadrates $ABCD$. Beweist, dass:
a) $PB \perp BC$ **b)** $PD \perp CD$
c) Wenn $AC \cap BD = \{O\}$, dann $PO \perp BD$.

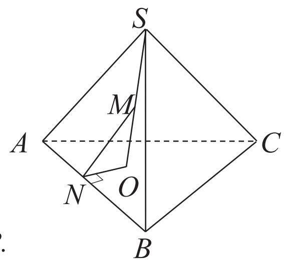
2 Auf die Ebene des Rhombus $MNPQ$ errichtet man die Senkrechte AM und $MP \cap NQ = \{O\}$. Beweist, dass $AO \perp NQ$.

3 Die Gerade DA ist senkrecht auf die Ebene des gleichschenkligen Dreiecks ABC, $AB \equiv AC$.
a) E ist die Mitte der Seite BC. Beweist, dass $DE \perp BC$.
b) Falls $AB = 20$ cm, $BC = 32$ cm und $DA = 5$ cm, berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks DBC.

4 $ABCDA'B'C'D'$ ist der dargestellte Würfel.
a) Beweist, dass $A'B \perp BC$.
b) Beweist, dass $A'D'CB$ ein Rechteck ist.



5 Die Grundkante AB der regelmäßigen dreiseitigen Pyramide $SABC$ ist 24 cm und die Höhe $SO = 8\sqrt{3}$ cm. M ist die Mitte der Strecke SO, N ist die Mitte der Strecke AB.
a) Beweist, dass $MN \perp AB$.
b) Berechnet die Längen von MN und MA.



6 MAB ist ein rechtwinkliges Dreieck, $\sphericalangle AMB = 90^\circ$, $MA = 16$ cm, $AB = 20$ cm. Auf der Senkrechten in M auf die Dreieckebene liegt der Punkt N, sodass $MN = 7{,}2$ cm. Berechnet den Abstand von N zur Geraden AB.

7 Auf die Ebene des Quadrates $CDEF$ mit der Seitenlänge 9 cm errichtet man die Senkrechte CM, $CM = 12$ cm. Berechnet die Abstände von M zu:
a) den Seiten des Quadrates;
b) den Diagonalen des Quadrates.

8 Im Eckpunkt A des gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge a wird die Senkrechte PQ auf die Ebene des Dreiecks errichtet, $PA = QA = \dfrac{3a}{2}$, und D ist die Mitte der Strecke BC.
a) Beweist, dass $PD \perp BC$.
b) Beweist, dass $BC \perp (DPQ)$.
c) Berechnet den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks DPQ.

9 Im rechtwinkligen Dreieck ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, ist O die Mitte der Seite BC und $OP \perp (ABC)$, $OP = 4$ cm. Berechnet den Abstand vom Punkt P zu den Dreieckseiten.

10 Die Gerade MA ist senkrecht auf die Ebene des Rhombus $ABCD$ und $MA = AB = BD = 6$ cm. Berechnet:
a) den Abstand vom Punkt M zur Diagonale BD;
b) die Summe der Abstände vom Punkt M zu den Seiten des Rhombus.

11 $ABCDEFGH$ ist ein Würfel, M, N, P sind die Mitten der Kanten EH, AD bzw. BC und O die Mitte der Strecke MP. Beweist, dass:
a) $MP \perp BC$; **b)** $MP \perp EH$;
c) $AD \perp (MNP)$; **d)** $AO \perp MP$.

12 $ABCD$ ist ein Trapez, $AB \parallel CD$, $AD = BC = CD = 12$ cm, $AB = 24$ cm. EA ist senkrecht auf die Ebene des Trapezes, $EA = 12$ cm. Berechnet die Abstände vom Punkt E zu den Geraden CD bzw. BC.

13 Auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle(xOy)$ liegt der Punkt $A \neq O$ und $AA' \perp (xOy)$. Beweist, dass die Abstände vom Punkt A' zu den Schenkeln des Winkels gleich sind.

14 $VABCD$ ist eine vierseitige Pyramide, deren Kanten alle kongruent sind. Der Punkt E ist die Mitte von VA und VO ist die Höhe der Pyramide, $VO = 8\sqrt{2}$ cm. Berechnet den Abstand von E zu den Diagonalen der Grundfläche der Pyramide.

15 Die Geraden AD und BE sind senkrecht auf die Ebene des Dreiecks ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$. $AD \equiv BE$.
a) Beweist, dass das Dreieck CDE rechtwinklig ist.
b) Falls $AC = 3\sqrt{7}$ cm, $CD = 12$ cm und $EC = 1{,}5$ dm, berechnet den Abstand:
b_1) vom Punkt B zur Ebene (ADC);
b_2) vom Punkt B zur Geraden DC.

16 Der Punkt I ist der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC. Auf der Senkrechten in I auf die Ebene des Dreiecks sei ein Punkt M, $M \notin (ABC)$. Beweist, dass:
$d(M, AB) = d(M, BC) = d(M, AC)$.

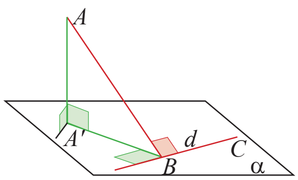
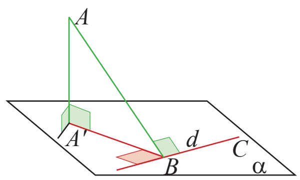
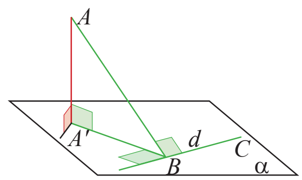
L2. Die Kehrsätze des Lehrsatzes der drei Senkrechten. Berechnen des Abstandes zwischen zwei parallelen Ebenen

Wir erinnern uns!

Ausgehend von einem Lehrsatz, den wir einen direkten Satz nennen, können wir eine andere Aussage formulieren, in der die Voraussetzung die Behauptung des direkten Satzes enthält, und die Behauptung der neuen Aussage die Voraussetzung oder ein Teil der Voraussetzung des direkten Satzes ist. Eine solche Aussage wird als Kehrsatz des direkten Satzes bezeichnet.
Der Kehrsatz eines Satzes kann wahr oder falsch sein. Wenn er wahr ist, dann wird er als Kehrsatz des Lehrsatzes bezeichnet.

Wir verstehen anhand von Beispielen

Ausgehend vom Lehrsatz der drei Senkrechten können wir zwei Kehrsätze formulieren, die beide wahr sind, also zwei *Kehrsätze des Lehrsatzes.*
Gegeben sind eine Ebene α, ein Punkt $A \notin \alpha$ und eine Gerade $d \subset \alpha$. Mithilfe der unteren Zeichnungen, wo $A' \in \alpha$, $B, C \in d$, werden wir die Kehrsätze des Lehrsatzes der drei Senkrechten formulieren.

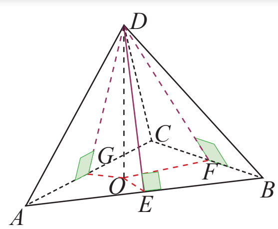
	Lehrsatz	1. Kehrsatz	2. Kehrsatz
Darstellung			
Voraussetzung	$AA' \perp \alpha$ und $A'B \perp d$	$AA' \perp \alpha$ und $AB \perp d$	$A'B \perp d$, $AB \perp d$, $AA' \perp A'B$
Behauptung	$AB \perp d$	$A'B \perp d$	$AA' \perp \alpha$

Lehrsatz 1. (1. Kehrsatz des Lehrsatzes der drei Senkrechten)
Gegeben sind eine Ebene α, eine Gerade $d \subset \alpha$ und ein Punkt $A \notin \alpha$. Wenn $AA' \perp \alpha$, $A' \in \alpha$, $B \in d$, sodass $AB \perp d$, dann $A'B \perp d$.

Beweis. Um zu beweisen, dass $A'B \perp d$, suchen wir eine Ebene, die eine der Geraden einschließt und zu der anderen Geraden senkrecht steht.
$A'B \subset (AA'B)$. Wir beweisen, dass die Gerade d senkrecht auf $(AA'B)$ ist. Laut Voraussetzung ist $d \perp AB$. Es genügt zu zeigen, dass sie auch auf AA' senkrecht ist. Da $AA' \perp \alpha$ und $d \subset \alpha$, ist $AA' \perp d$ auch $d \perp AA'$. Weil $d \perp AB$ und $d \perp AA'$, ist $d \perp (AA'B)$. Aber $A'B \subset (AA'B)$, also folgt, dass $d \perp A'B$.

1. Anwendung: Alle Seitenflächen mit dem Eckpunkt D des Tetraeders $DABC$ mit der Grundfläche ABC sind gleichschenklige Dreiecke. Beweist, dass die Höhe des Tetraeders den Mittelpunkt des Umkreises der Grundfläche enthält.

Lösung. Die Höhe D schneidet die Grundfläche (ABC) in O. Seien E, F, G die Mitten der Seiten AB, BC bzw. AC. Im gleichschenkligen Dreieck ABD ist DE Seitenhalbierende, also auch Höhe. Deshalb ist $DE \perp AB$. Die Voraussetzung des 1. Kehrsatzes des Lehrsatzes der drei Senkrechten ist erfüllt: $DO \perp (ABC)$, $AB \subset (ABC)$, $DE \perp AB$. Folglich: $OE \perp AB$. Analog: $OF \perp BC$ und $OF \perp AC$, also ist O der Mittelpunkt des Umkreises der Grundfläche.



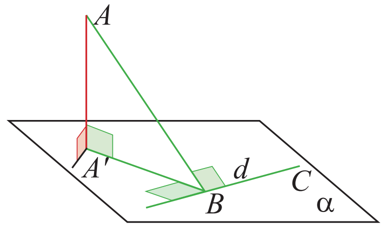
Fürs Portfolio

1) Formuliert und beweist eine ähnliche Anwendung für eine vierseitige Pyramide, deren Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke sind.

2) Beweist, dass ein Tetraeder, in dem drei seiner Höhen die entsprechenden Grundflächen im Umkreismittelpunkt schneiden, ein regelmäßiges Tetraeder ist.

Lehrsatz 2. (2. Kehrsatz des Lehrsatzes der drei Senkrechten) Gegeben sind α, eine Ebene, $d \subset \alpha$, eine Gerade, $A \notin \alpha$ und $A' \in \alpha$, Punkte. Wenn $A'B \perp d$, $B \in d$, $AB \perp d$ und $AA' \perp A'B$, dann $AA' \perp \alpha$.

Beweis Wir müssen zeigen, dass AA' senkrecht steht zu zwei sich schneidenden Geraden aus α. Laut Voraussetzung sind $AA' \perp A'B$ und $A'B \subset \alpha$. Es genügt zu beweisen, dass AA' senkrecht steht auf eine zweite Gerade der Ebene α.



Wir wollen beweisen, dass AA' senkrecht zu d ist. Dafür suchen wir eine Ebene, die eine Gerade einschließt und zu der anderen senkrecht steht. Wir wählen $(AA'B) \supset AA'$ und zeigen, dass $d \perp (AA'B)$. Laut Voraussetzung sind $d \perp A'B$, $d \perp AB$, $A'B \subset (AA'B)$, $AB \subset (AA'B)$; also $d \perp (AA'B)$ und somit auch $d \perp AA'$.

Wir haben gezeigt, dass $AA' \perp A'B$, $A'B \subset \alpha$, $AA' \perp d$, $d \subset \alpha$, folglich $AA' \perp \alpha$.

Anwendungen

Zusammenfassung.

1) In der Aussage „eine Gerade ist senkrecht auf eine Ebene“ sind eigentlich unendlich viele Voraussetzungen enthalten, da die Gerade dann zu jeder Geraden der Ebene senkrecht steht. Wir können deshalb eine günstige Wahl der Geraden in der Ebene treffen.

2) Wenn es eine Ebene gibt, die eine Gerade einschließt und auf die andere Gerade senkrecht ist, dann sind die zwei Geraden senkrecht.

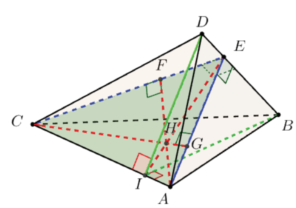
3) Damit eine Gerade senkrecht ist auf eine Ebene, genügt es, dass sie zu zwei sich schneidenden Geraden der Ebene senkrecht steht.

2. Anwendung: Im Tetraeder $ABCD$ schneiden sich die Höhe aus A des Dreiecks ABD und die Höhe aus C des Dreiecks CBD im Punkt E, $E \in BD$.

a) Zeigt, dass sich die Höhen des Tetraeders aus A und C schneiden.

b) Zeigt, dass sich die Höhen aus B und D der Dreiecke BAC bzw. DAC in einem Punkt auf AC schneiden.

Lösung. a) $AE \perp BD$ und $CE \perp BD$. Wir errichten die Senkrechte $AF \perp CE$, um die Voraussetzung des zweiten Kehrsatzes des Lehrsatzes der drei Senkrechten zu erhalten. Dann gilt auch die Behauptung $AF \perp (CBD)$, also ist AF die Höhe des Tetraeders aus A. Analog sei $CG \perp AE$, $G \in AE$, also $CG \perp (ABD)$, und somit ist CG die Höhe des Tetraeders aus C.

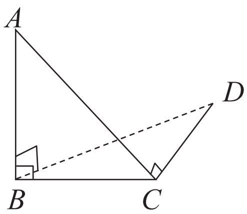


Da AF und CG Höhen des Dreiecks CEA sind, schneiden sie sich in H, dem Orthozentrum dieses Dreiecks. Folglich schneiden sich die Höhen des Tetraeders aus A und C.

b) Weil sich die Höhen im ΔCEA schneiden, wird EH die Gerade AC in I schneiden und zu ihr senkrecht sein. Wir zeigen, dass $DI \perp AC$. Aus $DE \perp EA$ und $DE \perp EC$ folgt $DE \perp (CEA)$, $AC \subset (CEA)$ und $EI \perp AC$. Laut Lehrsatz der drei Senkrechten ist $DI \perp AC$. Analog $BE \perp (ACE)$, $AC \subset (CEA)$, $EI \perp AC$, also $BI \perp AC$. Das heißt, dass sich die Höhen aus B und D der Dreiecke DAC bzw. BAC in I schneiden.

Aufgaben

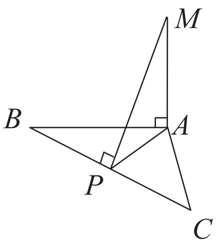
1 Die Punkte A, B, C, D sind nicht komplanar, $AB \perp (BCD)$ und $AC \perp CD$.



a) Beweist, dass BCD ein rechtwinkliges Dreieck ist.

b) Wenn $d(A, (BCD)) = 8$ cm und $d(A, CD) = 10$ cm, berechnet $d(B, CD)$.

2 In der Abbildung sind $MA \perp (ABC)$ und $MP \perp BC$, $P \in BC$, $MA = a - b$, $MP = a + b$, $a > b > 0$. Berechnet die Höhe aus A des Dreiecks ABC.



3 Auf die Ebene des Rechtecks $ABCD$ wird im Mittelpunkt O eine Senkrechte errichtet und auf ihr ein Punkt M angenommen.

a) Beweist, dass $d(M, AB) = d(M, CD)$ und $d(M, AD) = d(M, BC)$.

b) Wenn $MO = 12$ cm und die Abstände von M zu den Seiten des Rechtecks 13 cm bzw. 15 cm sind, berechnet den Umfang des Rechtecks.

4 Die Gerade MA ist senkrecht auf die Ebene des Trapezes $ABCD$, $AB \parallel CD$. $d(M, CD) = MD$.

a) Beweist, dass das Trapez $ABCD$ rechtwinklig ist.

b) Wenn $AB = 8$ cm, $CD = 4$ cm, $MD = 8$ cm, $MA = 4\sqrt{3}$ cm, berechnet:

b_1) das Maß des spitzen Winkels des Trapezes;

b_2) den Abstand von M zur Geraden BC.

5 Die Gerade SA ist senkrecht auf die Ebene des Parallelogramms $ABCD$. $SA = AD = 8$ cm und $d(S, BC) = SC = 16$ cm.
Berechnet die Summe der Abstände von S zu den Seiten des Parallelogramms.

6 xOy ist ein Winkel, P ein Punkt außerhalb der Ebene des Winkels und $PA \perp (xOy)$, $A \in Int \sphericalangle xOy$. Wenn $d(P,Ox) = d(P,Oy)$, beweist, dass A auf der Winkelhalbierenden des Winkels xOy liegt.

7 Das rechtwinklige Dreieck ABC, $\sphericalangle ABC = 90°$, und das Rechteck $BCDE$ liegen in verschiedenen Ebenen und $AC \perp CD$.
Beweist, dass $AB \perp (BCD)$.

8 Die Punkte S, A, B, C sind nicht komplanar und Dreieck ABC ist gleichseitig mit der Seitenlänge 18 cm. $SB = SC = 15$ cm, $SA = 12$ cm und M ist die Mitte der Strecke BC.

a) Berechnet die Länge der Strecke SM.

b) Berechnet den Abstand vom Punkt S zu (ABC).

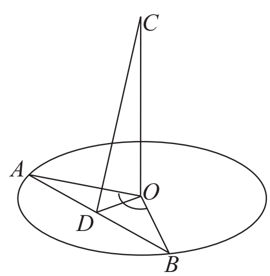
c) Beweist, dass die Höhe der Pyramide und die Höhe aus A des Dreiecks ABC einander schneiden.

9 Die Halbgeraden OA, OB, OC sind paarweise senkrecht zueinander, $OA = OB = OC$ und M ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC.

a) Beweist, dass $OM \perp (ABC)$.

b) Wenn $OA = 4$ cm, berechnet den Abstand von O zu (ABC).

10 Die Punkte A, B gehören zum Kreis $\mathcal{C}(O, R)$, sodass $\overset{\frown}{AB} = 120°$ und $AB = 10\sqrt{3}$ cm, Punkt C liegt außerhalb der Ebene des Kreises, Dreieck ABC ist gleichseitig und $CO = 10\sqrt{2}$ cm.



a) Berechnet den Radius des Kreises.

b) Wenn D die Mitte der Strecke AB ist, bestimmt die Art des Dreiecks COD.

c) Beweist, dass CO senkrecht ist auf (AOB).

d) Wenn M die Projektion von O auf die Gerade CD ist, beweist, dass $OM \perp (ABC)$.

11 Die Gerade PA ist senkrecht auf die Ebene des Dreiecks ABC und $PB = 4$ cm, $PC = 4\sqrt{2}$ cm, $BC = 4$ cm.

a) Beweist, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

b) Wenn $PA = 2\sqrt{2}$ cm, berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

SELBSTBEWERTUNGSTEST

Von Amts wegen: 10 Punkte

1. Teil

Gegeben ist das regelmäßige dreiseitige Prisma $ABCA_1B_1C_1$, $AB = 4$ cm, $AA_1 = 6$ cm, und die Punkte M, N, die Mitten der Kanten AB bzw. A_1C_1.

Bestimmt den Wahrheitswert der folgenden Sätze.

5P **1.** Das Maß des Winkels der Ebenen (C_1AB) und (ABC) beträgt 45°.

5P **2.** Für jeden Punkt P der Kante CC_1 ist das Dreieck PAB gleichschenklig.

5P **3.** Die Gerade A_1M ist parallel zur Ebene (BCN).

5P **4.** $A_1M \cdot \sqrt{3} = BN \cdot \sqrt{2}$.

2. Teil

ABC ist ein rechtwinkliges Dreieck, $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$ cm, AD seine Höhe, $AD = \sqrt{3}$ cm und G sein Schwerpunkt. Die Gerade PA ist senkrecht auf die Ebene des Dreiecks, $PA = 1$ cm.

Ordnet jedem Buchstaben der Spalte A eine Ziffer der Spalte B zu, sodass wahre Sätze entstehen.

Für jede richtige Zuordnung gibt es 5 Punkte.

A	B
a) $d(P, BC)$	1) $\sqrt{3}$ cm 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm
b) PG	3) 1 cm 4) 2 cm
c) $d(C, (PAD))$	5) $\frac{5}{3}$ cm
d) $d(A, (PBC))$	6) $2\sqrt{3}$ cm

3. Teil *Schreibt die vollständigen Lösungen.*

1. $ABCDEFGH$ ist ein Quader mit den Dimensionen $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6$ cm und $AE = 6\sqrt{3}$ cm.

5P **a)** Zeichnet die Figur.

10P **b)** Berechnet die Länge der Projektion der Strecke AH auf die Ebene (BDH).

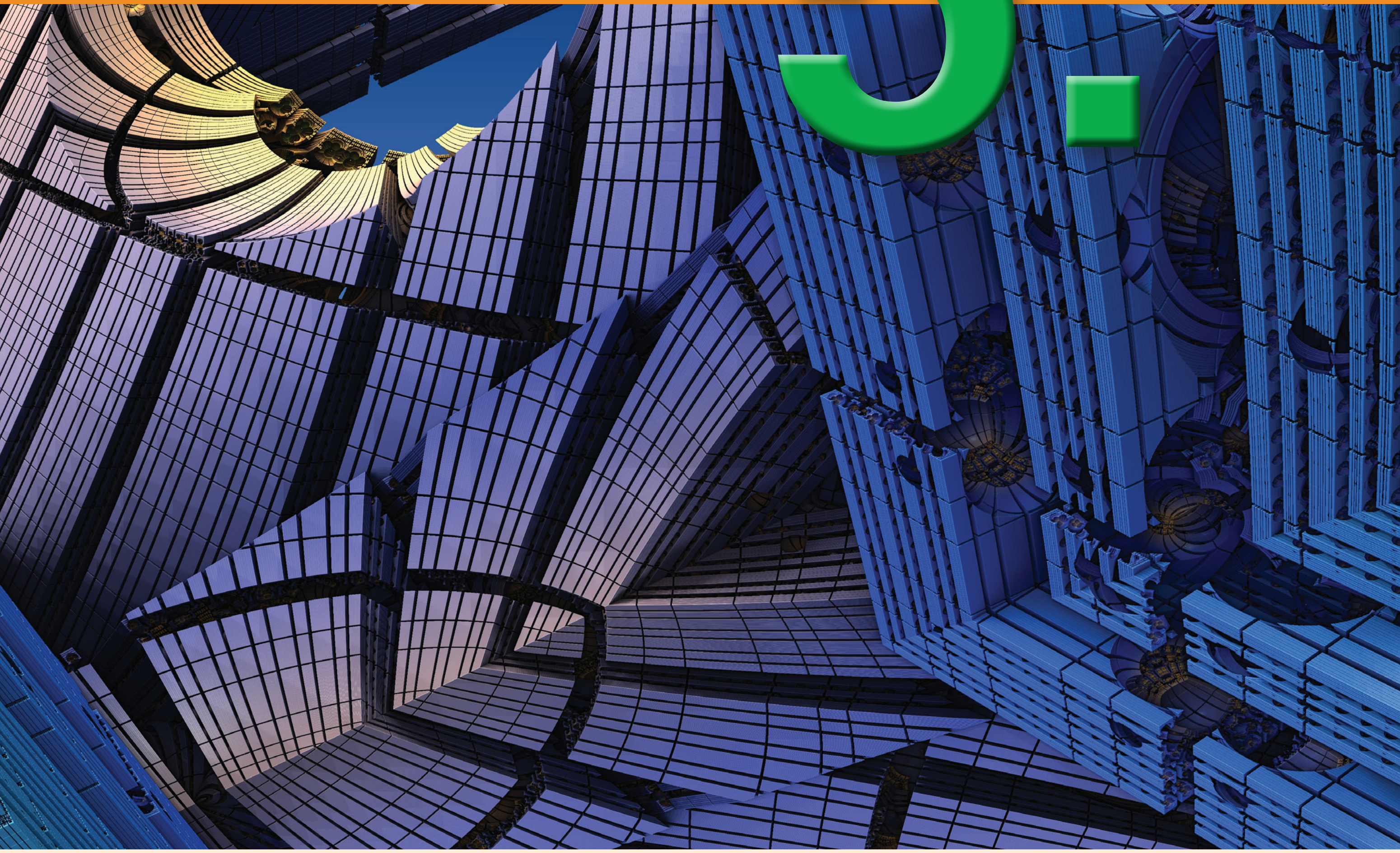
10P **c)** Bestimmt das Maß des Winkels der Geraden BH mit der Ebene (ACD).

2. $ABCD$ ist ein regelmäßiges Tetraeder, der Punkt M ist die Mitte der Strecke AC und der Punkt E ist das Spiegelbild des Punktes C in Bezug auf den Punkt D.

10P **a)** Beweist, dass $AE \parallel (BDM)$.

15P **b)** Berechnet $\sin u \cdot \cos u + \operatorname{tg} u$, wobei u das Maß des Winkels der Geraden AD und BE ist.

5. Kapitel



Flächen und Volumen von geometrischen Körpern

1 Abstand und Winkelmaße auf den Flächen oder im Inneren der gelernten geometrischen Körper

2 Flächen und Volumen von Polyedern

3 Flächen und Volumen von runden geometrischen Körpern

Spezifische Kompetenzen

1.5 2.5 3.5 4.5 5.5 6.5

1 Abstände und Winkelmaße auf den Flächen und im Inneren der gelernten geometrischen Körper

L1. Berechnen der Abstände auf den Flächen oder im Inneren der gelernten geometrischen Körper

Einige Abstände auf den Flächen und im Inneren eines Polyeders können mithilfe des Lehrsatzes der drei Senkrechten und dessen Kehrsätzen berechnet werden, wie z. B.: der Abstand von einem Eckpunkt zu einer Kante oder zu der Diagonale der Grundfläche, der Abstand von einem Eckpunkt der Grundfläche zu einer Seitenfläche, der Abstand der Mitte der Grundfläche zu einer Kante oder Seitenfläche.

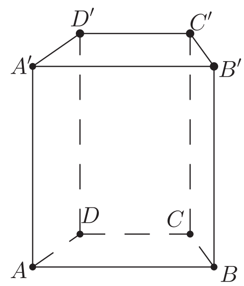
Anwendungen

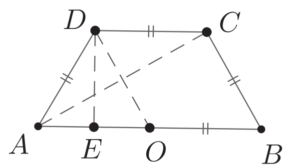
A. Berechnen der Abstände auf den Flächen der Polyeder

Das Berechnen der Abstände zwischen 2 Punkten, zwischen einem Punkt und einer Geraden, zwischen 2 Geraden die zweier Ebenen gehören sind Aufgaben aus der Geometrie der Ebene.

1. Beispiel Sei $ABCDA'B'C'D'$ ein gerades Prisma mit der Grundfläche ein gleichschenkliges Trapez, $AB \parallel CD$, $AD = CD = a$ und $AB = 2\,CD$, $AA' = b$. Berechnet die Abstände von der Spitze A zu CD, BC, $A'B'$ und $A'D'$.

Lösung. Sei O der Mittelpunkt der großen Grundlinie in der Ebene $(ABCD)$.
Dann ist $DC \equiv OB$, $DC \parallel OB$, also ist $DCBO$ ein Parallelogramm, mit $DO = BC = a$. Das Dreieck ADO mit der Seite a ist gleichseitig und $AO \parallel CD$. Dann ist $d(A, DC) = d(E, DC) = DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Im Dreieck BAC, $\sphericalangle ABC = 60°$, $\sphericalangle BAC = 30°$, also ist $\sphericalangle ACB = 90°$. Dann ist $d(A, BC) = AC = a\sqrt{3}$. Im geraden Prisma sind die Seitenflächen Rechtecke, also ist $AA' \perp A'B'$ und $d(A, A'B') = AA' = b$. Ebenso: $AA' \perp A'D'$ und $d(A, A'D')) = AA' = b$.

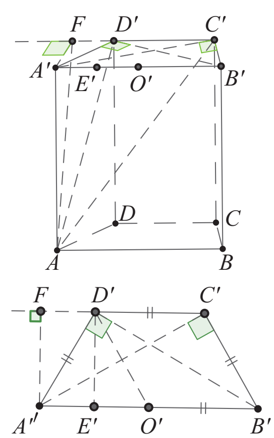




B. Berechnen der Abstände im Inneren der gelernten Körper

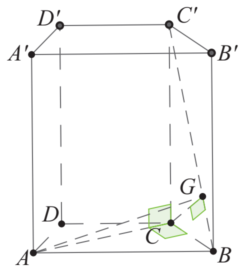
Den Abstand zwischen 2 Punkten, die nicht auf derselben Fläche eines Körpers liegen, oder den Abstand von einem Punkt zu einer Geraden, die nicht in derselben Fläche liegt, zu berechnen, sind Aufgaben aus der Raumgeometrie.

2. Beispiel Sei $ABCDA'B'C'D'$ ein gerades Prisma mit der Grundfläche ein gleichschenkliges Trapez , wo $AB \parallel CD$, $AD = CD = a$, $AB = 2\,CD$ und $AA' = b$. Berechnet den Abstand von A zu:
a) den Kanten $B'C'$ und $C'D'$; **b)** den Diagonalen der Grundfläche $A'B'C'D'$;
c) den Diagonalen der Seitenfläche $BCC'B'$.



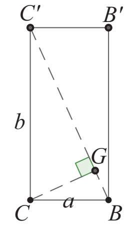
Lösung. **a)** Mithilfe des Lehrsatzes der 3 Senkrechten konstruiert man die Senkrechte aus einem Punkt zu einer Geraden in einer Ebene. Die Seitenkanten des geraden Prismas stehen senkrecht auf der Grundfläche, also ist $AA' \perp (A'B'C'D')$. Man „löst das Trapez aus der Zeichnung heraus“ und konstruiert in der Ebene $(A'B'C'D')$ die Senkrechten $A'C'$, $A'D'$ und $A'F$ auf die Strecken, $C'B'$, $D'B'$ bzw. $D'C'$. Die Dreiecke $A'C'B'$, $A'D'B'$ und $A'FD'$ sind rechtwinklig. Das Dreieck $A'D'O'$ ist gleichseitig, O' ist der Mittelpunkt von $A'B'$. Weil $A'F \perp D'C'$ folgt, dass $A'E'D'F$ ein Rechteck ist und E' der Mittelpunkt der Strecke $A'O'$ ist.

Es folgt, dass $A'F = D'E' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'D' = a$ und $A'C' = a\sqrt{3}$.



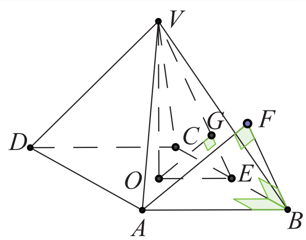
Weiter ist $AA' \perp (A'B'C'D')$, $C'B' \subset (A'B'C'D') \supset A'C'$ und $A'C' \perp C'B'$.
Laut Lehrsatz der 3 Senkrechten folgt, dass $AC' \perp C'B'$, also ist $d(A, C'B') = AC' =$
$= \sqrt{3a^2 + b^2}$.
Ebenso ist $AA' \perp (A'B'C'D')$, $D'C' \subset (A'B'C'D') \supset A'F$, $A'F \perp D'C'$. Laut Lehrsatz der 3 Senkrechten folgt , dass $AF \perp D'C'$, also ist $d(A, D'C') = AF = \dfrac{\sqrt{3a^2 + 4b^2}}{2}$.

b) $AA' \perp (A'B'C'D')$, $A'D', D'B' \subset (A'B'C'D')$ und $A'D' \perp D'B'$. Es folgt, dass $AD' \perp D'B'$ und $d(A, D'B') = AD' = \sqrt{a^2 + b^2}$. Also ist $d(A, A'C') = AA' = b$.



c) Seien CB' und BC' die Diagonalen der Seitenfläche $BCC'B'$.
Da $AC \perp CB$ und $AC \perp CC'$ (weil $CC' \perp (ABCD)$ und $(ABCD) \supset AC$) ist $AC \perp (BCC'B')$. Dann ist $d(A, CB') = d(A, (ABCD)) = AC = a\sqrt{3}$.
Sei C der Fußpunkt der Senkrechten durch A auf die Ebene $(BCC'B')$. In der Ebene $BCC'B'$ sei BC' die Diagonale des Rechtecks $BCC'B$.
Durch C konstruieren wir $CG \perp BC'$, $G \in BC'$. Laut Lehrsatz der 3 Senkrechten folgt, dass $GA \perp C'B$ und $d(A, C'B\ ) = GA$. Im rechtwinkligen Dreieck BCC' ist CG Höhe und $CG = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
Im rechtwikligen Dreieck ACG ist $GA = a \cdot \sqrt{\dfrac{3a^2 + 4b^2}{a^2 + b^2}}$.

3. Beispiel Sei $VABCD$ eine regelmäßige, vierseitige Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h. Bestimmt den Abstand von dem Mittelpunkt der Grundfläche O zu den Seitenflächen, und den Abstand von A zu der Ebene (VBC).



Lösung. Die Grundfläche der regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist ein Quadrat und der Fußpunkt der Höhe aus V ist der Mittelpunkt O des Quadrates. Sei E die Mitte der Kante BC und $OE \perp BC$ (OE ist Bestimmungshöhe im Quadrat). Weil $VO \perp (ABCD)$, $BC \subset (ABCD)$ sind die Voraussetzungen des Lehrsatzes der 3 Senkrechten erfüllt und es folgt, dass $VE \perp BC$.
In der Ebene (VBC) sind BC und VE senkrecht zueinander. Sei G die Projektion von O auf VE. Dann ist $OE \perp BC$, $GE \perp BC$ und $OG \perp$ GE. Laut dem 2. Kehrsatz des Lehrsatzes der 3 Senkrechten folgt, dass $OG \perp (VBC)$, also ist $d(O, (VBC)) = OG$.
Im rechtwinkligen Dreieck VOE berechnet man $d(O, (VBC)) = OG = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}$.
Durch B konstruieren wir die Gerade $d \parallel VE$. Sei F der Schnittpunkt der Senkrechten durch A zu der Geraden d.
Die Strecken BF und BE sind in der Ebene (VCB) enthalten mit $AB \perp BE$, $BE \perp BF$ und $AF \perp FB$. Laut 2. Kehrsatz des Lehrsatzes der 3 Senkrechten folgt, dass $AF \perp (VCB)$, also ist $d(A, (VBC)) = AF$.
Die Dreiecke OGE und AFB sind ähnlich (parallele Seiten, also kongruente Winkel) und das Ähnlichkeitsverhältnis ist $\dfrac{1}{2}$. Also ist $d(A, (VBC)) = AF = 2OG = \dfrac{2ah}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}$.

Bemerkung. Wegen der Symmetrie sind die Abstände von O zu den anderen Seitenflächen gleich mit dem berechneten Abstand.

Minitest *Wählt die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort ist richtig.*

1. Die Kante des Würfels $ABCDA'B'C'D'$ ist 2 cm. Dann ist der Abstand von A' zu der Ebene (BDD'):

A. 2 cm	B. $\sqrt{2}$ cm	C. $2\sqrt{2}$ cm	D. 4 cm

2. Sei $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma mit $AB = AA' = 12$ cm. Dann ist $d(E, (ACC'))$:

A. 18 cm	B. 16 cm	C. 24 cm	D. 12 cm

3. Sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma und S der Mittelpunkt der Seitenkante BE, $AB = 9$cm und $AD = 18$cm. Der Flächeninhalt des Dreiecks ASF ist:

A. $9(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ cm	B. $9(2+\sqrt{5})$ cm	C. $9(2\sqrt{2}+\sqrt{5})$ cm	D. $9(\sqrt{2}+2\sqrt{5})$ cm

4. Sei $SABCD$ eine regelmäßige vierseitige Pyramide mit der Grundfläche $ABCD$ und alle Kanten gleich 4 cm. Sei AE die Winkelhalbierende des Winkels SAB, $E \in SB$. Die Länge von DE ist:

A. $4\sqrt{5}$ cm	B. $3\sqrt{5}$ cm	C. $2\sqrt{5}$ cm	D. $\sqrt{5}$ cm

Aufgaben

1 Berechnet, schreibt ins Heft und setzt ein, um wahre Aussagen zu erhalten:

a) Sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit der Seitenlänge von 18 cm. Der Abstand zwischen F und der Geraden AH ist … cm.

b) Die Diagonalen der Seitenflächen eines regelmäßigen Prismas $ABCMNP$ mit $AB = AM = 6$ cm sind … cm lang.

c) Sei ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kante gleich 8 cm. Der Abstand vom Mittelpunkt der Grundfläche zu einer Seitenkante ist … cm.

d) Sei $SABCD$ eine regelmäßige vierseitige Pyramide mit der Grundkante $AB = 16$ cm und der Höhe $SO = 8\sqrt{2}$ cm. Sei E die Projektion von O auf die Kante SA. Die Länge der Strecke AE beträgt … cm.

2 Sei $ABCDEFGH$ ein gerades Prisma mit dem Quadrat $ABCD$ als Grundfläche und $AB = 4$ cm, $AE = 8$ cm, $AC \cap BD = \{O\}$. Berechnet:

a) den Abstand von H zu der Geraden AC;

b) den Abstand von F zu der Geraden OG;

c) den Abstand von G zu der Ebene (EBD).

3 Sei $ABCDEFGH$ ein Quader und M der Mittelpunkt der Seitenkante AE, $AB = 1$ cm, $FG = 3$ cm. Das Dreieck MCG ist rechtwinklig und gleichschenklig. Berechnet die Höhe des Quaders.

4 Sei $SABC$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kante a. Die Mittelpunkte der Kanten AB, BC und SC sind D, E bzw. F.

a) Berechnet $d(C, (AES))$ und $d(E, (CDS))$.

b) Beweist, dass $DF \perp SC$.

5 Sei der Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ die Grundfläche eines geraden Zylinders. Die Punkte A, B, E, F befinden sich auf dem Kreis, sodass $AB = 2 \cdot r = 8\sqrt{2}$ cm. Die Sehne EF steht senkrecht zu dem Durchmesser AB und ihr entspricht ein Bogen von 90°. BC ist eine Erzeugende des Zylinders. Der Abstand von C zu der Geraden EF ist $4\sqrt{6}$ cm. Berechnet die Länge der Erzeugenden des Zylinders.

6 Gegeben ist ein gerader Kegel mit der Spitze V und der Grundfläche der Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Durchmesser AB. Der Abstand von dem Mittelpunkt der Grundfläche zu der Erzeugenden ist $VB = 2$ cm und ist halb so lang wie die Erzeugende. Berechnet den Radius und die Höhe des Kegels.

7 $ABCDMNPQ$ ist ein Würfel mit der Seite von 1 dm, R ist die Mitte von AM und S die Mitte von CP. Seien $\{L\} = AC \cap BD$, $\{O\} = PA \cap CM$, $\{K\} = MP \cap NQ$.

a) Berechnet den Umfang des Dreiecks RKO.

b) Was für ein Viereck ist $LRKS$?

c) Berechne den Abstand von R zu der Ebene (BDP).

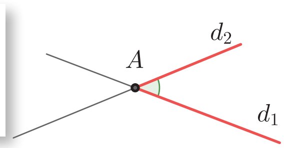
L2. Berechnen von Winkelmaßen auf Seitenflächen oder innerhalb der bekannten geometrischen Körper

Wir erinnern uns!

A. Der Winkel gebildet von zwei Geraden

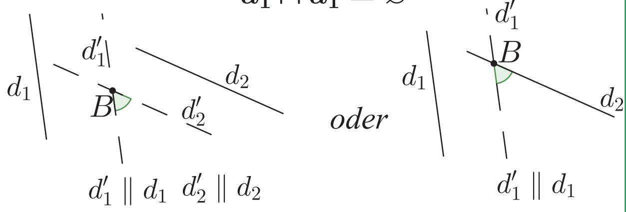
1. Seien die Geraden d_1 und d_2 mit $d_1 \cap d_2 = \{A\}$. Die Geraden bilden einen Winkel $\sphericalangle(d_1, d_2)$, der spitz oder recht ist. Dieser wird von den aus d_1 und d_2 mit dem Ursprung A entstandenen Halbgeraden bestimmt.

$d_1 \cap d_1 = \{A\}$



2. Der Winkel gebildet von d_1 und d_2 mit $d_1 \cap d_2 = \varnothing$ ist der Winkel, der entsteht, wenn man durch einen Punkt 2 Parallelen zu den gegeben Geraden zeichnet. Wenn sich der Punkt auf einer der Geraden befindet, dann zeichnet man nur eine Parallele zu der anderen Geraden.

$d_1 \cap d_1 = \varnothing$



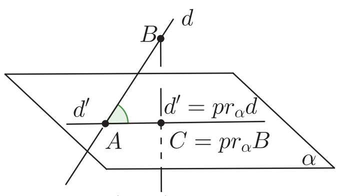
B. Der Winkel gebildet von einer Geraden und einer Ebene

1. Sei $d \cap \alpha = \{A\}$, $d \not\perp \alpha$. Der Winkel $\sphericalangle(d, \alpha)$ gebildet von d mit der Ebene α ist der Winkel gebildet von d und ihrer Projektion d' auf die Ebene.

2. Sei $d \perp \alpha$, dann ist der Winkel zwischen d und der Ebene α ein rechter Winkel.

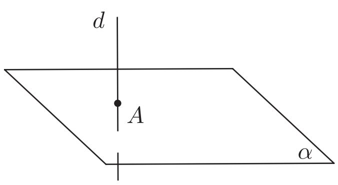
3. Sei $d \parallel \alpha$, dann ist der Winkel zwischen d und der Ebene α ein Nullwinkel.

$d \cap \alpha = \{A\}$



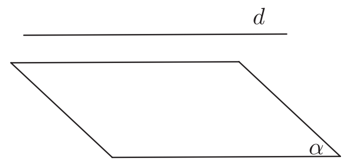
$\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle BAC$

$d \perp \alpha$



$\sphericalangle(d, \alpha) = 90^0$

$d \parallel \alpha$

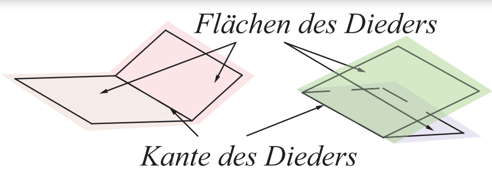


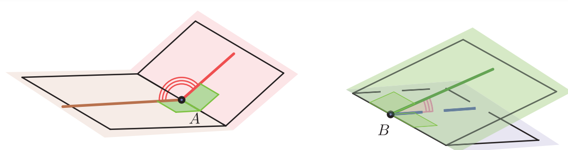
$\sphericalangle(d, \alpha) = 0^0$

C. Der Winkel gebildet von zwei Ebenen

Ein *Flächenwinkel* oder *Diederwinkel* wird von der Vereinigung zweier Halbebenen, seinen *Flächen*, bestimmt, die von einer Schnittgeraden*, seiner Kante*, begrenzt werden.

Der ebene Winkel eines Flächenwinkels ist der Winkel gebildet von zwei sich schneidenden Halbgeraden, die in den beiden Halbebenen enthalten sind und senkrecht auf die Schnittgerade stehen.

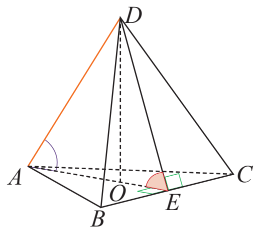




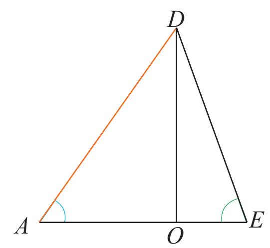
1. Wenn $\alpha \cap \beta = d$, dann wird der Winkel gebildet von den Ebenen α und β mit $\sphericalangle(\alpha, \beta)$ bezeichnet und entspricht dem spitzen oder rechten Winkel des ebenen Flächenwinkels gebildet von zwei Halbebenen, die von d begrenzt werden und in den beiden Ebenen eingeschlossen sind.
2. Wenn die Ebenen α und β senkrecht zueinander stehen, dann ist der ebene Winkel des Flächenwinkels recht.
3. Wenn die Ebenen α und β parallel sind, dann ist der ebene Winkel des Flächenwinkels ein Nullwinkel.

1. Beispiel Sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kante a.
1) Berechnet den Sinus des Winkels zwischen Seitenkante und der Grundfläche.
2) Berechnet den Sinus des Winkels zwischen zwei Seitenflächen.

Lösung. Im regelmäßigen Tetraeder (alle Seitenflächen und die Grundfläche sind gleichseitige Dreiecke) fällt die Höhe aus der Spitze in den Umkreismittelpunkt der Grundfläche, und dieser Punkt ist auch Schwerpunkt.
Sei $O = pr_{(ABC)}D$, dann ist $pr_{(ABC)}AD = AO$, also ist $\sphericalangle DAO = \sphericalangle DAE$ der Winkel gebildet zwischen DA und der Ebene (ABC).
Da $DO \perp (ABC)$, $OE \perp BC$ (laut Konstruktion), $OE, BC \subset (ABC)$, folgt laut Lehrsatz der 3 Senkrechten, dass $DE \perp BC$. Das bedeutet, dass der Winkel $\sphericalangle DEA$ der Flächenwinkel zwischen den Seitenflächen BCD und BCA ist. Wir zeichnen das Dreieck ADE nochmals in der Ebene.

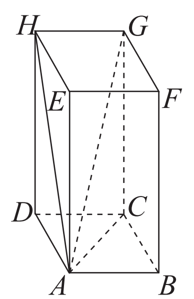


AE und DE sind Höhen in gleichseitigen Dreiecken, also $AE = DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ und $EO = \dfrac{1}{3}\,AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Im Dreieck DOE wenden wir den Lehrsatz des Pythagoras an und erhalten $DO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Im Dreieck ADO ist $\sin\sphericalangle DAE = \dfrac{DO}{AD} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ und im Dreieck DOE ist $\sin\sphericalangle DEO = \dfrac{DO}{DE} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.



2. Beispiel Im Quader $ABCDEFGH$ ist $AB = 3\sqrt{3}$ cm, $AD = 9$ cm und $AE = 12$ cm. Berechnet:
a) Das Maß des Winkels zwischen AC und der Ebene (BCF);
b) Den Sinus des Winkels zwischen den Ebenen (ABC) und (AGH).

Lösung: **a)** Weil $ABCDEFGH$ ein Quader ist, folgt, dass $AB \perp (BCF)$, also ist $B = pr_{(BCF)}A$. Weil $C \in (BCF)$, folgt, dass $pr_{(BCF)}AC = BC$ und $\sphericalangle(AC, (BCF)) = \sphericalangle(AC, BC) = \sphericalangle(ACB)$. Im Dreieck ABC mit $\sphericalangle B = 90°$ ist $\operatorname{tg}\sphericalangle ACB = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ und deshalb ist $\sphericalangle(AC,(BCF)) = 30°$.
b) Weil $GH \parallel AB$, folgt, dass $AB \subset (AGH)$ und $(ABC) \cap (AGH) = AB$. Es gilt $AD \perp AB$, $AD \subset (ABC)$, $AH \perp AB$, $AH \subset (AGH)$.
Der Winkel gebildet von den Ebenen (ABC) und (ABH) entspricht dem Winkel zwischen den Strecken AD und AH, also $\sphericalangle DAH$. Im Dreieck ADH sind $\sphericalangle ADH = 90°$, $AD = 9$ cm, $HD = CG = 12$ cm. Mithilfe des Lehrsatzes des Pythagoras berechnet man $AH = 15$ cm.
Also: $\sin(\sphericalangle DAH) = \dfrac{HD}{AH} = \dfrac{4}{5}$.



Aufgaben

1 Im Quader $ABCDEFHG$ sind $AB = AE = 6$ cm und $BC = 8$ cm. Berechnet:

a) den Abstand zwischen dem Mittelpunkt der Seitenfläche $BCGF$ und der Diagonale GA;

b) den Tangens des Winkels gebildet von den Geraden AB und GA.

2 Die Seitenflächen der regelmäßigen Pyramide $SABC$ sind rechtwinklige Dreiecke. Sei Q der Mittelpunkt der Kante AB. Bestimmt das Maß des Winkels gebildet von den Geraden SC und SQ.

3 Die Grundfläche des geraden Prismas $ABCDMNPQ$ ist ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge von 24 cm. Das Maß des Winkels gebildet von der Geraden BQ mit der Ebene (ABM) ist u. Beweist, dass $u < 45^\circ$.

4 $ABCDEFGH$ ist ein Quader mit $AB = 2\sqrt{5}$ cm, $BC = \sqrt{5}$ cm, $AE = 5$ cm, $AC \cap BD = \{O\}$ und M ist der Mittelpunkt von AB.

a) Beweist, dass $OM \parallel (ADH)$.

b) Bestimmt das Maß des Winkels $\sphericalangle(DF, (ABC))$.

c) Berechnet $\sin\sphericalangle((CMF), OM)$.

5 *Wählt die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort ist richtig.*

Im Quader $ABCDA'B'C'D'$ sind $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm und $AA' = 24$ cm. M und N sind die Mittelpunkte der Kanten AA' bzw. DD'.

a) Der Tangens des Winkels $\sphericalangle(MN, BC')$ ist:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

b) Der Sinus des Winkels gebildet von der Diagonale BD' mit der Ebene (ABC) ist:

A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{4}{13}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{10}{13}$

6 Die Kantenlängen des regelmäßigen Tetraeders $ABCD$ sind $2a$, $a > 0$. E und F sind die Mittelpunkte der Strecken BC bzw. CD. Berechnet:

a) den Kosinus des Winkels gebildet von einer Seitenfläche mit der Grundfläche;

b) den Sinus des Winkels $\sphericalangle EAF$.

7 Alle Kantenlängen der regelmäßigen vierseitigen Pyramide $SABCD$ sind b, $b > 0$. Berechnet:

a) $\sin\sphericalangle((SAD), (ABC))$;

b) $\sin\sphericalangle((SAB), (SBC))$;

c) $\sin\sphericalangle((SAD), (SBC))$;

d) $\text{tg}\sphericalangle((SAC), (SCD))$.

8 Die Höhe eines regelmäßigen dreiseitigen Pyramidenstumpfes ist 3 cm, der Umfang der großen Grundfläche ist $36\sqrt{3}$ cm und das Maß des Winkels gebildet von einer Seitenfläche mit der Grundfläche ist 45°. Berechnet den Tangens des Winkels gebildet von einer Seitenkante mit der großen Grundfläche.

9 Die Seitenkanten eines regelmäßigen dreiseitigen Pyramidenstumpfes bilden mit der großen Grundfläche einen Winkel von 45°. Die Radien der Umkreise der Grundflächen sind $6\sqrt{3}$ cm bzw. $3\sqrt{3}$ cm lang. Berechnet die Höhe des Pyramidenstumpfes und die Höhe der ursprünglichen Pyramide.

10 Die Grundfläche eines geraden Kegels ist ein Diskus mit dem Mittelpunkt O und dem Radius 3 cm. Der Abstand von O zu der Erzeugenden ist 2,4 cm. Berechnet den Kosinus des Winkels gebildet von der Erzeugenden mit der Höhe des Kegels.

11 Der Achsenschnitt eines geraden Kegels ist ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von $\sqrt{3}$ cm^2. Der Durchmesser der Grundfläche beträgt $2\sqrt{3}$ cm. Berechnet das Maß des Winkels gebildet von der Erzeugenden mit der Grundfläche.

12 Die Diagonalen des Achsenschnitts eines geraden Zylinders stehen senkrecht zueinander. Bestimmt das Maß des Winkels gebildet von einer Diagonale des Achsenschnitts mit der Grundfläche des Zylinders.

13 Sei ein gerader Kreiszylinder mit den Grundflächen $\mathcal{C}(O, AO)$, $\mathcal{C}(Q, QB)$ und $OA = 8$ cm. Die Gerade MN steht senkrecht auf die Mitte des Radius OA und $M, N \in \mathcal{C}(O, AO)$. Der Abstand zwischen den Grundflächen des Zylinders beträgt 4 cm. Berechnet das Maß des Winkels zwischen der Ebene (QMN) und der Grundfläche $(\mathcal{C}(O, AO))$.

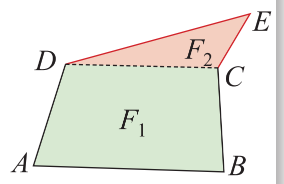
2 Flächen und Volumen von Polyedern

L1. Fläche und Volumen eines geraden Prismas

Wir erinnern uns!

Die Basiseinheit für den Flächeninhalt ist der Quadratmeter. Sie entspricht einem Quadrat mit der Seitenlänge von 1 m. Für Flächeninhalte verwendet man Vielfache oder Teile des Quadratmeters.
Es gilt allgemein, dass der Flächeninhalt einer quadratischen Fläche mit der Seitenlänge von 1 *Einheit* gleich 1 *Einheit*² ist.
10^{-6} km² = 10^{-4} hm² = 10^{-2} dam² = 1 m² = 10^2 dm² = 10^4 cm² = 10^6 mm²
Der Flächeninhalt der regelmäßigen Vielecke mit der Seitenlänge a und der Flächeninhalt des Kreises:

Gleichseitiges Dreieck	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	Regelmäßiges Sechseck	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
Quadrat	a^2	Kreis (Radius R)	πR^2



Wenn eine Fläche F in zwei disjunkte Flächen F_1 und F_2 zerlegt werden kann, dann ist der Flächeninhalt von F gleich der Summe der Flächeninhalte von F_1 und F_2.
Wenn $F = F_1 \cup F_2$ und $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, dann $A(F) = A(F_1) + A(F_2)$.

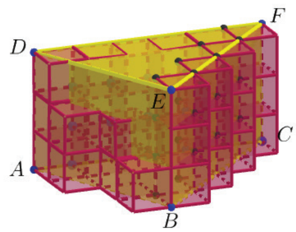
Wir verstehen anhand von Beispielen

A. Allgemeines

Alle Flächen eines Polyeders sind Vielecke.
Die Abwicklung eines Polyeders ist eine Fläche bestehend aus mehreren disjunkten Flächen, die Flächen des Polyeders sind (Seitenflächen und Grundflächen).

1. Definition. Die Summe der Seitenflächen eines Polyeders heißt *Mantelfläche* und wird mit $\mathcal{A}_M$ bezeichnet.
2 Definition. Die Summe aller Flächen eines Polyeders heißt *Oberfläche* und wird mit $\mathcal{O}$ (oder $\mathcal{A}_t$) bezeichnet.

Bemerkung. Die Oberfläche eines Polyeders ist die Summe von Mantelfläche und Grundfläche bzw. Grundflächen.
Die Basiseinheit für das Volumen ist der Kubikmeter und entspricht dem Rauminhalt eines Würfels mit der Seitenlänge von 1 m. Als Maßeinheit verwendet man für das Volumen die Vielfachen und Teile des Kubikmeters.
10^{-9} km³ = 10^{-6} hm³ = 10^{-3} dam³ = 1 m³ = 10^3 dm³ = 10^6 cm³ = 10^9 mm³
Allgemein gilt, dass der Würfel mit der Kante 1 *Einheit* das Volumen gleich 1 *Einheit*³ hat.
Um das Volumen eines Körpers durch Annäherung zu bestimmen, verwendet man die kleinste mögliche Anzahl von Würfeln, die den Körper umfassen. Man sagt, dass das Volumen des Körpers ungefähr n Einheiten³ ist, wenn der Körper von n Würfeln mit der Seite 1 Einheit umfasst werden kann. Die Annäherung ist umso genauer, je kleiner die verwendete Einheit ist.



Bemerkung: Wenn ein geometrischer Körper K in 2 disjunkte geometrische Körper K_1 und K_2 zerlegt werden kann, dann ist das Volumen des Körpers K gleich der Summe der Volumen der Körper K_1 und K_2.

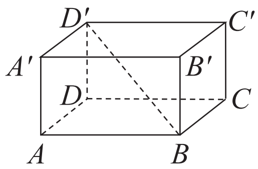
Anwendungen

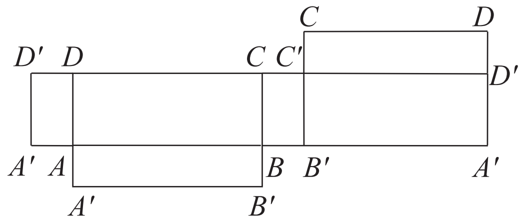
B. Fläche und Volumen des Quaders

$ABCDA'B'C'D'$ ist ein Quader mit $AB = a$, $BC = b$ und $AA' = c$. Im Folgenden werden wir Techniken zum Berechnen der Mantelfläche, der Oberfläche und des Volumens erarbeiten.

Eigenschaften
Alle Seitenflächen sind Rechtecke. Die Seitenkanten stehen senkrecht zu den Grundflächen und sind kongruent. Je zwei anliegende Seitenflächen befinden sich in Ebenen, die senkrecht zueinander stehen.
Die Strecken BD', $B'D$, AC' und $A'C$ sind Diagonalen des Quaders. Je zwei gegenüberliegende Seitenflächen befinden sich in parallelen Ebenen. Je 2 gegenüberliegende Seitenflächen sind kongruent. Je 2 gegenüberliegende Seitenflächen können Grundflächen sein.

Darstellung, Abwicklung

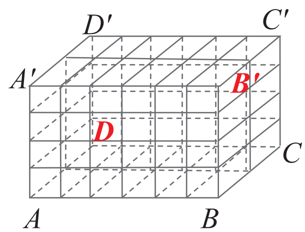




Die Abwicklung des Quaders besteht aus einem Rechteck mit den Seitenlängen $\mathcal{U}_{Gf}$ ($\mathcal{U}_{Gf}$ ist der Umfang einer Grundfläche) und h (h die Höhe) und aus zwei anderen kongruenten Rechtecken (den Grundflächen).
Wenn a, b, c die Maße des Quaders sind, dann gilt für die Diagonale des Quaders: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
Bemerkung: Die Seiten eines Quaders nennt man Länge, Breite und Höhe.
Schlussfolgerungen:

1. Laut Definition ist $\mathcal{A}_M = \mathcal{A}_{ABB'A'} + \mathcal{A}_{BCC'B'} + \mathcal{A}_{CDD'A'} + \mathcal{A}_{ADD'A'}$. Dann ist $\mathcal{A}_M = 2ac + 2bc = (2a + 2b)c$ oder $\mathcal{A}_M = \mathcal{U}_{Gf} \cdot h$, wobei $\mathcal{U}_{Gf}$ der Umfang der Grundfläche und h die Höhe des Quaders ist.
2. Die Oberfläche des Quaders ist $\mathcal{O} = \mathcal{A}_M + 2\mathcal{A}_{Gf}$ oder $\mathcal{O} = 2ab + 2ac + 2bc$ oder $\mathcal{O} = 2(ab + ac + bc)$.
3. Um das Volumen eines Quaders zu bestimmen, werden wir zu Beginn die natürlichen Zahlen a, b, c als Dimensionen des Quaders wählen.

Beispiel: Der Quader in der nebenstehenden Zeichnung mit $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm und $AA' = 4$ cm kann in $6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$ Würfel mit der Kantenlänge von 1 cm zerlegt werden. Deshalb ist das Volumen des Quaders 48 cm³ und wir schreiben $\mathcal{V} = 48$ cm³.
Also hat ein Quader, dessen Maße a, b, c natürliche Zahlen sind, das Volumen $\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$.
Allgemein gilt für einen Quader mit der Grundfläche $ABCD$, $AB = a$, $BC = b$ und der Höhe $h = c$, dass das Volumen $\mathcal{V} = \mathcal{A}_{Gf} \cdot h$ ist.



Das Ergebnis ist wahr, auch wenn die Maße des Quaders beliebige reelle positive Zahlen sind.

C. Mantelfläche, Oberfläche und Volumen des regelmäßigen vierseitigen Prismas

Das regelmäßige vierseitige Prisma ist ein Sonderfall des Quaders. Seine Grundfläche ist ein Quadrat, also $a = b$. Dann sind alle Seitenflächen kongruente Rechtecke und

$\mathcal{A}_M = \mathcal{U}_{Gf} \cdot h$ oder $\mathcal{A}_M = 4ac$, $\mathcal{O} = \mathcal{A}_{\mathcal{M}} + 2\mathcal{A}_{Gf}$ oder $\mathcal{O} = \mathcal{A}_M + 2a^2$ und

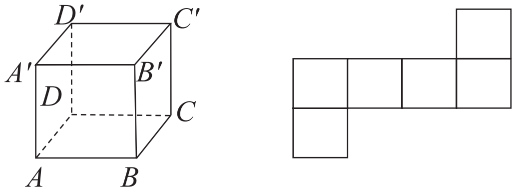
$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{Gf} \cdot h$ oder $\mathcal{V} = a^2 \cdot c$.

Fläche und Volumen des Würfels

ABCDA'B'C'D' ist ein Würfel mit der Kante $AB = a$.

Eigenschaften
Der Würfel ist ein Sonderfall des Quaders, wobei $a = b = c$. Alle Flächen sind Quadrate. Die Länge der Diagonale des Würfels mit der Kante a ist $d = a\sqrt{3}$.

Darstellung, Abwicklung



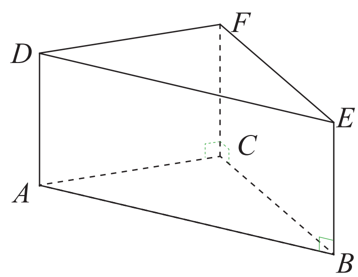
Schlussfolgerung: Die Formeln werden von denen des Quaders mit $a = b = c$ abgeleitet.
Für den Würfel mit der Kante a gelten: $\mathcal{A}_M = 4a^2$, $\mathcal{O} = 6a^2$, $\mathcal{V} = a^3$.

D. Mantelfläche, Oberfläche und Volumen des geraden dreiseitigen Prismas

Sei *ABCDEF* ein gerades dreiseitiges Prisma mit den Kanten $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ und $AD = h$.

Eigenschaften
Die Grundflächen sind kongruente Dreiecke. Alle Seitenflächen sind Rechtecke und liegen in Ebenen, die senkrecht zu der Grundfläche stehen. Die Seitenkanten sind kongruent und stehen senkrecht zu den Grundflächen. Das *regelmäßige dreiseitige* Prisma hat gleichseitige Dreiecke als Grundflächen. Die Abwicklung eines geraden dreiseitigen Prismas besteht aus einem Rechteck mit den Maßen $\mathcal{U}_{Gf}$ ($\mathcal{U}_{Gf}$ - dem Umfang einer Grundfläche des Prismas) bzw. h (h - der Höhe des Prismas) und aus zwei kongruenten Dreiecken (den Grundflächen des Prismas).

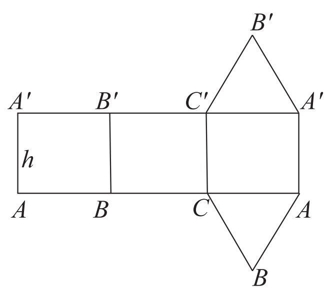
Darstellung, Abwicklung



Schlussfolgerungen:

1. $\mathcal{A}_M = \mathcal{A}_{ABED} + \mathcal{A}_{BCFE} + \mathcal{A}_{CADF} = AD \cdot AB + BE \cdot BC + CF \cdot AC = AD \cdot (AB + BC + CA)$. Also ist $\mathcal{A}_M = \mathcal{U}_{Gf} \cdot h$. Mit $\mathcal{U}_{gf}$ bezeichnen wir den Umfang der Grundfläche und mit h die Höhe im Prisma (die gleich mit der Seitenkante ist).

2. $\mathcal{O} = \mathcal{A}_{ABED} + \mathcal{A}_{BCFE} + \mathcal{A}_{CADF} + \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{DEF}$ oder $\mathcal{O} = \mathcal{A}_M + 2\mathcal{A}_{Gf}$. Mit A_{Gf} bezeichen wir den Flächeninhalt einer Grundfläche.



3. Wenn zwei Prismen äquivalente Grundflächen (mit gleichem Flächeninhalt) und gleiche Höhen haben, dann sind ihre Volumen gleich. Folglich ist das Volumen eines geraden Prismas mit der Grundfläche $\mathcal{A}_{Gf}$ und der Höhe h gleich dem Volumen des Quaders mit der Grundfläche $\mathcal{A}_{Gf}$ und Höhe h.
Also ist $\mathcal{V} = \mathcal{A}_{Gf} \cdot h$.
Im *regelmäßigen dreiseitigen* Prisma mit $AB = BC = AC = a$ und der Höhe h sind $\mathcal{A}_M = 3ah$ und $\mathcal{O} = \mathcal{A}_M + 2\mathcal{A}_{Gf}$, wobei $A_{Gf} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ und $\mathcal{V} = \dfrac{a^2h\sqrt{3}}{4}$.

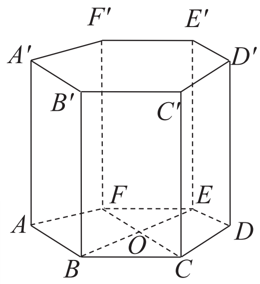
E. Mantelfläche, Oberfläche und Volumen des regelmäßigen sechsseitigen Prismas

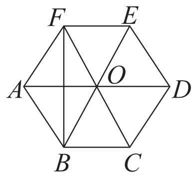
$ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ ist ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma mit $AB = a$ und $AA = h$.

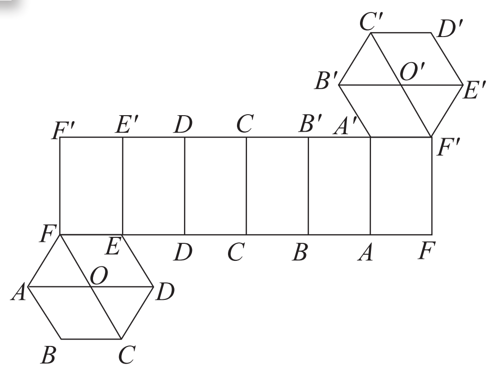
Eigenschaften

Die Seitenflächen sind kongruente Rechtecke und die Grundflächen sind kongruente regelmäßige Sechsecke.
Die Seitenkanten sind kongruent und stehen senkrecht zu den Grundflächen.
Die Abwicklung des regelmäßigen sechseckigen Prismas besteht aus einem Rechteck mit den Maßen $\mathcal{U}_{Gf}$($\mathcal{U}_{Gf}$ - Umfang der Grundfläche) bzw. h (h - Höhe im Prisma) und 2 kongruenten regelmäßigen Sechsecken (Grundflächen des Prismas).
Das regelmäßige sechsseitige Prisma kann in 6 regelmäßige dreiseitige Prismen zerlegt werden. Diese Prismen sind kongruent.

Darstellung, Abwicklung







Schlussfolgerungen:

1. $\mathcal{A}_{Gf} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

2. $\mathcal{A}_M = \mathcal{A}_{ABB'A'} + \mathcal{A}_{BCC'B'} + \mathcal{A}_{CDD'C'} + \mathcal{A}_{DEE'D'} + \mathcal{A}_{EFF'E'} + \mathcal{A}_{FAA'F'}$ $= 6 \cdot a \cdot h$, also ist $\mathcal{A}_M = \mathcal{U}_{Gf} \cdot h$. Mit $\mathcal{U}_{Gf}$ bezeichnen wir den Umfang der Grundfläche und mit h die Höhe des Prismas (gleich mit der Seitenkante).

3. $\mathcal{O} = \mathcal{A}_M + 2\mathcal{A}_{Gf}$ oder $\mathcal{O} = 6 \cdot a \cdot h + 3a^2\sqrt{3}$.

4. $\mathcal{V} = \mathcal{A}_{Gf} \cdot h$ oder $\mathcal{V} = \dfrac{3a^2h\sqrt{3}}{2}$.

Bemerkung: Das regelmäßige sechsseitige Prisma kann aus 6 regelmäßigen dreiseitigen Prismen mit der Grundkante a zusammengesetzt werden, also ist das Volumen gleich $\mathcal{V} = 6 \cdot \dfrac{a^2h\sqrt{3}}{4}$.

Bemerkung: Die Formeln für die Sonderfälle von Prismen müssen *nicht auswendig gelernt* werden. Diese kann man anhand der gegebenen Daten ableiten:
1. Die Mantelfläche des Prismas ist die Summe aller Seitenflächen. $\mathcal{A}_M = \mathcal{U}_{Gf} \cdot h$
2. Die Oberfläche des Prismas ist die Summe der Mantelfläche und der beiden Grundflächen. $\mathcal{O} = \mathcal{A}_M + 2\mathcal{A}_{Gf}$
3. Das Volumen des Prismas ist das Produkt der Grundfläche und der Höhe des Prismas. $\mathcal{V} = \mathcal{A}_{Gf} \cdot h$.

MINITEST Sei das regelmäßige vierseitige Prisma mit der Länge der Grundkante a und der Seitenkante b. Wir bezeichen mit $\mathcal{A}_{Gf}$, $\mathcal{A}_M$ und $\mathcal{O}$ die Grundfläche, die Mantelfläche und die Oberfläche des Prismas und mit $\mathcal{V}$ das Volumen. *Wähle die richtige Antwort aus. Eine einzige Antwort ist richtig.*

a) Wenn $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, dann ist $\mathcal{A}_M$:			
A. 48 cm^2	**B.** 84 cm^2	**C.** 64 cm^2	**D.** 72 cm^2
b) Wenn $\mathcal{A}_{Gf} = 36$ cm^2 und $b = 4{,}5$ cm, dann ist $\mathcal{V}$:			
A. 96 cm^3	**B.** 126 cm^3	**C.** 162 cm^3	**D.** 196 cm^3
c) Wenn $\mathcal{O} = 312$ cm^2 , $\mathcal{A}_M = 240$ cm^2, dann ist $\mathcal{V}$:			
A. 420 cm^3	**B.** 360 cm^3	**C.** 320 cm^3	**D.** 480 cm^3

Aufgaben

1 Sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Quader mit $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Wir bezeichnen mit d die Länge der Diagonale, mit $\mathcal{O}$ die Oberfläche, mit $\mathcal{A}_M$ die Mantelfläche und mit $\mathcal{V}$ das Volumen. Berechnet und setzt ein.

	a	b	c	d	$\mathcal{A}_M$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{V}$
1.1	3 cm	4 cm	12 cm				
1.2		12 cm	16 cm	25 cm			

2 Die Grundkanten eines Quaders sind 10 cm bzw. 24 cm. Die Diagonale des Quaders bildet mit der Grundfläche einen Winkel von 60°. Berechnet die Höhe des Quaders.

3 Sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Quader.

a) Berechnet $d(D', BC)$, wenn $BC = 16$ cm, $AA' = 8$ cm, $V = 768$ cm^3.

b) Berechnet die Grundfläche, wenn $AA' = 32$ cm, $AB = 12$ cm, $d(B', CD) = 40$ cm.

4 $ABCDMNPQ$ ist ein Quader mit $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm, $AM = 9$ cm. Bestimmt den Punkt S auf der Kante CP, sodass der Flächeninhalt des Dreiecks BSQ minimal ist.

5 Sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Quader mit $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Die Winkel gebildet von der Diagonale AC' mit den Flächen (ABC), (ABB') bzw. (ADD') bezeichen wir mit u, v und w. Berechnet $\sin^2 u + \sin^2 v + \sin^2 w$.

6 **a)** Ein Würfel hat die Kantenlänge 2 cm. Berechnet seine Mantelfläche, seine Oberfläche und sein Volumen.

b) Die Kante eines anderen Würfels ist 3-mal größer. Berechnet, wie viel Mal größer die Mantelfläche, die Oberfläche und das Volumen diese Würfels im Vergleich zum ersten Würfel sind.

7 Die Fläche des Diagonalschnitts eines Würfels beträgt $64\sqrt{2}$ cm^2. Berechnet:

a) die Länge der Kante des Würfels;

b) das Volumen des Würfels.

8 Ein regelmäßiges Prisma hat 18 kongruente Kanten, deren Summe 216 cm ist.

a) Wie viele Kanten hat die Grundfläche?

b) Berechnet die Oberfläche und das Volumen des Prismas.

9 Aus kleinen Würfeln mit der Kante von 1 cm wird ein Würfel mit einem Volumen von 27 cm^3 gebaut.

a) Bestimmt die Anzahl der benötigten kleinen Würfel.

b) Die Flächen des Würfels werden bemalt.

b_1) Berechnet die Anzahl der Würfel mit 3 bemalten Flächen.

b_2) Berechnet die Anzahl der Würfel mit 1 bemalten Fläche.

b_3) Berechnet die Anzahl der Würfel, die nicht bemalt sind.

10 Sei das regelmäßige dreiseitige Prisma $ABCA'B'C'$ mit der Grundkante $AB = 10$ cm und $BC' \perp CB'$.

a) Berechnet die Höhe des Prismas.

b) Berechnet die Oberfläche und das Volumen.

11 Die Grundfläche des regelmäßigen Prismas $ABCDEF$ ist $64\sqrt{3}$ cm^2 und $\cos\sphericalangle(AE, BC) = 0{,}25$.

a) Beweist, dass die Grundkante 16 cm lang ist.

b) Berechnet das Maß des Winkels zwischen AF und der Grundfläche.

c) Berechnet die Mantelfläche des Prismas.

12 Sei ein regelmäßiges vierseitiges Prisma mit der Diagonale von 9 dm und der Höhe von 7 dm.

a) Berechnet die Länge der Grundkante und das Volumen.

b) In einer Werkstatt wird ein Bestandteil in der Form und der Größe des gegebenen Prismas aus einem Material, dessen Dichte 2,5 g/cm^3 beträgt, hergestellt. Berechnet die Masse des Bestandteils in Kilogramm.

13 Im regelmäßigen vierseitigen Prisma $ABCDA'B'C'D'$ ist die Grundkante 12 cm, P der Mittelpunkt von CC' und $\sphericalangle BPD = 60^\circ$.

a) Berechnet die Höhe des Prismas.

b) Stehen die Ebenen $(A'BD)$ und(PBD) senkrecht zueinander?

14 Im regelmäßigen sechsseitigen Prisma $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ ist $AB = 12$ cm, M der Mittelpunkt der Kante DD', $AD \cap BF = \{N\}$ und $NM = 12\sqrt{3}$ cm.

a) Bestimmt das Maß des Winkels gebildet von MN mit der Ebene (ABC).

b) Berechnet die Mantelfläche des Prismas.

L2. Mantelfläche, Oberfläche und Volumen der regelmäßigen Pyramide und des regelmäßigen Tetraeders

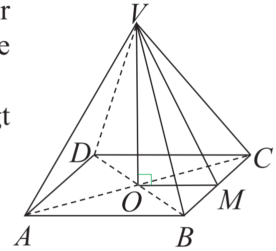
Wir verstehen anhand von Beispielen

Die regelmäßige Pyramide hat folgende Eigenschaften:

1. Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Vieleck und die Projektion der Spitze auf die Grundfläche fällt in den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises der Grundfläche.
2. Die Seitenkanten sind kongruent.
3. Die Seitenflächen sind kongruente gleichschenklige Dreiecke.
4. Für die regelmäßige Pyramide definieren wir die *Seitenhöhe*.

Definition: Sei $VA_1A_2\ldots A_n$ eine regelmäßige Pyramide mit der Grundfläche $A_1A_2\ldots A_n$. Die Höhe VM einer Seitenfläche nennt man *Seitenhöhe* der Pyramide.
Der Abstand vom Mittelpunkt der Grundfläche $A_1A_2\ldots A_n$ zur Grundkante heißt Bestimmungshöhe der Grundfläche.
Die Länge der Seitenhöhe bezeichnen wir mit h_s und die Bestimmungshöhe der Grundfläche mit h_b.

Beispiel: Sei $VABCD$ eine regelmäßige vierseitige Pyramide und M der Mittelpunkt der Strecke BC. Dann ist OM die Bestimmungshöhe und $OM = h_b$. VM ist die Seitenhöhe der Pyramide und $VM = h_s$.

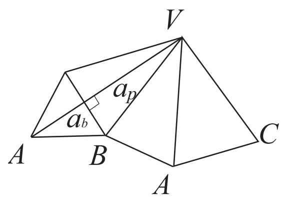


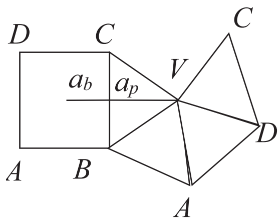
Bemerkung: Da die Seitenflächen einer regelmäßigen Pyramide alle gleich sind, hängt das Berechnen der Seitenhöhe nicht von der gewählten Seitenfläche ab.
Die Seitenhöhe kann mithilfe des Lehrsatzes der 3 Senkrechten konstruiert werden:
a) man konstruiert die Projektion der Spitze V auf die Grundfläche und bezeichnet den Punkt mit O;
b) durch O zeichnet man die Senkrechte OM auf eine Seitenkante, z.B. auf BC.
c) Laut Lehrsatz der 3 Senkrechten ist $VM \perp BC$.

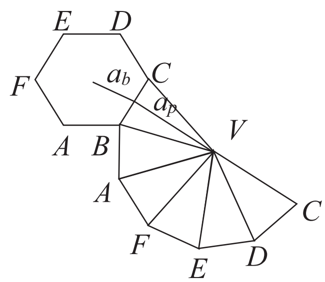
Bemerkung: Die Seitenhöhe der regelmäßigen Pyramide ist auch Seitenhalbierende in der gewählten Seitenfläche, welche ein gleichschenkliges Dreieck ist.
Das Dreieck MOV ist rechtwinklig in O und die Seiten sind: $VO = h$, $OM = h_b$, $VM = h_s$.
Laut Lehrsatz des Pythagoras ist: $h_s^2 = h_b^2 + h^2$. Wenn m die Länge der Seitenkante ist, dann ist
$m^2 = h_s^2 + \frac{L_n^2}{4}$, wobei L_n die Grundkante ist.

5. Die Abwicklung einer regelmäßigen Pyramide besteht aus einem regelmäßigen n-Eck (der Grundfläche oder Basis der Pyramide) und aus n gleichschenkligen Dreiecken (den Seitenflächen).

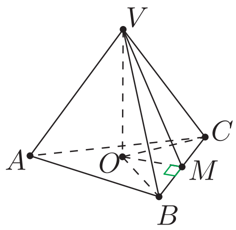
Für $n = 3$, regelmäßige dreiseitige Pyramide	Für $n = 4$, regelmäßige vierseitige Pyramide	Für $n = 6$, regelmäßige sechsseitige Pyramide







Ein Sonderfall ist das regelmäßige Tetraeder (die regelmäßige dreiseitige Pyramide mit allen Flächen gleichseitige Dreiecke).



Die Mantelfläche der Pyramide ist die Summe aller Seitenflächen und wird mit $\mathcal{A}_M$ bezeichnet.
Die Seitenhöhe ist auch die Senkrechte aus der Spitze der Pyramide auf die Grundkante.

Dann ist $\mathcal{A}_{BCV} = \dfrac{VM \cdot BC}{2}$ und $\mathcal{A}_M = n\,\mathcal{A}_{BCV}$, n ist die Anzahl der Grundkanten.

Falls die Grundkante L_n ist, ist die Mantelfläche $\mathcal{A}_l = n \cdot \dfrac{L_n \cdot a_p}{2}$ oder $\mathcal{A}_M = \dfrac{U_{Gf} \cdot h_s}{2}$,
wobei $\mathcal{U}_{Gf}$ der Umfang der Basis der Pyramide ist.

Die Oberfläche der Pyramide ist die Summe der Mantelfläche und der Grundfläche. Die Oberfläche wird mit $\mathcal{O}$ bezeichnet.

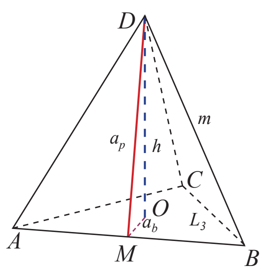
Wenn der Flächeninhalt der Basis $\mathcal{A}_{Gf}$ ist, dann ist $\mathcal{O} = \mathcal{A}_M + \mathcal{A}_{Gf}$ oder $\mathcal{O} = \dfrac{U_{Gf} \cdot (h_s + h_b)}{2}$.

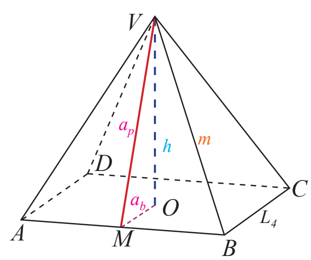
Sonderfälle für Flächenberechnungen im Tetraeder:

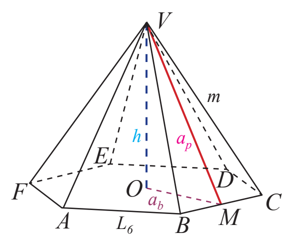
Die Mantelfläche des *regelmäßigen Tetraeders* mit der Kante a ist $\mathcal{A}_M = 3 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ und die Oberfläche ist $\mathcal{O} = a^2\sqrt{3}$.

Anwendungen

Für $n = 3$, regelmäßige dreiseitige Pyramide	Für $n = 4$, regelmäßige vierseitige Pyramide	Für $n = 6$, regelmäßige sechsseitige Pyramide







Für $n = 3$:

$$h_b = \frac{L_3\sqrt{3}}{6},\ h_s = \sqrt{h^2 + \frac{L_3^2}{12}},$$

$$\mathcal{A}_M = \frac{U_{Gf} \cdot h_b}{2},\ \mathcal{O} = \mathcal{A}_M + \mathcal{A}_b$$

$$\mathcal{A}_M = \frac{3L_3 \cdot h_b}{2}$$

$$\mathcal{O} = \frac{3L_3 \cdot h_b}{2} + \frac{L_3^2\sqrt{3}}{6}$$

Für $n = 4$:

$$h_b = \frac{L_4}{2},\ h_s = \sqrt{h^2 + \frac{L_4^2}{4}},$$

$$\mathcal{A}_M = \frac{U_{Gf} \cdot h_b}{2},\ \mathcal{O} = \mathcal{A}_M + \mathcal{A}_b$$

$$\mathcal{A}_M = \frac{4L_4 \cdot h_b}{2}$$

$$\mathcal{O} = 2L_4 \cdot h_b + L_4^2$$

Für $n = 6$:

$$h_b = \frac{L_6\sqrt{3}}{2},\ h_s = \sqrt{h^2 + \frac{3L_6^2}{4}},$$

$$\mathcal{A}_M = \frac{U_{Gf} \cdot h_b}{2},\ \mathcal{O} = \mathcal{A}_M + \mathcal{A}_b$$

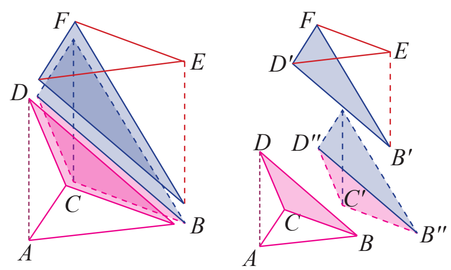
$$\mathcal{A}_M = \frac{6L_6 \cdot h_b}{2}$$

$$\mathcal{O} = 3L_6 \cdot h_b + \frac{3\sqrt{3}}{2}L_6^2$$

Wenn zwei Pyramiden kongruente Grundflächen und gleiche Höhen haben, dann haben sie gleiche Volumen.

Lehrsatz: Das Volumen eines Tetraeders ist ein Drittel des Volumens des geraden Prismas, wenn die Basis und die Höhe kongruent mit jenen der Pyramide sind.

Beweis: Das Prisma $ABCDEF$ wird entlang der Ebenen (DCB) und (DFB) geschnitten (siehe nebenstehende Zeichnung). Wir werden beweisen, dass 3 Tetraeder mit gleichen Volumen entstehen. Seien ABC und $D'EF$ die Grundflächen und AD bzw. EB' die Höhen (gleich mit der Höhe des Prismas) der Tetraeder $ABCD$ und $D'EFB'$. Folglich haben beide Tetraeder gleiche Volumen. Die rechtwinkligen kongruenten Dreiecke EFB' und $F'C'B''$ seien die Grundflächen der Tetraeder $D'EFB'$ und $D''F'C'B''$. Die Höhe beider Tetraeder ist der Abstand von D zu der Ebene $BCFE$. Es folgt, dass auch diese gleiche Volumen haben. Also haben wir das gerade Prisma in 3 Tetraeder mit gleichem Volumen zerlegt.



Schlussfolgerung: Das Volumen des Tetraeders ist $\mathcal{V} = \dfrac{A_{Gf} \cdot h}{3}$.

Das regelmäßige Tetraeder ist eine Pyramide, deren Flächen alle gleichseitige Dreiecke sind, und die Höhe fällt in den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises der Basis. $\mathcal{V} = \dfrac{A_{Gf} \cdot h}{3}$ und $\mathcal{A}_{Gf} = \dfrac{L_3^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $h = \dfrac{L_3 \cdot \sqrt{6}}{3}$, $\mathcal{V} = \dfrac{L_3^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$.

Bemerkung. Eine Pyramide, deren Basis ein Vieleck mit n Kanten ist, kann in $n - 2$ dreiseitige Pyramiden mit gleichen Höhen zerlegt werden. Die Formel $\mathcal{V} = \dfrac{A_{Gf} \cdot h}{3}$ ist für jede Pyramide gültig.

Wichtige Bemerkung: Die obigen Formeln müssen nicht auswendig gelernt werden. Man kann sie mithilfe der folgenden allgemeingültigen Formeln ableiten:

1. Die Mantelfläche der Pyramide ist die Summe aller Seitenflächen. Wenn die Pyramide regelmäßig ist, dann ist $\mathcal{A}_M = \dfrac{U_{Gf} \cdot h_s}{2}$.
2. Die Oberfläche der Pyramide ist die Summe der Mantelfläche und der Grundfläche. $O = A_M + A_{Gf}$.
3. Das Volumen der Pyramide ist ein Drittel des Produkts aus Grundfläche und der Höhe. $\mathcal{V} = \dfrac{A_{Gf} \cdot h}{3}$.

MINITEST Wähle die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort ist richtig.

1. Sei eine regelmäßige vierseitige Pyramide mit der Seitenkante $9\sqrt{3}$ cm und der Grundkante 18 cm. Das Volumen der Pyramide ist:

A. 948 cm³	**B.** 927 cm³	**C.** 948 cm³	**D.** 972 cm³

2. Sei eine regelmäßige dreiseitige Pyramide $VABC$ mit der Grundkante 18 cm und der Höhe $3\sqrt{6}$ cm. Die Seitenhöhe der Pyramide beträgt:

A. 9 cm	**B.** 6 cm	**C.** 12 cm	**D.** 8 cm

3. Sei eine regelmäßige vierseitige Pyramide mit der Grundkante $6\sqrt{3}$ cm und mit der Höhe 9 cm. Das Maß des Flächenwinkels gebildet von einer Seitenfläche mit der Basis ist:

A. 30°	**B.** 45°	**C.** 60°	**D.** 75°

4. Sei eine regelmäßige vierseitige Pyramide mit der Grundkante $8\sqrt{3}$ cm und mit der Seitenhöhe 20 cm. Der Abstand zwischen Mittelpunkt der Grundfläche und einer Seitenfläche ist:

A. 8,4 cm	**B.** 9,6 cm	**C.** 7,2 cm	**D.** 10,8 cm

Aufgaben

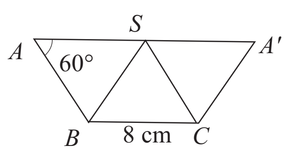
1 Sei eine regelmäßige vierseitige Pyramide mit der Grundkante l, der Seitenkante m, der Bestimmungshöhe h_b, der Höhe h, mit der Grundfläche $\mathcal{A}_{Gf}$, der Mantelfläche $\mathcal{A}_M$, der Oberfläche $\mathcal{O}$ und dem Volumen $\mathcal{V}$. Übertragt die Tabelle ins Heft und ergänzt sie.

	a)	b)	c)	d)
l	6 cm		10 cm	
m	6 cm			25 cm
h_b		20 cm		
h		12 cm		
$\mathcal{A}_{Gf}$				900 m^2
$\mathcal{A}_M$				
$\mathcal{O}$				
$\mathcal{V}$			400 cm^3	

2 Alle Kanten der regelmäßigen vierseitigen Pyramide $VABCD$ sind 18 cm. Berechnet:
a) den Flächeninhalt des Diagonalenschnitts;
b) das Maß des Winkels BVD.

3 Berechnet die Oberfläche der regelmäßigen vierseitigen Pyramide $SABCD$, wenn das Dreieck SBD rechtwinklig ist und einen Flächeninhalt von 288 cm^2 hat.

4 In der nebenstehenden Zeichnung ist das Trapez die Abwicklung der Seitenflächen einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide.



a) Beweist, dass die Seitenkante dieselbe Länge wie die Grundkante hat.
b) Berechnet die Mantelfläche und die Oberfläche der Pyramide.

5 $ABCD$ ist eine regelmäßige Pyramide mit der Spitze in A, den Grundkanten 12 cm und den Seitenkanten 10 cm.
a) Berechnet die Höhe und die Seitenhöhe.
b) Bestimmt den Punkt P auf AD, sodass der Flächeninhalt von PBC minimal ist.

6 Sei $VABCD$ eine regelmäßige vierseitige Pyramide mit der Seitenkante 12 cm und der Mantelfläche $144\sqrt{3}$ cm^2.
a) Bestimmet das Maß des spitzen Winkels AVB.
b) Berechnet das Volumen der Pyramide.

7 Die Höhe einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide ist 18 cm und der Radius des Umkreises der Basis ist 6 cm. Berechet:
a) die Länge der Grundkante;
b) die Mantelfläche der Pyramide.

8 Sei $ABCD$ ein Tetraeder, $AB \perp AC$, $AC \perp AD$ und $AD \perp AB$.
Beweist, dass $Fl^2_{ABC} + Fl^2_{ACD} + Fl^2_{ADB} = Fl^2_{BCD}$.

9 Die Seitenkante der regelmäßigen sechsseitigen Pyramide $SABCDEF$ bildet mit der Basis einen Winkel von 60°. Wenn $AB = 24$ mm, berechnet:
a) die Höhe der Pyramide;
b) den Abstand von dem Mittelpunkt der Basis O zu der Geraden SA.

10 Der Diagonalschnitt MAD der regelmäßigen sechsseitigen Pyramide $MABCDEF$ ist äquivalent mit der Grundfläche und $AB = 4\sqrt{2}$ cm. Berechnet:
a) die Höhe und das Volumen der Pyramide;
b) den Tangens des Winkels zwischen der Seitenkante VA und der Basis (ABC).

11 Sei eine regelmäßige vierseitige Pyramide. Wir bezeichnen mit l, m, h_s, h die Längen der Grundkante, der Seitenkante, der Seitenhöhe bzw. der Höhe, mit $\mathcal{A}_{Gf}$, $\mathcal{A}_M$, $\mathcal{O}$ die Grundfläche, die Mantelfläche bzw. die Oberfläche der Pyramide und mit $\mathcal{V}$ das Volumen. Übertragt die Tabelle ins Heft und ergänzt sie.

	a)	b)	c)	d)
l	12 cm	6 cm		
m			$6\sqrt{3}$ cm	24 dm
h_s			$6\sqrt{2}$ cm	
h	6 cm			
$\mathcal{A}_{Gf}$				
$\mathcal{A}_M$		27 cm^2		
$\mathcal{O}$				
$\mathcal{V}$				576 dm^3

12 Ergänzt die Tabelle von Übung **11** für eine regelmäßige sechsseitige Pyramide.

L3. Flächen und Volumen des regelmäßigen Pyramidenstumpfes

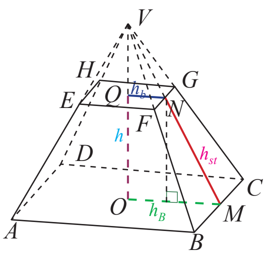
Ein regelmäßiger Pyramidenstumpf entsteht durch das Entfernen der kleinen Pyramide, nachdem die regelmäßige Pyramide mit einer Ebene parallel zur Basis geschnitten wurde.

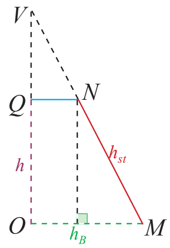
1. Definition Die Strecke, welche die Mitten zweier Grundkanten derselben Seitenfläche des Pyramidenstumpfes verbindet, heißt Seitenhöhe des Pyramidenstumpfes h_{st}.

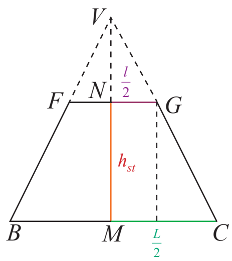
Die Seitenflächen sind kongruente gleichschenklige Trapeze, also sind die Seitenhöhen aller Seitenflächen gleich.

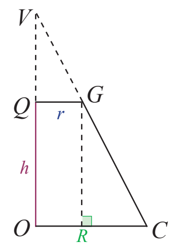
Beziehungen zwischen den Elementen des Pyramidenstumpfes

Seien L und l die große Grundkante bzw. die kleine Grundkante. Mit a_B und a_b bezeichnen wir die Bestimmungshöhe der großen bzw. der kleinen Grundfläche und mit m die Seitenkante. Die Radien der Umkreise der großen bzw. der kleinen Grundfläche bezeichnen wir mit R bzw. r.









Im rechtwinkligen Trapez $QNMO$,

$$h_{st} = \sqrt{h^2 + (h_B - h_b)^2}$$

Im rechtwinkligen Trapez $NMCG$,

$$m = \sqrt{h_{st}^2 + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2}$$

Im rechtwinkligen Trapez $OCGQ$,

$$m = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$$

Die Seitenflächen eines regelmäßigen Pyramidenstumpfes sind gleichschenklige Trapeze, deren Grundlinien die Grundkanten des Pyramidenstumpfes und die Schenkel Seitenkanten des Stumpfes sind.
Die Grundflächen des regelmäßigen Pyramidenstumpfes sind regelmäßige Vielecke. Die kleine Pyramide (die entfernt wurde) ist der Pyramide, aus der der Pyramidenstumpfes stammt, ähnlich. Das Ähnlichkeitsverhältnis entspricht dem Verhältnis zwischen der kleinen und der großen Grundkante.

2. Definition: Die Mantelfläche des Pyramidenstumpfes ist die Summe der Flächeninhalte der Seitenflächen und wird mit $\mathcal{A}_M$ bezeichnet.
3. Definition Die Oberfläche des Pyramidenstumpfes ist die Summe der Mantelfläche und der beiden Grundflächen und wird mit $\mathcal{O}$ (oder $\mathcal{A}_t$) bezeichnet.

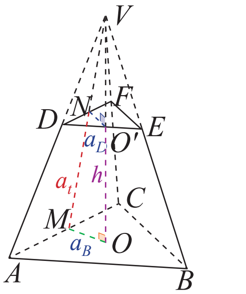
Folglich ist $\mathcal{O} = \mathcal{A}_M + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$, wo man mit $\mathcal{A}_B$ und $\mathcal{A}_b$ den Flächeninhalt der großen bzw. der kleinen Grundfläche bezeichnet.

Das Volumen des Pyramidenstumpfes ist die Differenz zwischen dem Volumen der ursprünglichen Pyramide und dem der entfernten Pyramide.

1. Lehrsatz Das Volumen des Pyramidenstumpfes mit der großen Grundfläche $\mathcal{A}_B$, der kleinen Grundfläche $\mathcal{A}_b$ und Höhe h ist $\mathcal{V} = \frac{h}{3}\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}\right)$.

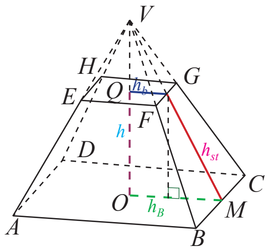
Wir bezeichnen mit L die große Grundkante, mit l die kleine Grundkante und mit h die Höhe.

Regelmäßiger dreiseitiger Pyramidenstumpf	Regelmäßiger vierseitiger Pyramidenstumpf	Regelmäßiger sechsseitiger Pyramidenstumpf



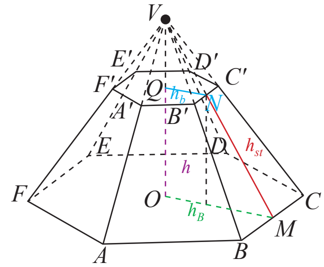
$\mathcal{U}_{Gf} = 3L$, $\mathcal{U}_{gf} = 3l$

$\mathcal{A}_B = \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}$, $\mathcal{A}_b = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$



$\mathcal{U}_{Gf} = 4L$, $\mathcal{U}_{gf} = 4l$

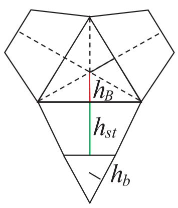
$\mathcal{A}_B = L^2$, $\mathcal{A}_b = l^2$

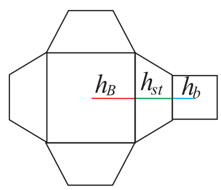


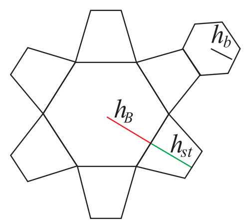
$\mathcal{U}_{Gf} = 6L$, $\mathcal{U}_{gf} = 6l$

$\mathcal{A}_B = 6 \cdot \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}$, $\mathcal{A}_b = 6 \cdot \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Die Grundflächen des regelmäßigen Pyramidenstumpfes sind regelmäßige Vielecke und sind parallel zueinander.
Die Seitenkanten sind kongruent und bilden mit den Grundflächen kongruente Winkel.
Die Seitenflächen sind kongruente gleichschenklige Trapeze.
Die Abwicklung eines regelmäßigen Pyramidenstumpfes besteht aus n kongruenten Trapezen und zwei ähnlichen regelmäßigen Vielecken.







$\mathcal{A}_M = \dfrac{(\mathcal{U}_{Gf} + \mathcal{U}_{gf}) \cdot h_{st}}{2}$, $\mathcal{O} = \mathcal{A}_M + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$, $\mathcal{V} = \dfrac{h}{3}(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b})$. Mit h bezeichnen wir die Höhe des Pyramidenstumpfs, mit $\mathcal{A}_B$ die große Grundfläche und mit $\mathcal{A}_b$ die kleine Grundfläche.
Die Mantelfläche des Pyramidenstumpfes ist die Summe aller Seitenflächen.
Die Oberfläche des Pyramidenstumpfes ist die Summe der Mantelfläche und der beiden Grundflächen.
Das Volumen des Pyramidenstumpfes ist die Differenz zwischen dem Volumen der Pyramide, aus dem der Pyramidenstumpf stammt, und der entfernten Pyramide.

MINITEST *Wähle die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort ist richtig.*

1. Ein regelmäßiges Tetraeder wird mit einer Ebene parallel zu einer seiner Flächen durch die Mitte der Höhe geschnitten. Das Verhältnis der Volumen des Tetraeders und des erhaltenen Pyramidenstumpfes ist:			
A. $\frac{1}{8}$	**B.** $\frac{7}{8}$	**C.** $\frac{8}{7}$	**D.** $\frac{8}{1}$
2. Sei ein regelmäßiger vierseitiger Pyramidenstumpf mit der großen Grundkante von 15 cm und der kleinen Grundkante von 3 cm. Wenn die Seitenhöhe 8 cm lang ist, dann beträgt die Seitenkante:			
A. 12 cm	**B.** 10 cm	**C.** 9 cm	**D.** 15 cm
3. Sei ein regelmäßiger sechsseitiger Pyramidenstumpf mit der Seitenhöhe von 12 cm, der Seitenkante 13 cm und der Grundkante von 8 cm. Der Radius des Umkreises der großen Grundfläche ist:			
A. 9 cm	**B.** 18 cm	**C.** 12 cm	**D.** 15 cm

Aufgaben

1 In der Tabelle sind L, l, h, h_{st}, m, $\mathcal{A}_M$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{V}$ die große Grundkante, die kleine Grundkante, die Höhe, die Seitenhöhe, die Seitenkante, die Mantelfläche, die Oberfläche bzw. das Volumen des regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes. Übertragt ins Heft, berechnet und ergänzt die fehlenden Daten in der Tabelle.

L	l	h	h_{st}	m	$\mathcal{A}_M$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{V}$
18	10	3					
16	6		13				
	8	6					1664
10			3		96		

2 $ABCDA'B'C'D'$ ist ein regelmäßiger vierseitiger Pyramidenstumpf mit $AB = 12$ cm, $A'B' = 4$ cm und $AA' = 4\sqrt{5}$ cm. Berechnet:
a) die Oberfläche des Pyramidenstumpfes;
b) das Maß des Winkels zwischen den Ebenen (ABC) und (BCB').

3 Ein Wasserbehälter hat die Form eines regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes. Die große Grundkante des Pyramidenstumpfes ist $12\sqrt{2}$ dm, die kleine Grundkante ist $8\sqrt{2}$ dm und die Seitenfläche $160\sqrt{3}$ dm². Berechnet:
a) die Höhe des Behälters;
b) den maximalen Rauminhalt des Behälters in Liter.

4 Die Höhe eines regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes ist 3 cm, sein Volumen ist 208 cm³ und die große Grundfläche 9-mal größer als die kleine Grundfläche. Berechnet:
a) die Grundlinien des Pyramidenstumpfes.
b) den Tangens des Winkels gebildet von der Diagonalen des Stumpfes und der großen Grundfläche.

5 Das Volumen eines regelmäßigen dreiseitigen Pyramidenstumpfes ist $\frac{1053\sqrt{3}}{2}$ cm³, die Höhe ist 6 cm und die kleine Grundkante 9 cm. Berechnet:
a) die große Grundkante;
b) die Mantelfläche des Pyramidenstumpfes;
c) die Zahl p, wenn das Volumen des Pyramidenstumpfs p % des Volumens der Pyramide, aus der der Stumpf stammt, darstellt.

6 Sei ein regelmäßiger dreiseitiger Pyramidenstumpf mit den Bestimmungshöhen der Grundflächen gleich $4\sqrt{3}$ cm bzw. $\sqrt{3}$ cm und der Höhe 3 cm. Berechnet:
a) das Volumen des Pyramidenstumpfes;
b) das Volumen der Pyramide, aus der der Stumpf stammt;
c) den Tangens des Winkels zwischen der Seitenkante und der großen Grundfläche.

7 Sei eine regelmäßige dreiseitige Pyramide mit der Grundkante 12 cm und der Seitenkante $8\sqrt{3}$ cm. Die Pyramide wird im Abstand von 4 cm von der Grundfläche parallel zu dieser geschnitten. Berechnet das Volumen und die Mantelfläche des entstandenen Pyramidenstumpfes.

8 $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ ist ein regelmäßiger sechsseitiger Pyramidenstumpf mit $AB = AA' = 20$ cm. Das Maß des Winkels zwischen der Diagonalen AD' und der Ebene (ABC) ist 30°.
a) Beweise, dass $A'B'$=10 cm.
b) Berechne die Mantelfläche.
c) Berechne die Höhe der Pyramide, aus der der Stumpf entstanden ist.

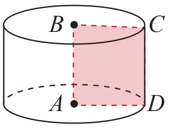
9 $ABCDEFMNPQRS$ ist ein regelmäßiger sechsseitiger Pyramidenstumpf, O ist der Mittelpunkt der großen Grundfläche $ABCDEF$, $AB = 12$ cm, $MO \perp OQ$. Die Seitenkante bildet mit der Ebene (ABC) einen Winkel mit dem Maß von 45°. Berechnet:
a) die Seitenkante des Pyramidenstumpfes;
b) den Flächeninhalt des Diagonalschnitts $ADQM$;
c) den Sinus des Winkels zwischen einer Seitenfläche und der großen Grundfläche des Pyramidenstumpfes;
d) die Oberfläche und das Volumen des Pyramidenstumpfes.

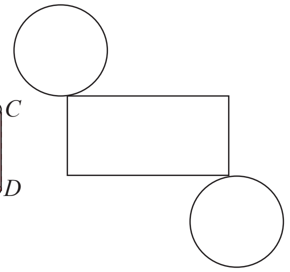
3 Flächen und Volumen der runden geometrischen Körper

L1. Mantelfläche, Oberfläche und Volumen des geraden Kreiszylinders

Wir verstehen anhand von Beispielen

Der gerade Kreiszylinder ist ein geometrischer Körper, der durch die Drehung eines Rechtecks *ABCD* um eine seiner Seiten entsteht. Ist die Gerade *AB* die Drehachse, dann sind die Seiten *AD* und *BC* Radien der Kreise der Grundflächen des Zylinders und *CD* ist die Erzeugende des Zylinders.



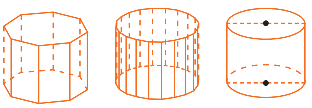


Die Fläche, die entsteht, wenn die Erzeugende die Grundflächen beschreibt, heißt *Mantelfläche* des Zylinders.
Die Abwicklung der Mantelfläche eines Zylinders ist ein Rechteck, dessen Länge dem Umfang der Grundfläche und dessen Breite der Höhe des Zylinders entspricht.

1. Definition: Die *Mantelfläche* des geraden Kreiszylinders entspricht der Seitenfläche und wird mit $\mathcal{A}_M$ bezeichnet.
2. Definition: Die Oberfläche des geraden Kreiszylinders ist die Summe der Mantelfläche und der Flächeninhalte der beiden Grundflächen. Sie wird mit $\mathcal{O}$ (oder $\mathcal{A}_t$) bezeichnet.

Sei $\mathcal{A}_{Gf}$ die Grundfläche, dann ist $\mathcal{O} = \mathcal{A}_M + 2\mathcal{A}_{Gf}$, wie auch beim Prisma.
Gemäß der Abwicklung des geraden Kreiszylinders ist $\mathcal{A}_M = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot E$, und $\mathcal{O} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (E + R)$, wo R der Radius der Grundfläche und E die Erzeugende des Zylinders ist.

Wir können die Fläche eines Diskus mit der Fläche eines regelmäßigen Vielecks mit immer kleiner werdenden Seiten approximieren. Ebenso kann das Volumen des Zylinders mit dem Volumen eines regelmäßigen Prismas, dessen Grundfläche in die Kreisfläche des Zylinders eingeschrieben ist, approximieren. Die Höhe des Prismas ist, gleich mit der Erzeugenden des Zylinders.



Aus der Formel für das Volumen eines regelmäßigen Prismas kann die Formel für das Berechnen des Volumens eines Zylinders mit dem Radius der Grundfläche R und der Erzeugenden G abgeleitet werden. Weil die Höhe des Zylinders gleich ist mit der Erzeugenden, folgt $\mathcal{V} = \mathcal{A}_{Gf} \cdot h$ oder $\mathcal{V} = \pi \cdot R^2 \cdot E$.

Anwendungen

1. Beispiel: Eine Schildkröte startet aus dem Punkt *A,* der sich auf einem Grundkreis des Zylinders mit dem Radius R und der Höhe $\pi \cdot R$ befindet, und umkreist den Zylinder auf seiner Seitenfläche mit einer Steigung von 10 %, bis sie den Punkt auf der anderen Grundfläche, der auf derselben Erzeugenden liegt, erreicht.
a) Wie oft umkreist die Schildkröte den Zylinder?
b) Wenn der Weg der Schildkröte $2 \cdot \pi \cdot \sqrt{101}$ m lang ist,berechnet den Radius, die Mantelfläche und das Volumen des Zylinders.

Lösung. **a)** Durch das Abrollen der Mantelfläche erhalten wir ein Rechteck mit den Maßen von $2 \cdot \pi \cdot R$ und $\pi \cdot R$. Bei einer kompletten Umkreisung (Startpunkt auf der Erzeugenden und das Ankommen auf der Erzeugenden) legt die Schildkröte 10 % von der Höhe $2 \cdot \pi \cdot R$, also $\frac{\pi R}{5}$ zurück. Folglich muss die Schildkröte den Zylinder 5-mal umkreisen.

b) Durch das Abrollen der Seitenfläche bemerkt man, dass der Weg, den die Schildkröte zurückgelegt hat, die Diagonale in einem Rechteck mit den Maßen $5 \cdot 2\pi R$ und πR darstellt. Also ist $d = \pi R\sqrt{101}$. Weil $d = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{101}$, ist $R = 2$ m, $G = h = 2\pi$ m, $\mathcal{O} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot G = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 2\pi = 8\pi^2$ (m²) und $\mathcal{V} = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 2\pi = 8\pi^2$ (m³).

Aufgaben

1 Schreibt die Tabelle in eure Hefte ab und ergänzt sie, wenn R, E, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_M$, $\mathcal{O}$ und $\mathcal{V}$ Radius, Erzeugende, Flächeninhalt der Basis, Mantelfläche, Oberfläche bzw. Volumen eines Zylinders sind.

	R	E	$\mathcal{A}_b$ (cm²)	$\mathcal{A}_M$ (cm²)	$\mathcal{O}$ (cm²)	$\mathcal{V}$ (cm³)
a)	5 cm	10 cm				
b)	8 cm			80π		
c)		40 mm	9π			
d)				108π	270π	
e)		1,6 dm				256π

2 Der Durchmesser der Basis eines Zylinders ist 20 cm und die Höhe ist gleich mit dem halben Radius der Basis. Berechnet die Mantelfläche.

3 Die Länge des Radius eines Zylinders ist 15 cm und die der Erzeugenden $\frac{3}{5}$ davon. Berechnet die Länge der Erzeugenden und das Volumen des Zylinders.

4 Der Achsenschnitt eines geraden Kreiszylinders ist ein Quadrat mit der Seite 20 cm. Berechnet den Radius, die Erzeugende, die Mantelfläche und das Volumen des Zylinders.

5 Der Durchmesser der Basis eines Zylinders ist 16 cm. Der Abstand vom Mittelpunkt der Basis zu der Mitte einer Erzeugenden ist 10 cm. Berechnet die Erzeugende, die Oberfläche und das Volumen des Zylinders.

6 Das Verhältnis von Radius und Erzeugenden eines Zylinders ist $\frac{4}{3}$. Die Summe der Längen der Erzeugenden und des Durchmessers der Basis ist 33 cm. Berechnet den Flächeninhalt des Achsenschnittes und das Volumen des Zylinders.

7 Die Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders ist 90π cm² und das Volumen 225π cm³. Berechnet den Radius, die Erzeugende und die Oberfläche des Zylinders.

8 Die Oberfläche eines geraden Kreiszylinders ist um 72π cm² größer als seine Mantelfläche und die Erzeugende ist 16 cm. Berechnet Radius, Volumen des Zylinders und die Diagonale des Achsenschnittes.

9 $ABCD$ ist der Achsenschnitt eines geraden Kreiszylinders, $BC = E = 20$ cm. In die Grundfläche mit dem Durchmesser AB wird das gleichseitige Dreieck AEF, dessen Flächeninhalt $75\sqrt{3}$ cm² ist, einbeschrieben.

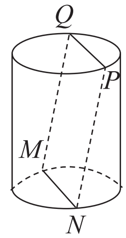
a) Berechnet Radius und Volumen des Zylinders.

b) Berechnet den Abstand von D zu EF.

10 Im dargestellten Zylinder sind MN und PQ parallele und kongruente Sehnen.

a) Beweist, dass $MNPQ$ ein Rechteck ist.

b) Der Radius der Grundfläche und die Sehne MN haben dieselbe Länge von 6 cm und $MQ = 12$ cm. Berechnet die Höhe des Zylinders.

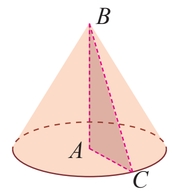


11 Zwecks Werbung werden an der Autobahn 24 zylinderförmige Masten angebracht, die 3 m hoch sind und einen Durchmesser von 40 cm haben.
Zum Anstreichen verwendet man 10 g Farbe pro 1 dm² Fläche. Berechnet die notwendige Farbmasse ($\pi \approx 3{,}15$).

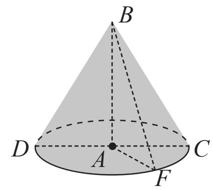
12 Der innere Durchmesser eines 4,5 m langen Rohres ist 36 mm, der äußere 48 mm. Die Dichte des Materials, aus dem es angefertigt ist, ist $\rho = 5$ g/cm³. Berechnet die Masse des Rohres (wähle 3,1 für π).

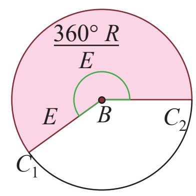
L2. Mantelfläche, Oberfläche und Volumen des geraden Kegels und des geraden Kegelstumpfes

Wir verstehen anhand von Beispielen



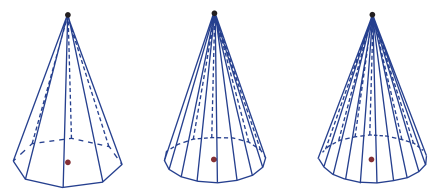
Durch Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete entsteht ein gerader Kreiskegel.
Die Kathete, welche die Drehachse ist, ist die Höhe des Kegels, die andere Kathete ist der Radius und die Hypotenuse die Erzeugende des Kegels.
Die Abwicklung der Seitenfläche des Kegels mit dem Radius R und der Erzeugenden E ist ein Kreisausschnitt (ein Kreissektor) mit dem Radius E und der Bogenlänge gleich mit dem Umfang der Grundfläche des Kegels, also $2\pi R$.
Folglich ist die Mantelfläche des Kegels der Flächeninhalt eines Kreisausschnitts mit dem Radius E und dem Mittelpunktswinkel $\dfrac{360°R}{G}$.





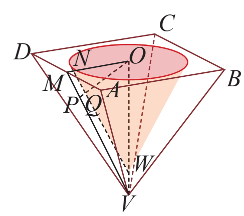
Die Mantelfläche des geraden Kreiskegels ist der Flächeninhalt des Kreisausschnittes (Kreissektors) mit dem Radius E und der Bogenlänge gleich der Länge des Grundkreises des Kegels. $\mathcal{A}_M = \pi RE$.
Die Oberfläche ist die Summe von Mantelfläche und Grundfläche. $\mathcal{O} = \pi RE + \pi R^2$ oder $\mathcal{O} = \pi R\,(E + R)$.

Für das *Volumen* wird die Grundfläche des Kegels mit regelmäßigen Vielecken, deren Seitenlängen immer kürzer werden, approximiert.
Das Volumen der entstandenen Pyramide approximiert dann das Volumen des Kegels. Wir ahnen nun, dass die Formel für das Volumen des Kegels so aussieht wie bei der Pyramide, also:



$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_b \cdot h$ oder $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$.

1. Anwendung: Ein Metallstück hat die Form einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mit der Grundkante 16 cm und der Höhe 6 cm. Aus ihm wird ein kegelförmiges Stück herausgeschnitten, sodass die minimale Dicke der Wände des gebliebenen Stücks 1 cm ist. Bestimmt das Volumen des neuen Stücks.



Lösung. Sei M die Mitte der Kante AD der Pyramide $VABCD$, ON der Radius des Kegels und OW seine Höhe. Die minimale Dicke des neuen Körpers ist in dem Achsenschnitt durch den Punkt M zu erkennen. Es ist der Abstand zwischen den parallelen Geraden NW und MV.
In der Ebene des Dreiecks OMV wird die Senkrechte aus O auf MV konstruiert. Diese schneidet NW in Q und MV in P. Dann ist PQ = 1cm. Die Höhe aus O im rechtwinkligen Dreieck OMV ist

$PO = \dfrac{OM \cdot OV}{MV} = \dfrac{24}{5}$, woraus $OQ = OP - PQ = \dfrac{19}{5}$. Da $\Delta ONW \sim \Delta OMV$, gilt $\dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{19}{24}$, also $ON = \dfrac{19}{3}$ und

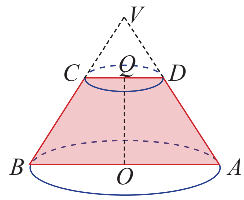
$OW = \dfrac{19}{4}$. Das Volumen des Kegels $\mathcal{V}_{Kegel} = \dfrac{\pi ON^2 \cdot OW}{3} = \dfrac{6859\pi}{108}$ cm³ und das Volumen der Pyramide ist

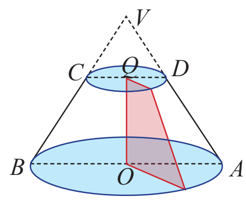
$\mathcal{V}_{Pyramide} = \dfrac{AB^2 \cdot OV}{3} = 512$ cm³.

$\mathcal{V}_{Körper} = \mathcal{V}_{Pyramide} - \mathcal{V}_{Kegel}$.

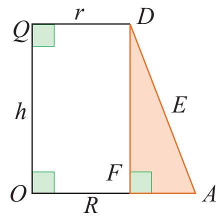
Anwendungen

Der gerade Kreiskegelstumpf wird erhalten, wenn ein gerader Kreiskegel von einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten wird, oder wenn sich ein rechtwinkliges Trapez um den Schenkel dreht, der senkrecht zu den Grundlinien steht. Die Grundlinien des Trapezes sind die Radien der Grundflächen des Stumpfes, der senkrechte Schenkel ist die Höhe und der andere Schenkel die Erzeugende.





Sei $ABCD$ der Achsenschnitt eines geraden Kreiskegelstumpfes, O und Q die Mittelpunkte der Grundflächen, $OA = R$, $QD = r$, $OQ = h$ und $AD = E$.
Wir erhalten im rechtwinkligen Trapez $OADQ$ die Beziehung $E^2 = h^2 + (R - r)^2$.
Die Grundflächen des Stumpfes sind die Diskusse mit den Radien OA und QD, die Höhe des Stumpfes ist OQ.
Die Mantelfläche des Stumpfes ist die Fläche, die die Erzeugende während der Rotation beschreibt und sie wird $\mathcal{A}_l$ bezeichnet.



Die Oberfläche des Stumpfes ist die Vereinigung der Mantelfläche und der beiden Grundflächen und sie wird mit $\mathcal{A}_t$ bezeichnet.

Satz 1. Im geraden Kreiskegelstumpf mit den Radien R, r und der Erzeugenden E gilt: $\mathcal{A}_M = \pi E(R + r)$; $\mathcal{O} = \mathcal{A}_M + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$, wobei $\mathcal{A}_B = \pi R^2$ und $\mathcal{A}_b = \pi r^2$.

Satz 2. Das Volumen des Kegelstumpfes mit den Radien der Grundflächen R, r und der Höhe h ist:
$$\mathcal{V}_{St} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right).$$

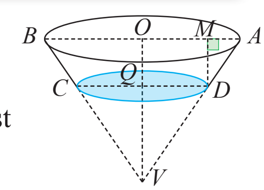
Beweis. Das Volumen des geraden Kreiskegelstumpfes ist die Differenz der Volumen der Kegel mit den Radien R und r und den Höhen h_1 bzw. h_2.

$\mathcal{V}_{St} = \frac{\pi R^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi r^2 \cdot h_2}{3}$. Aus $\Delta VQD \sim \Delta VOA$ folgt $\frac{r}{R} = \frac{h_2}{h_1}$ und daraus $h_2 = \frac{r \cdot h}{R - r}$ und $h_1 = \frac{R \cdot h}{R - r}$. Dann erhalten wir : $\mathcal{V}_{St} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right)$.

Bemerkung. Die Formel $\mathcal{V}_{St} = \frac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)$ für das Volumen der Pyramide gilt auch für den Kegelstumpf, da $\mathcal{A}_B = \pi R^2$ und $\mathcal{A}_b = \pi r^2$, wobei R, r und h die Radien der Grundflächen bzw. die Höhe des Stumpfes sind.

2. Anwendung: Ein Gefäß hat die Form eines Kegelstumpfes. Die Durchmesser der Grundflächen sind 80 cm bzw. 50 cm und die Erzeugende ist 25 cm. Berechnet das Volumen des Gefäßes.

Lösung. $AB = 80$ cm, $CD = 50$ cm und $AD = 25$ cm. Sei $(ABCD)$ ein Achsenschnitt. Falls $M = pr_{AB}D$, ist DM die Höhe des Stumpfes.



Im rechtwinkligen Dreieck AMD ist $h = DM = \sqrt{AD^2 - MA^2} = 20$ cm und das Volumen ist
$$\mathcal{V}_{St} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right) = 21.500\pi \text{ cm}^3.$$

MINITEST *Wählt die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort ist richtig.*

1. Ein gerader Kreiskegel wird mit einer Ebene, die parallel zur Basis durch die Mitte der Höhe gelegt ist, geschnitten. Das Verhältnis der Volumen des kleinen Kegels und des erhaltenen Stumpfes ist:			
A. $\frac{1}{8}$	**B.** $\frac{1}{7}$	**C.** $\frac{7}{1}$	**D.** $\frac{2}{3}$
2. Der Radius eines geraden Kreiskegels ist 9 cm und die Erzeugende 15 cm. Die Mantelfläche ist:			
A. 200π	**B.** 225π	**C.** 180π	**D.** 135π
3. Das Volumen eines Kegelstumpfes ist 732 cm³. Die Radien der Grundflächen sind 15 cm bzw. 12 cm lang und die Erzeugende ist 5 cm lang. Die Höhe des Stumpfes ist:			
A. 9 cm	**B.** 10 cm	**C.** 4 cm	**D.** 5 cm

Aufgaben

1 Durch Drehung des rechtwinkligen Dreiecks *ABC* um die Katheten *AB* und *AC* entstehen zwei gerade Kreiskegel.

a) Zeichnet die beiden Kegel.

b) Nennt Radius, Höhe und Erzeugende eines jeden Kegels.

c) Schreibt die untere Tabelle ins Heft und ergänzt sie, wenn $AB = a$ cm, $AC = b$ cm, $a > b$, R, H, G, A_M, O und V der Radius, die Höhe, die Erzeugende, die Mantelfläche, die Oberfläche bzw. das Volumen des Kegels sind. Vergleicht die Ergebnisse.

	R	H	G	A_M	O	V
Kegel 1	a	b				
Kegel 2	b	a				

d) Ergänzt eine ähnliche Tabelle für $AB = 15$ cm, $AC = 7$ cm.

2 In einem geraden Kreiskegel sind die Erzeugende 5 cm und der Radius 3 cm lang. Berechnet Höhe, Mantelfläche und Volumen des Kegels.

3 Die Erzeugenden eines geraden Kreiskegels sind $18\sqrt{2}$ cm lang und bilden mit der Grundfläche Winkel vom Maß u. Für $u \in \{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$ berechnet Radius, Höhe und Volumen des Kegels.

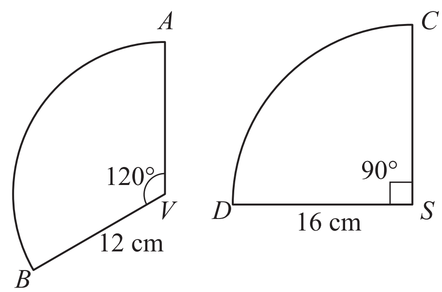
4 Der Durchmesser der Grundfläche eines geraden Kreiskegels ist 18 cm. Das Verhältnis zwischen der Höhe und der Erzeugenden ist $\frac{4}{5}$. Berechnet:

a) Radius, Erzeugende und Höhe des Kegels ;

b) Den Flächeninhalt des Achsenschnittes;

c) Das Verhältnis zwischen dem Flächeninhalt der Grundfläche und der Mantelfläche, als Prozentverhältnis geschrieben.

5 Die Seitenfläche eines Kegels kann durch „Wickeln" eines Kreisausschnittes erhalten werden. Unten sind zwei Kreisausschnitte dargestellt.



a) Bestimmt Radius und Höhe eines jeden Kegels.

b) Berechnet die Mantelflächen und die Volumen der Körper.

6 Der Achsenschnitt eines geraden Kreiskegels ist ein gleichseitiges Dreieck. Der Abstand vom Mittelpunkt der Grundfläche zu der Mitte einer Erzeugenden ist 4 cm. Berechnet:

a) Radius, Erzeugende und Höhe des Kegels.

b) Oberfläche und Volumen des Kegels.

7 Der Durchmesser der Basis eines geraden Kreiskegels ist 64 cm und die Höhe ist 24 cm.

a) Berechnet Radius, Erzeugende und Volumen des Kegels.

b) Der Kegel wird von einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten. Die Schnittfläche ist 144 cm^2. Berechnet den Abstand von der Spitze des Kegels zur Schnittebene.

8 Die Abwicklung der Seitenfläche eines Kegels ist ein Halbkreis mit dem Durchmesser 12 cm.

a) Berechnet Erzeugende und Höhe des Kegels.

b) Berechnet das Volumen des Kegels.

9 Ein kegelförmiges Zelt ist 3 m hoch und bedeckt eine Fläche von 16π m^2. Berechnet, wie viel Stoff für das Zelt notwendig ist. (Auch die Grundfläche ist aus Stoff.)

10 Die Höhe eines geraden Kreiskegels ist 20 cm. Der Kegel wird parallel zur Grundfläche zerschnitten, sodass zwei Körper mit gleicher Mantelfläche erhalten werden. Berechnet den Abstand vom Schnitt zur Grundfläche des Kegels.

11 Der Radius eines geraden Kreiskegels ist 18 cm und die Erzeugende 3 dm. Berechnet:

a) Höhe, Mantelfläche und Volumen des Kegels;

b) das Maß des Mittelpunktswinkels der Abwicklung des Kegels.

12 In die Grundfläche des geraden Kreiskegels mit der Spitze V wird das Quadrat $ABCD$ einbeschrieben.

a) Zeigt, dass VABCD eine regelmäßige Pyramide ist.

b) Berechnet die Höhe des Kegels und das Verhältnis der Volumen der zwei Körper, falls $VA = 8\sqrt{3}$ cm, $AB = 16$ cm.

13 Aus einem Blech in Form eines Kreisausschnittes mit dem Mittelpunktswinkel 120° und der Bogenlänge 60π cm wird ein kegelförmiges Gefäß „gewickelt".

a) Berechnet die Höhe des Kegels.

b) Berechnet das Fassungsvermögen des Gefäßes in Liter (rundet auf zwei Dezimalstellen, mit $\pi = 3{,}14$ und $\sqrt{2} = 1{,}41$).

14 Die Radien eines geraden Kreiskegelstumpfes sind 5 cm bzw. 2 cm und die Höhe 4 cm lang. Berechnet die Erzeugende des Stumpfes.

15 Das Volumen eines geraden Kreiskegelstumpfes ist 84π cm^3, seine Höhe 4 cm und das Verhältnis seiner Radien 0,5. Berechnet:

a) die Längen der Radien des Stumpfes;

b) die Oberfläche des Stumpfes;

c) die Höhe des Kegels, aus dem der Stumpf entstanden ist.

16 Die Höhe eines geraden Kreiskegelstumpfes ist 15 cm, die Erzeugende 25 cm und die Mittellinie des Achsenschnittes 30 cm.

a) Berechnet die Mantelfläche des Stumpfes.

b) Berechnet die Radien und das Volumen des Stumpfes.

17 Die Durchmesser der Grundflächen eines kegelstumpfförmigen Behälters sind 140 cm und 80 cm und die Höhe ist 80 cm. Berechnet, wie viel Liter Wasser in den Behälter passen (Rundet das Ergebnis auf die Einheit.)

18 Der Radius eines geraden Kreiskegels ist 6 cm und seine Höhe beträgt 0,(6) der Länge des Durchmessers.

a) Berechnet die Erzeugende des Kegels.

b) Eine Ebene parallel zur Grundfläche schneidet den Kegel. Die Fläche des Schnittes ist 9π cm^2. Berechnet das Volumen des Stumpfes, der nach dem Schnitt entsteht.

19 Die Höhe eines Zeltes in der Form eines Kegelstumpfes ist 3 m. Die Umfänge der Grundflächen sind 1600π cm bzw. 800π cm. Wie viel Quadratmeter Stoff wurden für das Zelt benötigt?

20 Der Achsenschnitt eines geraden Kreiskegelstumpfes ist ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, $AB = 8$ cm, $CD = 4$ cm.

a) Berechnet die Mantelfläche des Stumpfes.

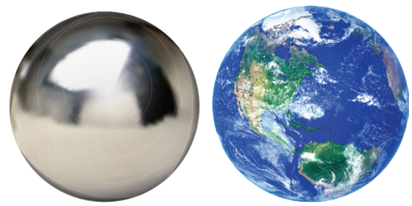
b) Berechnet das Volumen des Stumpfes.

c) Berechnet die Länge des kürzesten Weges von A zu B auf der Seitenfläche des Stumpfes.

L3. Die Kugel. Oberfläche und Volumen

Wir verstehen anhand von Beispielen

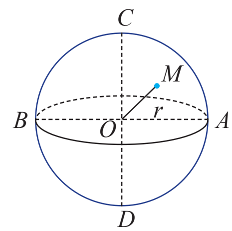
Schon im Altertum wurde die Kugel als „*der vollendetste aller Körper*“ betrachtet (Platon).
Aus allen Punkten des Raumes betrachtet sieht die Kugel gleich aus.
In unserem Umfeld finden wir viele kugelförmige Körper.



Sei O ein fester Punkt des Raumes und r eine positive Zahl (verschieden von null).

1. Definition. Die Menge aller Punkte des Raumes, die sich im Abstand r zu O befinden, heißt *Kugel* (oder *Sphäre*) mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r und wird $\mathcal{S}(O, r)$ bezeichnet.

Ein Punkt M des Raumes gehört genau dann zu der Kugel, wenn der Abstand zu dem festen Punkt O gleich r ist. Man schreibt: $M \in \mathcal{S}(O, r) \Leftrightarrow d(M, O) = r$.



Die Kugel teilt den Raum in zwei:
1) Das Innere der Kugel ist die Menge der Punkte N, deren Abstand zu O kleiner als der Radius ist;
2) Das Äußere der Kugel ist die Menge der Punkte P, deren Abstand zu O größer als der Radius ist.

Bemerkungen.

1. Die Punkte im Inneren gehören nicht zu der Kugel.

2. Die Vereinigung der Punkte der Kugel mit der Menge der Punkte ihres Inneren bilden die *volle Kugel* (*den Ball*) mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r, $B(O, r)$ bezeichnet. Also $B(O, r) = \{P \mid d(P, O) \le r\}$.

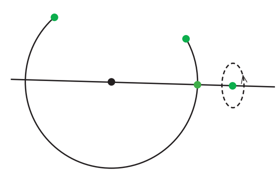
Die Einführung des Begriffs volle Kugel ist notwendig, um ihr Volumen zu definieren.

3. Die Kugel ist ein Drehkörper. Er entsteht durch die vollständige Drehung (um 360 Grad) eines Halbkreises um seinen Durchmesser. Der Mittelpunkt der Kugel ist der Mittelpunkt des Halbkreises und der Radius der Kugel ist der des Halbkreises.

Praktische Arbeit

Prüft mithilfe von ***Geogebra*** oder anderen Programmen den Wahrheitswert der Aussage: „Dreht man einen Kreisbogen, der länger als ein Halbkreis ist, um 360 Grad um eine Gerade, die durch den Mittelpunkt des Kreises und noch zwei Punkte des Bogens geht, so entsteht eine Kugel.”

Der Durchschnitt einer Ebene α mit der Kugel $\mathcal{S}(O, r)$ hängt vom Abstand der Ebene α zu dem Mittelpunkt der Kugel ab.



Satz. Folgende Situationen sind möglich:

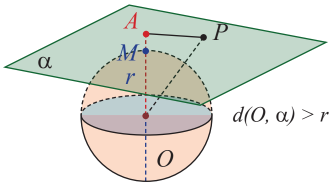
a) $\alpha \cap \mathcal{S}(O, r) = \varnothing$, falls $d(O, \alpha) > r$. Die Ebene α liegt *außerhalb* der Kugel.

b) $\alpha \cap \mathcal{S}(O, r)$ enthält einen einzigen Punkt, falls $d(O, \alpha) = r$. Die Ebene ist in dem Punkt *tangent* an die Kugel.

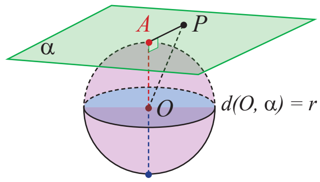
c) $\alpha \cap \mathcal{S}(O, r)$ ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt der Projektion von O auf α, falls $d(O, \alpha) < r$. Die Ebene ist eine *Sekante* der Kugel.

Beweis. Sei A die Projektion des Punktes O auf die Ebene α und M der Schnittpunkt der Halbgeraden OA mit der Kugel. Dann ist $d(O, \alpha) = OA$ und $OM = r$.

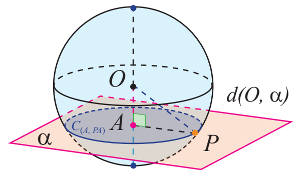
a) Aus $OM < OA$ folgt, dass M auf der Strecke OA liegt, also für jeden Punkt P der Ebene gilt:
$d(O, P) > d(O, \alpha) > r$.
Dann ist $\alpha \cap \mathcal{S}(O, r) = \varnothing$.



b) Für jeden Punkt $P \in \alpha$, ist das ΔOAP rechtwinklig. Dann $OP > OA = r$, also $P \notin \mathcal{S}(O, r)$.
Folglich $\alpha \cap \mathcal{S}(O, r) = \{A\}$.

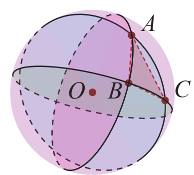


c) Wenn $P \in \alpha \cap \mathcal{S}(O, r)$ ist das ΔOAP rechtwinklig und
$PA = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{r^2 - OA^2}$ ist konstant. Deshalb gilt:
$\alpha \cap \mathcal{S}(O, r) = \mathcal{C}(O, PA)$.



Sonderfall: Wenn $d(O, \alpha) = 0$, gehört der Mittelpunkt O der Kugel zu der Ebene α. Der Schnitt ist ein Kreis mit dem Radius r. Die Ebene α enthält dann einen Durchmesser der Kugel und der Schnitt heißt *großer Kreis* der Kugel.
Als zweidimensionale Darstellung der Kugel wird ein Kreis mit demselben Mittelpunkt wie die Kugel gezeichnet und noch ein „abgeflachter" Kreis mit demselben Mittelpunkt, der den Schnitt der Kugel mit einer Ebene darstellt.

Zwei verschiedene Punkte A und B der Kugel liegen auf einem einzigen großen Kreis der Kugel.
Drei verschiedene Punkte A, B, C der Kugel bestimmen drei Bogen auf drei großen Kreisen der Kugel, aber auch ein *sphärisches Dreieck* oder *Kugeldreieck,* und auch das Dreieck ABC im Raum. Dar Flächeninhalt eines Kugeldreiecks kann mit dem des Dreiecks in der Ebene approximiert werden, falls es sehr klein ist. Addiert man alle Flächeninhalte der Dreiecke, die eine Kugel abdecken, so erhält man die Oberfläche der Kugel.



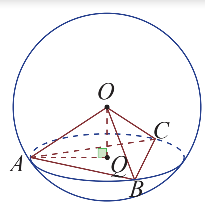
Bemerkung. Die Kugel kann in einer Ebene nicht abgewickelt werden.
Wir akzeptieren die folgenden Formeln, da ihr Beweis zusätzliche Kenntnisse erfordert.

Die Oberfläche der Kugel mit dem Radius r ist $\mathcal{O} = 4\pi r^2$ und das Volumen der Kugel ist $\mathcal{V} = \dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Anwendungen

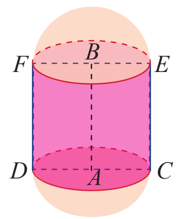
1. Anwendung: Auf der Kugel $\mathcal{S}(O, r)$ seien die Punkte A, B, C, sodass $AB = BC = CA = 9$ cm. Der Abstand von dem Mittelpunkt der Kugel zu der Ebene (ABC) beträgt 3 cm. Berechnet den Radius der Kugel, die Oberfläche und das Volumen der Kugel.

Lösung. $A, B, C \in \mathcal{S}(O, r)$, also $AO = BO = CO = r$. Die Pyramide $OABC$ ist regelmäßig und $Q = pr_{(ABC)}O$ ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC. $AQ = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$ cm.
Im Dreieck AOQ gilt laut Pythagoras: $AO^2 = AQ^2 + OQ^2$, $AO = r = 6$ cm. Dann sind
$\mathcal{O} = 4\pi r^2 = 144\pi\ \text{cm}^2$ und $\mathcal{V} = \dfrac{4\pi r^3}{3} = 288\pi\ \text{cm}^3$.



2. Anwendung: Man zerschneidet eine Kugel mit einer Ebene durch den Mittelpunkt und „klebt” zwischen die zwei Halbkugeln einen Zylinder, sodass das Volumen des neuen Körpers doppelt so groß ist wie das der Kugel. Berechnet die Höhe des Zylinders.

Lösung. Wir stellen fest, dass der Radius des Zylinders gleich ist mit dem der Kugel. Das Volumen der Kugel ist $\mathcal{V}_{Kugel} = \frac{4\pi r^3}{3}$ und das Volumen des Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h ist $\mathcal{V}_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Damit das Volumen des neuen Körpers das Doppelte der Kugel ist, muss $\mathcal{V}_{Kugel} = \mathcal{V}_{Zylinder}$, also $h = \frac{4r}{3}$.



Aufgaben

1 **a)** Ein Halbkreis $\overset{\frown}{AB}$ dreht sich um AB. Welche geometrische Figur beschreibt jeder Punkt des Halbkreises?

b) Und was beschreibt der Halbkreis $\overset{\frown}{AB}$?

2 Schreibt die Tabelle in die Hefte und ergänzt sie. Die Werte gelten für eine Kugel.

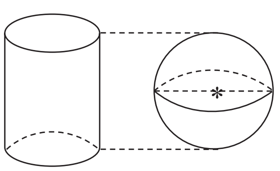
	R	$\mathcal{O}$(cm²)	$\mathcal{V}$(cm³)
a)	4 cm		
b)		144π	
c)			36π
d)	0,06 m		

3 Beim Kugelstoßen wird eine Kugel mit dem Flächeninhalt eines großen Kreises von 49π cm² verwendet. Berechnet den Durchmesser der Kugel.

4 Unten sind ein Zylinder und eine Kugel dargestellt.

a) Schreibt die Beziehung zwischen der Höhe des Zylinders und dem Radius der Kugel.

b) Vergleicht die Radien des Zylinders und der Kugel, wenn die Mantelfläche des Zylinders gleich mit der Oberfläche der Kugel ist.



c) Vergleicht die beiden Radien, wenn die Oberflächen der zwei Körper gleich sind.

5 Eine Kugel, deren Oberfläche 144π cm² ist, wird von einer Ebene geschnitten. Die Länge des Schnittes beträgt 4π cm. Berechnet:

a) den Radius und das Volumen der Kugel;

b) den Abstand vom Schnitt zum Mittelpunkt der Kugel.

6 Eine Kugel mit dem Radius 20 cm wird von einer Ebene 12 cm vom Mittelpunkt entfernt geschnitten. Berechnet:

a) das Volumen der Kugel;

b) den Radius des Schnittes.

7 Die Punkte A, B, C liegen so auf einer Kugel, dass $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm, $CA = 15$ cm. Die Ebene (ABC) enthält den Mittelpunkt der Kugel.

Berechnet den Radius und das Volumen der Kugel.

8 Auf der Kugel mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $r = 8$ cm liegen die Punkte A, B, C, sodass $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$. Berechnet:

a) die Oberfläche und das Volumen der Kugel;

b) den Flächeninhalt des Dreiecks ABC;

c) den Abstand vom Mittelpunkt der Kugel zur Ebene (ABC).

9 Ein Aquarium hat die Form einer Halbkugel mit dem Radius 15 cm:

a) Berechnet seine Oberfläche und sein Volumen.

b) Passen 6 Liter Wasser in das Aquarium, wenn nur 90 % seiner Kapazität gefüllt werden dürfen?

SELBSTBEWERTUNGSTEST

Von Amts wegen:10 Punkte

1. Teil *Wählt den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht, aus. Nur eine Antwort ist richtig.*

5P **1.** Im Quader $ABCDEFGH$ sind $AB = 5$ cm, $AD = 24$ cm, $AE = 10$ cm.
Der Flächeninhalt des Vierecks $ABGH$ ist:

A. 110 cm² B. 120 cm² C. 130 cm² D. 140 cm²

5P **2.** Die Seitenkante einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist 12 cm und bildet mit der Grundfläche einen Winkel von 60°. Die Seitenhöhe der Pyramide ist:

A. 4 cm B. $\sqrt{14}$ cm C. $2\sqrt{14}$ cm D. $3\sqrt{14}$ cm

5P **3.** Die Grundkanten eines vierseitigen regelmäßigen Pyramidenstumpfes sind a cm und b cm und die Seitenhöhe ist c cm. Die Mantelfläche des Stumpfes ist:

A. $2a \cdot (b + c)$ cm² B. $2b \cdot (a + c)$ cm² C. $2c \cdot (a + b)$ cm² D. $2abc$ cm²

5P **4.** Ein regelmäßiges Tetraeder wurde parallel zur Basis zerschnitten. Das Volumen des entstandenen Stumpfes beträgt 0,936 des Volumens des Tetraeders. Das Verhältnis der Grundkanten des Stumpfes ist:

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{3}$

5P **5.** Das Volumen eines Zylinders ist 12π cm³ und $3 \cdot R = 2 \cdot E$. Der Durchmesser der Basis des Zylinders ist:

A. 4 cm B. 6 cm C. 2 cm D. 3 cm

5P **6.** Die Erzeugende eines Kegelstumpfes ist $E = 26$ cm, der Radius der großen Grundfläche $R = 15$ cm und die Höhe $h = 24$ cm. Das Volumen des Stumpfes ist:

A. 2400π cm³ B. 2450π cm³ C. 2500π cm³ D. 2600π cm³

5P **7.** Die Oberfläche einer Kugel, deren Volumen 2304π cm³ ist, ist:

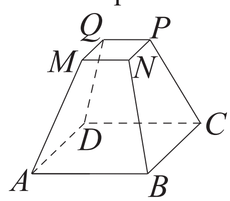
A. 480π cm² B. 536π cm² C. 596π cm² D. 576π cm²

5P **8.** Der Achsenschnitt eines geraden Kreiskegels ist ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt 32 cm². Die Mantelfläche des Kegels ist:

A. $32\sqrt{2}\,\pi$ cm² B. $16\sqrt{2}\pi$ cm² C. 32π cm² D. 16π cm²

2. Teil. *Schreibt die vollständigen Lösungen.*

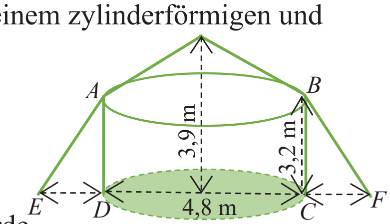
1. Ein Staudamm hat zu Beginn die Form eines regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes $ABCDMNPQ$, $AB = 180$ m, $MN = 60$ m und die Tiefe h.
Das Volumen des Pyramidenstumpfes ist $1248 \cdot 10^3$ m³.



10P **a)** Berechnet die Höhe h des Pyramidenstumpfes.

10P **b)** Zur Festigung werden 175% des Volumens des Stumpfes Steinmasse hinzugefügt. Berechnet das Volumen des Staudamms in Kubikmeter.

2. In der Zeichnung nebenan ist ein Zelt, bestehend aus zwei Teilen, einem zylinderförmigen und einem kegelförmigen Teil, dargestellt.



10P **a)** Berechnet das Volumen des Zeltes.

10P **b)** Die Seile AE und BF befestigen das Zelt. Die Punkte E und F sind 4,8 m vom Mittelpunkt der Grundfläche des Zeltes entfernt.
Berechnet die Länge des Seils, das zum Befestigen benötigt wurde.

10P **3.** Ein Arbeiter muss drei Kugeln bemalen. Er stellt fest, dass er für die dritte Kugel dieselbe Farbmasse benötigt hat wie für die ersten beiden Kugeln, mit den Durchmessern von 18 cm bzw. 24 cm. Berechnet den Radius der dritten Kugel.

Jahreswiederholung
Syntheseaufgaben

1 Gegeben sind die Mengen $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{4}{x-3} \in \mathbb{Z}\}$ und P, die Menge der Primzahlen. Findet A und $A \cap P$.

2 Seien $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = 1 + \sqrt{6}$ Zahlen und $I = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{5}}{2}\}$ eine Menge. Zeigt: $(a^2 - b^2 + 1)^{10} \in I$.

3 Gegeben sind die Zahlen $a = 2\sqrt{7} + 3$, $b = 5 + 2\sqrt{3}$ und die Menge $M = \{a^2, |-50 - \sqrt{101}|, b^2\}$. Bestimmt das kleinste Element der Menge M.

4 Zeigt, dass die Zahl $m = (2n - 3)^2 + (4n - 6)(3n + 4) + (3n + 4)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

5 Gegeben ist die unendliche Folge von reellen Zahlen $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12}, \sqrt{20}, \ldots$

a) Findet die Regel zum Berechnen der Terme und bestimmt die folgenden drei Glieder.

b) Stellt fest, ob es einen Term gibt, der das geometrische Mittel seiner Nachbarn ist.

6 Gegeben sind $E_1(x) = x^3 - 9x$ und $E_2(x) = x^2 + 9x + 6x$.

a) Zerlegt beide Ausdrücke in Faktoren.

b) Berechnet den Wert von $E_2(x)$ für $x = 2 - \sqrt{5}$.

c) Löst in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $E_1(x) = x(x - 4)^2 - x$.

7 Wenn x und y reelle Zahlen sind, bestimmt:

a) das Minimum des Ausdrucks $4x^2 + 12x + 11$;

b) das Maximum des Ausdrucks $-x^2 - 6x + 3$;

c) die Zahlenpaare (x, y), welche die Gleichung $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 17 = 0$ erfüllen.

8 Berechnet:

a) $\left(\frac{3a}{1-3a} + \frac{2a}{3a+1}\right) : \frac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$, $a \in \mathbb{R} - \{-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\}$;

b) $\left(\frac{ab^2+a^2b}{a^2+2ab+b^2} - 2b + \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right) : \frac{b^2-a^2}{-ab}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b$, $a \neq -b$.

9 Zeigt, dass $E(x) = \left[1 - \frac{(x-3)^2}{x^2+9}\right] : \frac{2x}{x^2+9}$ für alle von null verschiedenen reellen Zahlen x eine natürliche Zahl ist.

10 Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$.

a) Berechnet $\frac{f(\sqrt{3}) - f(1)}{\sqrt{3} - 1}$.

b) Zeichnet den Grafen der Funktion f.

c) Bestimmt den Schnittpunkt der Grafen der Funktionen f und $g : [-2, +\infty)$, $g(x) = -x + 3$.

11 Bestimmt die Zahl a, wenn $A(a, 2a + 1)$ ein Punkt des Grafen der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a^2$, ist.

12 **a)** Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$. Zeigt, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, die Ungleichung $f(a) < f(b)$ gilt.

b) Gegeben ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 3$. Zeigt, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, die Ungleichung $g(a) > g(b)$ gilt.

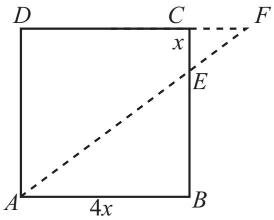
13 Löst die Gleichungen:

a) $2(x + 4)^2 - (x - 1)(x + 1) = x^2 + 1$; **b)** $\frac{2x-1}{3x+2} = \frac{4x-3}{5x+6}$.

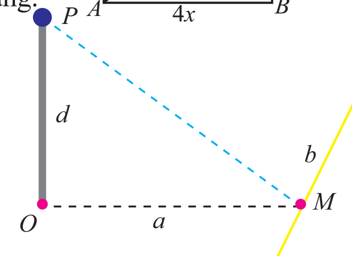
14 Gegeben wird die Gleichung $x^2 - x = a^2 - a$, $a \in \mathbb{R}$, mit der Unbekannten x.
a) Löst die Gleichung, wenn $a = 1$.
b) Bestimmt a, wenn $x = 2$ eine Lösung ist.
c) Zeigt, dass die Gleichung für alle $a \in \mathbb{R}$ reelle Lösungen hat.

15 Bestimmt die Zahl $\overline{ab}$ in der 10-er Basis, wenn $\overline{ab}^{\,2} + 3\cdot\left(\overline{2ab} - 20\right) = 2020$.

16 *ABCD* ist ein Quadrat. Berechnet den Umfang und den Flächeninhalt von *ABEFD* in Funktion von der reellen positiven Zahl x anhand der Daten der Zeichnung.



17 Zur Beleuchtung der Alleen eines Parks werden auf 5 m hohen Masten, die senkrecht zur Erde stehen, Lampen angebracht. Ein Mast befindet sich 12 m von der Allee „*b*" entfernt (siehe Abbildung rechts). Berechnet den Abstand vom oberen Ende des Mastes zu der Allee.



18 Auf die Ebene des rechtwinkligen Dreiecks *ABC* wird im Punkt *M*, der Mitte der Hypotenuse *BC,* die Senkrechte *MN* errichtet.
Wenn $AB = AC = 6\sqrt{2}$ cm und $MN = 8$ cm, berechnet:
a) den Kosinus des Winkels der Geraden *NB* mit der Ebene des Dreiecks;
b) das Maß des Winkels der Geraden *AB* mit der Ebene (*AMN*);
c) die Länge der Projektion der Strecke *AC* auf die Ebene (*AMN*).

19 Sei *C* ein Punkt auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle AOB$, $AO \equiv OB$ und $DC \perp (AOB)$. Beweist, dass die Flächeninhalte der Dreiecke *DOA* und *DOB* gleich sind.

20 Die Quadrate *ABCD* und *ABEF* liegen in verschiedenen Ebenen, $AB = a$.
a) Wenn *M* die Mitte der Strecke *CE* ist, beweist, dass $AM \perp CE$.
b) Wenn $EC = AB \cdot \sqrt{3}$, berechnet den Abstand vom Punkt *B* zur Geraden *DF* in Funktion von a.

21 *ABCDA'B'C'D'* ist ein Würfel. Beweist, dass:
a) $A'B \perp BC$;
b) *A'BCD'* ein Rechteck ist;
c) $\mathcal{A}_{A'BCD'} = 2\cdot\mathcal{A}_{ABC}$.

22 d die Länge der Diagonale eines Würfels. Berechnet das Volumen des Würfels.

23 Die Grundkante einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist 6 cm und das Volumen $36\sqrt{3}$ cm³. Bestimmt:
a) das Maß des Winkels gebildet von einer Seitenfläche und der Grundfläche;
b) die Mantelfläche der Pyramide.

24 *ABCDA'B'C'D'* ist ein regelmäßiger vierseitiger Pyramidenstumpf. $AB = 18$ cm, $A'B' = 6$ cm und seine Höhe $6\sqrt{3}$ cm. Berechnet die Seitenhöhe.

25 Im regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpf *ABCDA'B'C'D'* sind *M* und *M'* die Mitten der Kanten *AB* bzw. *A'B'*, *O* und *O'* sind die Mittelpunkte der Grundflächen. Wenn $AB = a$, $A'B' = b$, $a > b$ und $MM' = c$, berechnet OO'.

26 Die Höhe der regelmäßigen dreiseitigen Pyramide *SABC* ist $SO = 18$ cm und die Seitenkante $SA = 3$ dm. Die Pyramide wird von einer Ebene α parallel zur Grundfläche geschnitten, sodass der Umfang des Schnittes ein Drittel des Umfangs der Grundfläche ist. Berechnet:
a) den Abstand von der Schnittfläche zu der Grundfläche der Pyramide;
b) die Seitenkante des Pyramidenstumpfes, der nach dem Schnitt entsteht;
c) das Volumen des Pyramidenstumpfes.

27 *ABCDEFGH* ist ein Würfel. $AB = 4$ dm und *P* ist die Mitte der Kante *EH*.
a) Berechnet den Umfang des Vierecks *BCHP.*
b) Bestimmt den Abstand vom Punkt *P* zur Geraden *AC.*
c) Bestimmt den Sinus des Winkels der Geraden *PC* mit der Ebene (*BCD*).

28 $ABCDMNPQ$ ist ein Quader, $AB = 12$ cm, $DQ = 15$ cm und die Summe aller Kanten beträgt 144 cm.

a) Bestimmt die Länge der Diagonale des Quaders.

b) Berechnet den Kosinus Winkels der Ebenen (ABQ) und (MNP).

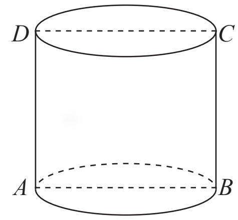
29 Die Grundfläche des regelmäßigen vierseitigen Prismas $BCDEFGHI$ ist $BCDE$, $BD = 24$ cm und die Diagonale einer Seitenfläche ist 26 cm lang. Berechnet:

a) die Höhe des Prismas;

b) den Sinus des Winkels der Geraden EF und CH.

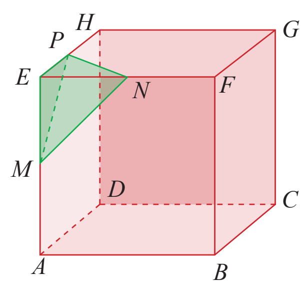
30 Die Grundfläche eines geraden Kreiskegels ist 64π cm² und die Oberfläche 144π cm². Berechnet das Volumen.

31 Der Radius der Grundfläche eines geraden Kreiszylinders ist r cm und die Höhe ist halb so lang wie der Grundkreis. Berechnet Mantelfläche und Volumen des Zylinders.



32 Der Achsenschnitt eines geraden Kreiszylinders ist $ABCD$ und E ist die Mitte des Bogens $\overset{\frown}{CD}$. Berechnet den Abstand zwischen den Punkten A und E, wenn er auf der Mantelfläche des Zylinders (aus der Abbildung nebenan) gemessen wird, die Länge des Grundkreises 32 dm und die Höhe des Zylinders 7 dm ist.

33 Ein kegelförmiges Metallstück mit dem Radius der Grundfläche von 18 cm und der Höhe 10 cm wird geschmolzen und dann zu einer Kugel geformt. Berechnet den Radius der Kugel, wenn bei der Verarbeitung 10 % des Volumens des Materials verloren geht.

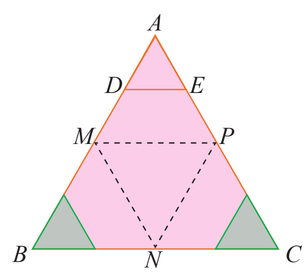


34 Die Kantenlänge des Holzwürfels $ABCDEFGH$ ist 24 cm. Die Punkte M, N, P sind die Mitten der Kanten EA, EF bzw. EH.

a) Zeigt, dass $EMNP$ eine regelmäßige Pyramide ist.

b) Berechnet das Volumen des Körpers, der nach dem Entfernen der Pyramide $EMNP$ entsteht.

35 Ein Karton in Form eines gleichseitigen Dreiecks ABC hat den Flächeninhalt $64\sqrt{3}$ cm². Die Seiten werden in je vier gleiche Teile geteilt. M, N, P sind die Mitten der Seiten AB, BC bzw. AC. Die kleinen Dreiecke mit den Ecken B und C werden abgeschnitten.



a) Zeigt, dass der übrig gebliebene Teil die Abwicklung eines regelmäßigen dreiseitigen Pyramidenstumpfes mit der großen Grundfläche MNP ist.

b) Wir falten den Karton entlang von MN, NP, PM und DE, bis wir eine Schachtel in Form eines regelmäßigen dreiseitigen Pyramidenstumpfes erhalten. Berechnet die Höhe der Schachtel.

36 Aus einem Gefäß in Form einer Halbkugel mit dem Radius 15 cm wird Wasser in ein leeres zylinderförmiges Gefäß mit dem Radius $R = 10$ cm und der Erzeugenden $E = 25$ cm gegossen. Wenn das erste Gefäß zu 75 % voll war und die Hälfte davon in das zweite Gefäß geleert wurde, bestimmt die Höhe des Wassers im zweiten Gefäß.

TEST 1 *Von Amts wegen: 10 Punkte*

1. Teil.

Wählt den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht, aus. Nur eine Antwort ist richtig.

5 P **1.** Die Zahl $\dfrac{\left|\sqrt{3}-2\right|}{2+\sqrt{3}}$ gehört zum Intervall:

A. $(-1; 0)$ B. $(0; 1)$ C. $(1; 2)$ D. $(1; +\infty)$

5 P **2.** Falls $E(x) = (1 - x)(2 + x) + x$, dann ist $E\left(\sqrt{2}\right)$ gleich:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

5 P **3.** Sei $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$. Nach Kürzen des Bruches $\dfrac{4x^2+6x}{4x^2-9}$ erhält man:

A. $-\dfrac{2}{2x-3}$ B. $-\dfrac{2}{2x+3}$ C. $-\dfrac{2x}{2x+3}$ D. $\dfrac{2x}{2x-3}$

5 P **4.** Falls $x \neq 3$, ist das Ergebnis der Rechnung $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{3}{3-x}$ gleich:

A. 1 B. -1 C. x D. $-x$

5 P **5.** *ABCDEFGH* ist ein Würfel mit der Kante 9 cm. Der Abstand vom Punkt *A* zur Geraden *BH* ist:

A. $6\sqrt{3}$ cm B. $3\sqrt{6}$ cm C. $4\sqrt{3}$ cm D. $4\sqrt{6}$ cm

5 P **6.** Die Summe der Kantenlängen eines regelmäßigen Tetraeders ist 60 cm. Seine Oberfläche ist:

A. $100\sqrt{3}$ cm² B. $100\sqrt{3}$ cm² C. $100\sqrt{3}$ cm² D. $100\sqrt{3}$ cm²

5 P **7.** Ein gerader Kreiszylinder und eine Kugel haben gleiche Radien und gleiche Volumen von 36π cm³ . Die Höhe des Zylinders beträgt:

A. 4 cm B. 6 cm C. 8 cm D. 12 cm

5 P **8.** Der Achsenschnitt eines geraden Kreiskegels ist ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt 81 cm². Das Volumen des Kegels ist:

A. 252π cm³ B. 243π cm³ C. 216π cm³ D. 324π cm³

2. Teil

1. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + a, a \in \mathbb{R}$.

5 P **a)** Zeichnet den Grafen der Funktion *f,* wenn $a = 2$,

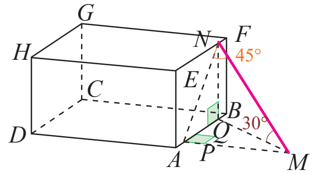
5 P **b)** Bestimmt die Zahl *a,* wenn der Punkt $A(a, 8)$ zum Grafen der Funktion *f* gehört.

5 P **c)** Berechnet $a \cdot f(2) + (a - 1) \cdot f(-2)$

10 P **2.** Gegeben ist der Ausdruck $E(x) = \dfrac{(x+3)^2 - 2(x+1) - 4}{x^2+3x}$, $x \in \mathbb{R} - \{-3, -1, 0\}$. Zeigt, dass $E(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} - \{-3, -1, 0\}$ eine rationale Zahl ist.

3. Teil

1. Um auf ein Gebäude in Form eines Quaders *ABCDEFGH* steigen zu können, verwendet ein Feuerwehrmann eine 24 m lange Leiter *MN*. Diese bildet mit der Ebene α, dem Boden, einen Winkel von 30°, und mit der Ebene (*ABFE*) (der Mauer) einen Winkel von 45°. α und (*ABFE*) sind senkrechte Ebenen. Berechnet:



5 P **a)** den Abstand von *M* zum Gebäude;

10 P **b)** die Höhe des Gebäudes;

10 P **c)** die Länge der Strecke *PQ,* falls $P = pr_{(ABE)}M$ und $Q = pr_{\alpha}N$.

TEST 2 *Von Amts wegen: 10 Punkte*

1. Teil *Wählt den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht, aus. Nur eine Antwort ist richtig.*

5 P **1.** Das Ergebnis der Rechnung $\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(2x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]:4^{-1}$ ist:

A. $2x-3$ B. $2x+3$ C. $3x-2$ D. $3-2x$

5 P **2.** Die Gleichungen $6x^2-x-1=0$ und $3x^2+a=0$ haben eine gemeinsame Lösung, wenn:

A. $a\in\left\{-\frac{3}{4};-\frac{1}{3}\right\}$ B. $a\in\left\{-\frac{4}{3};-3\right\}$ C. $a\in\left\{-\frac{3}{4};-3\right\}$ D. $a\in\left\{-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right\}$

5 P **3.** Die kleinste ganze Lösung der Ungleichung $-2x+\frac{1}{3}\le\frac{x}{-3}+\frac{1}{2}$ ist:

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

5 P **4.** Der Graf der Funktion $f:[-2;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x-3$, ist eine geschlossene Halbgerade mit dem Ursprung A. Die Koordinaten des Punktes A sind:

A. $(-1,-2)$ B. $(-2,-1)$ C. $(-1, 2)$ D. $(-2, 1)$

5 P **5.** Die Anzahl der Ebenen, die von den Ecken eines Quadrates und einem Punkt außerhalb der Ebene des Quadrates bestimmt werden, ist:

A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

5 P **6.** $ABCDEFGH$ ist ein Würfel. Das Verhältnis $\frac{AG}{CH}$ hat den Wert:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

5 P **7.** Das Volumen eines Pyramidenstumpfes beträgt 93,6 % des Volumens der Pyramide, aus der er entstanden ist. Das Verhältnis der Höhen der zwei Körper ist:

A. 0,4 B. 0,2 C. 0,6 D. 0,8

5 P **8.** Die Höhe eines Kreiszylinders ist ein Drittel des Durchmessers der Grundfläche und die Diagonale des Achsenschnittes ist $2\sqrt{10}$ cm lang. Das Volumen des Zylinders ist:

A. 12π cm³ B. 18π cm³ C. 24π cm³ D. 16π cm³

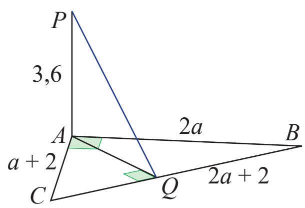
2. Teil

Die Längen der Strecken in den Zeichnungen sind in Zentimeter angeführt. Löst folgende Aufgaben.

1. $PA\perp(ABC)$, $PA=3{,}6$ cm, $\sphericalangle BAC=90^\circ$, $AB=2a$, $BC=2a+2$, $AC=a+2$.

(5P) a) Bestimmt die Zahl a.

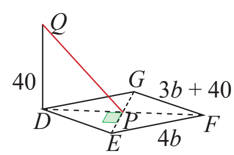
(10P) b) Berechnet den Abstand vom Punkt P zur Geraden BC.



2. $DEFG$ ist ein Quadrat, $QD\perp(DEG)$, $QD=40$ cm, $EF=4b$, $FG=3b+40$.

(5P) a) Bestimmt die Zahl b.

(5P) b) Berechnet den Abstand vom Punkt Q zur Geraden EG.



3. Teil

Gegeben sind die Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{3}{2}x+4$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-3$.

a) Bestimmt den Wahrheitswert der Sätze:

5 P p_1: „Der Punkt $P(4,-2)$ liegt auf dem Grafen der Funktion f."

5 P p_2: „Der Punkt $Q(-\frac{1}{2}, 3)$ liegt auf dem Grafen der Funktion g."

5 P p_3: „Der Schnittpunkt der Grafen der Funktionen f und g ist $M(2,1)$."

10 P **b)** Zeichnet die Grafen der Funktionen f und g in dasselbe Achsensystem.

ANLEITUNGEN UND ANTWORTEN

Test 1 (S. 9)

1. 1. W; 2. F; 3. W; 4. W; 5. F; 6. F; 7. F; 8. W. **2. 1.** Sei p der ursprüngliche Preis. Dann gilt $\frac{90}{100}\cdot(p-10) = 27$. Also $p = 40$ (Lei). **2.** $DE \parallel BC$ und $BD \parallel CE$. Dann ist $BCED$ ein Parallelogramm und DE = BC = 9 cm. Im Dreieck CDE, $\sphericalangle CDE = 90°$, $CD = AB = 12$ cm, $DE = 9$ cm, ist $CE = 15$ cm. **3. 1. a)** $a = 1$. Wir erhalten $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{4} = 1$ und $S = \{1\}$. **b)** $x = 2$ ist eine Lösung, also $\frac{4}{3} - \frac{2-1}{4} = 1$ und $a = \frac{2}{3}$. **2. a)** $AO = BO$, dann liegt O auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB. Die Strecke TO schneidet AB in C und den Kreis in D. Dann gilt $d\,(O, AB) = OC = \frac{r}{2}$ und $\sphericalangle AOC = 60°$. Da ΔAOD und ΔBOD gleichseitig sind, ist $\overset{\frown}{AB} = \sphericalangle AOB = 120°$; **b)** Im Dreieck AOT sind $AC \perp OT$, $C \in OT$ und $OA^2 = r^2$ und $OC \cdot OT = \frac{r}{2} \cdot 2r = r^2$. Dann ist $\sphericalangle OAT = 90°$ und im rechtwinkligen Dreieck AOT ist $AT = r\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ (cm). Weil $\Delta AOT \equiv \Delta BOT$ (SWS), ist $\sphericalangle OBT = 90°$, also $d\,(O, BT) = OB = r$ und BT ist eine Tangente des Kreises.

Test 2 (S. 10)

1. 1. 2; **2.** 150; **3.** 3; **4.** –3 und 3; **5.** 4,2 cm; **6.** 8 cm²; **7.** 20 cm; **8.** 18 cm. **2. 1. a)** $\sqrt{n} \in M$ und $n = 10\cdot m + 4$, $m \in \mathbb{N}$. $4 = 10\cdot 0 + 4$ und $394 = 10\cdot 39 + 4$. Die Menge M hat 40 Elemente. **b)** $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Weil $u(n) = 4 \Rightarrow u(k) \in \{2, 8\}$. Die Zahlen 2^2, 8^2, 12^2, 18^2 erfüllen die Bedingung und $M \cap \mathbb{N} = \{2, 8, 12, 18\}$. **c)** Nur vier Zahlen aus der Reihe 4, 14, 24, …, 394, sind vollständige Quadrate. Also hat $M \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ 40–4=36 Elemente. **2.** $AC = 2n$ und $BD = 2n + 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Sei $AC \cap BD = \{O\}$. Dann ist $AO = n$, $BO = n + 1$ und $\sphericalangle AOB = 90°$. Im Dreieck AOB gilt $\text{tg}\sphericalangle ABD = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{n}{n+1} = \frac{3}{4}$, also $n = 3$. Dann sind $AO = 3$ cm, $BO = 4$ cm und $AB = 5$ cm. **3. 1. a)** Laut Voraussetzung ist: $|\sqrt{2} - a| + |b - \sqrt{3}| = 0 \Leftrightarrow |\sqrt{2} - a| = |b - \sqrt{3}| = 0 \Rightarrow a = \sqrt{2}$ und $b = \sqrt{3}$. **b)** $x = 2$ und $|y| = 7$. $S = \{(2, -7), (2, 7)\}$. **2. a)** Sei $EF \perp CD$, $F \in CD$. Im Dreieck CEF gilt $CF = a\sqrt{10}$.
b) $A_{BCE} = A_{AECD} \Leftrightarrow \frac{AE + CD}{2} \cdot AD = \frac{BE \cdot AD}{2}$. Also $BE = AE + CD$ oder $b = 3 \cdot a$. **c)** Sei $BM \perp CE$, $M \in CE$. Weil $CE \cdot BM = BE \cdot AD$, ist $BM = 3\sqrt{10}$ cm und $CM = 3\sqrt{10}$ cm. Also $\sphericalangle BCE = 45°$.

Selbstbewertungstest INTERVALLE VON REELLEN ZAHLEN. UNGLEICHUNGEN IN $\mathbb{R}$ (S. 40)

1. Teil **1.** D; **2.** C; **3.** D; **4.** A; **5.** D; **6.** B; **7.** C; **8.** A.

2. Teil **1.** $|r - 3| < 10 < r + 3 \Rightarrow r \in \{8; 9; 10; 11; 12\}$. **2.** $M = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ und $M \cap I$ enthält nur aufeinanderfolgende Zahlen. Die Summe 5 ist möglich, wenn: 2 + 3 = 5, also $M \cap (a; b) = \{2; 3\}$ und $a = 1$, $b = 4$ oder $-1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$, also $M \cap (a; b) = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$ und $a = -2$, $b = 4$.

3. Teil **1. a)** $B = [-3; -2)$; **b).** $A \cup B = [-3; -\frac{3}{2})$, $A \cap B = (-3; -2)$, $A \setminus B = [-2; -\frac{3}{2})$, $B \setminus A = \{-3\}$. **2. a)** $S_1 = (-\infty; \frac{1}{4})$, $S_2 = (\frac{1}{6}; +\infty)$; **b)** $S_1 \cap S_2 = (\frac{1}{6}; \frac{1}{4})$, $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{6} < \frac{1}{n} < \frac{1}{4}$. Also $n = 5$.

Selbstbewertungstest ALGEBRAISCHES RECHNEN IN $\mathbb{R}$ (S. 82)

1. Teil 1. A; **2.** B; **3.** D; **4.** A; **5.** C; **6.** C; **7.** B; **8.** C.

2. Teil 1. a) $x = 2$; **b)** $x = 2$, $y = -\frac{3}{2}$.**2. a)** $F(a,b) = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{a+b}{a+b+1}$;

b) $a + b = \sqrt{3} - 1$ und $F = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$. **2. a)** $-\frac{3x^2}{1-x^2} = \frac{3x^2}{-(1-x^2)} = \frac{3x^2}{x^2-1}$; **b)** $E(x) = \frac{2x+1}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{4x^2-1} = \frac{x-1}{2x-1}$;

c) $2 \cdot \frac{n-1}{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2n-1} \in \mathbb{Z}$. Man erhält $n = 0$ und $n = 1$. Nur $n = 0$ erfüllt die Bedingungen.

Selbstbewertungstest FUNKTIONEN (S. 112)

1. Teil 1. C; **2.** B; **3.** C; **4.** A; **5.** D; **6.**A; **7.** B; **8.** A. **2. Teil. 1. a)** $u = 4$; **b)** $v = -1$;

c) $O(0, 0)$; **d)** $A(2, 4) \in d$, $B(2, -1) \in d'$; $OB^2 + OA^2 = AB^2 \Rightarrow OA \perp OB \Leftrightarrow d \perp d'$. **2. a)** In die Lücken schreibt man: 240000; 264600; 277830; **b)** 1034430 Autos.

Selbstbewertungstest ELEMENTE DER RAUMGEOMETRIE (S. 188)

1. Teil 1. F; **2.** W; **3.** W; **4.** F. **2. Teil 1.** a. 4; b. 5; c. 3; d. 2.

3. Teil 1. a) Zeichnung; **b)** Sei $P = pr_{BD}A$. Man erhält $pr_{(BDH)}AH = PH = 2\sqrt{30}$ cm;

c) $pr_{(ACD)}BH = BD$, ΔBDH ist rechtwinklig gleichschenklig, also $\sphericalangle(BH,(ACD)) = 45°$;

2. a) MD ist Mittellinie im Dreieck ACE, also $AE \parallel MD$; b) Ist P die Mitte von BC, dann gilt $BE \parallel DP$ und

$\sphericalangle(AD; BE) = \sphericalangle(AD; DP) = u$. $\sin u \cdot \cos u + \mathrm{tg}\, u = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Selbstbewertungstest FLÄCHEN UND VOLUMEN VON GEOMETRISCHEN KÖRPERN (S. 217)

1. Teil 1. C; **2.** D; **3.** C; **4.** B; **5.** A; **6.** D; **7.** D; **8.** A

2. Teil 1. a) $h = 80$ m; **b)** $V_{\text{Staudamm}} = 3432 \cdot 10^3$ m^3.**2. a)** $H_{\text{Kegel}} = 3{,}9 - 3{,}2 = 0{,}7$ m.

$V_{\text{Zelt}} = V_{\text{Zyl}} + V_{\text{Kegel}} = \pi \cdot 2{,}4^2 \cdot 3{,}2 + \pi \cdot 2{,}4^2 \cdot 0{,}7 = 19{,}776\pi = 62{,}09$(m^3); **b)** Sei O der Mittelpunkt der Grundfläche des Zylinders. $d(E, O) = 4{,}8 = ED + DO = ED + 2{,}4$, also $ED = 2{,}4$ (m).

Genauso $FC = 2{,}4$ (m). $\Delta ADE \equiv \Delta BCF$ (C. C). Man erhält $AE = BF = 4$. Die Länge des Seils $2 \cdot 4$ m $= 8$ m.

3. $R_1 = 9$ cm, $R_2 = 12$ cm und $A_1 + A_2 = A_3$. Aus $4\pi R_1^2 + 4\pi R_2^2 = 4\pi R_3^2$ folgt $R_3 = 15$ cm.

Test 1 (S. 221)

1. Teil 1. B; **2.** A; **3.** D; **4.** A; **5.** B; **6.** C; **7.** A; **8.** D. **2. Teil a)** Graf; **b)** $a = 2$; **c)** 3.

3. Teil a) $pr_{(ABE)} M = P$, dann sind $d(M, (ABE)) = MP$. $pr_{(ABE)} MN = PN$ und $\sphericalangle MNP = 45°$.

Also $MP = MN : \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ (cm); **b)** $pr_\alpha MN = MQ$ și $\sphericalangle NMQ = 30°$. Also $d_{\text{Gebäude}} = 12$ m;

c) Im Dreieck NQP, sind $\sphericalangle NQP = 90°$, $NQ = 12$ m, $NP = 12$ m und laut Pythagoras, $PQ = 12$ m.

Test 2 (S. 222)

1. Teil 1. D; **2.** A; **3.** B; **4.** B; **5.** A; **6.** D; **7.** A; **8.** B. **2. Teil 1. a)** $a = 4$; **b)** $AQ = 4{,}8$ cm, $d(P, BC) = PQ = 6$ cm.

2. $EF = FG$, also ist $b = 40$ cm; **b)** $DP = 20$ cm, $d(Q, EG) = QP = 20$ cm.

3. Teil 1. a) p_1: W; p_2: F; p_3: W; **b)** Zeichnung.

Programa școlară poate fi accesată la adresa:
http://programe.ise.ro.

Alles, was richtiges Denken
darstellt, ist entweder Mathematik
oder mathematisch darstellbar.
Das Lernen der Mathematik
bedeutet, Denken zu lernen.

Grigore Moisil

Tradiţie din 1989
www.litera.ro
ISBN 978-606-33-7092-2