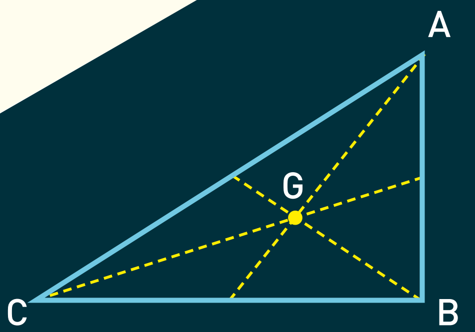
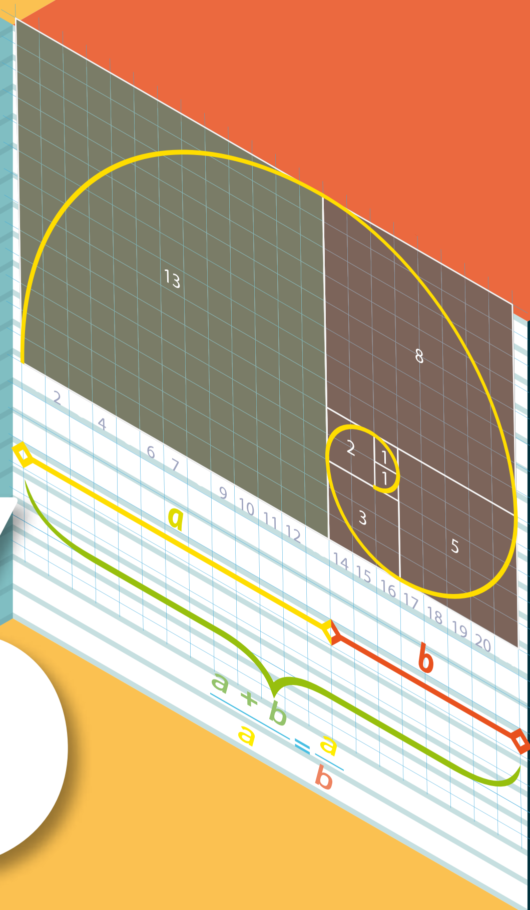
MINISTERUL EDUCAȚIEI

LITERA

Dorin Linț
Maranda Linț
Sorin Doru Noaghi

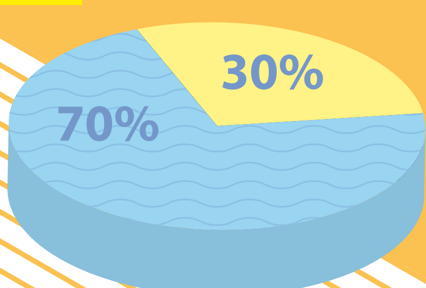




Mathematik

6

Lehrbuch für die 6. Klasse



Dieses Lehrbuch ist das Eigentum des Bildungsministeriums.
Dieses Lehrbuch wurde in Übereinstimmung mit dem Lehrplan herausgebracht,
genehmigt durch den Ministerialerlass OM Nr. 3393 vom 28.02.2017.

119 – Nationale Rufnummer für Fälle von Kindesmissbrauch
116.111 – Telefonnummer für die Beratung der Schüler

MINISTERUL EDUCAȚIEI

LITERA

Dorin Linț
Maranda Linț
Sorin Doru Noaghi

Mathematik

6

Lehrbuch für die 6. Klasse

Das Lehrbuch ist vom Bildungsministerium durch Ministererlass Nr. 5268/04.08.2023 genehmigt worden.

Das gedruckte Lehrbuch wird den Schülerinnen und Schülern beginnend mit dem Schuljahr 2023/2024 kostenlos zur Verfügung gestellt und ist für die Dauer von vier Jahren übertragbar.

Schulamt ....

Schule/Kolleg/Lyzeum ....

DIESES LEHRBUCH WURDE VERWENDET VON:

Jahr	Name des Schülers / der Schülerin	Klasse	Schuljahr	Zustand des Lehrbuchs*	
				bei Empfang	bei Rückgabe
1					
2					
3					
4					

* *Für die Beschreibung des Zustands des Lehrbuchs wird einer der folgenden Begriffe verwendet: neu, gut, gepflegt, ungepflegt, beschädigt.*
- Die Lehrkräfte überprüfen, ob die in die Tabelle eingetragenen Informationen richtig sind.
- Die Schülerinnen und Schüler dürfen nicht ins Lehrbuch schreiben.

Mathematik. Lehrbuch für die 6. Klasse
Dorin Linț, Maranda Linț, Sorin Doru Noaghi

Wissenschaftliche Referenten: Lektor Dr. Marius-Nicolae Heljiu, Departement für Mathematik und Informatik, Naturwissenschaftliche Fakultät, Universität Petroșani
Prof. Dr. Dan-Ștefan Marinescu, Nationalkolleg „Iancu de Hunedoara", Hunedoara
Übersetzung: Prof. Rodica Brodețchi, Prof. Mihaela Dragoie, Prof. Mioara Chirilă
Korrektur: Dr. Renate Andrea Klein

LITERA®

Editura Litera
Tel.: 0374 82 66 35; 021 319 63 90; 031 425 16 19
E-Mail: contact@litera.ro
www.litera.ro

Verleger: Vidrașcu und fiii
Redaktion: Carmen Birta
Lektorat (der rumänischen Fassung): Carmen Bîtlan
Fotonachweise: Shutterstock
Umschlagillustration: Getty Images
Umschlaggestaltung: Lorena Ionică
Gestaltung und Vordruck: A.B.C. POINT DESIGN SRL

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
LINŢ, DORIN
Mathematik: Lehrbuch für die 6. Klasse / Dorin Linţ, Maranda Linţ, Sorin Doru Noaghi.
Bucureşti : Litera, 2023
ISBN

I. Linţ, Maranda
II. Noaghi, Sorin Doru

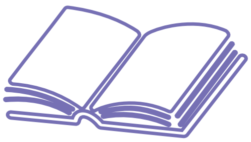
37
51

INHALTSVERZEICHNIS

VORSTELLUNG DES LEHRBUCHS

- Das Mathematiklehrbuch für die 6. Klasse umfasst sechs Kapitel mit insgesamt 16 Lerneinheiten, die die im Lehrplan vorgesehenen Bereiche und Inhalte abdecken. Die Lerneinheiten sind in Lektionen unterteilt, die in jeweils 1–2 Unterrichtsstunden durchgenommen werden können.
- Die Lektionen enthalten Lehr- und Bewertungstätigkeiten mit praktisch anwendbarem Charakter, die auf die Entwicklung der zugehörigen spezifischen Kompetenzen ausgerichtet sind.
  - Erstbewertungstests
  - Minitests zum Abschluss der Lektionen
  - Bewertungstests zum Abschluss der Kapitel und am Ende des Lehrbuchs
  - Wiederholungsaufgaben

Über die Rubriken



Zur Erinnerung

Konzepte, Kenntnisse, die die Schüler in vorangegangenen Lektionen erworben haben im Hinblick auf deren Einbeziehung in den Erwerb der neuen Inhalte durch Herstellung logischer Zusammenhänge

Wir lösen und beobachten

Übungen und Aufgaben für die Identifizierung oder Erschließung neuer Elemente aufgrund von Beobachtungen: Eigenschaften, Algorithmen, Beteiligung

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Im Lehrplan vorgesehene Inhalte mit aufschlussreichen Beispielen, Erklärungen und Lösungsvorschlägen

Worterklärungen

Erklärung neuer oder weniger bekannter Begriffe, die in der Lektion verwendet werden

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Gelöste Anwendungen, einige bedeutende mathematische Ergebnisse, die die Verbindung herstellen zwischen dem Inhalt der Lektion, den vorher erworbenen Kenntnissen und dem Alltag

Minitest

Objektive, halbobjektive und subjektive Aufgaben, durch die dem Schüler bewusst wird, in welchem Maß er die Lektion verstanden hat

Übungen und Aufgaben

Nach Schwierigkeitsgrad und den durchgenommenen Inhalten gestaffelte Übungen und Aufgaben

Wir merken uns

Für die praktische Anwendung der gelernten Begriffe nützliche mathematische Ergebnisse

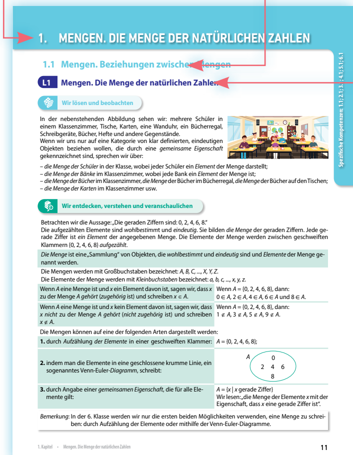
Portfoliothema. Einzel- oder Gruppenarbeit, in der im Lehrbuch beschriebene Arbeitsschritte befolgt werden

LEHRBUCHSEITEN

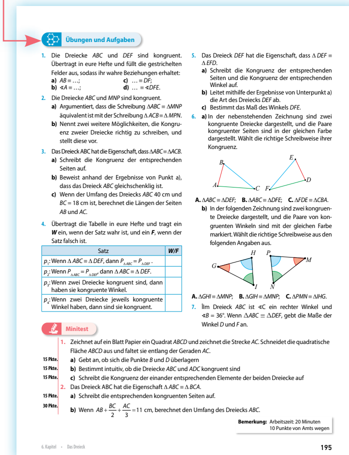
Titel des Kapitels

Titel der Lerneinheit

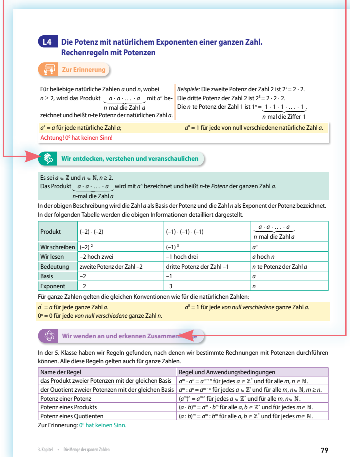
Titel der Lektion



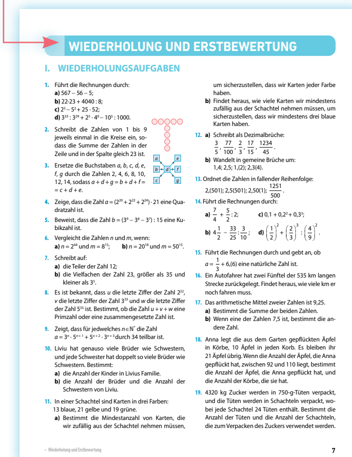
Vorgeschlagene Lerntätigkeiten



Lerntätigkeiten



Wiederholung



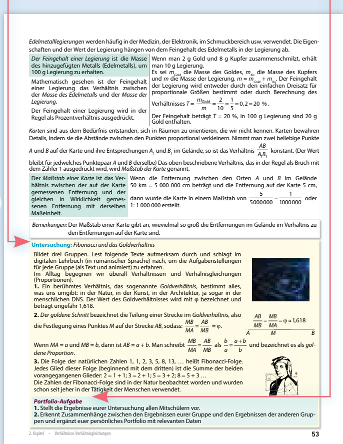
TRADITIONELLE UND KOMPLEMENTÄRE BEWERTUNGSMETHODEN

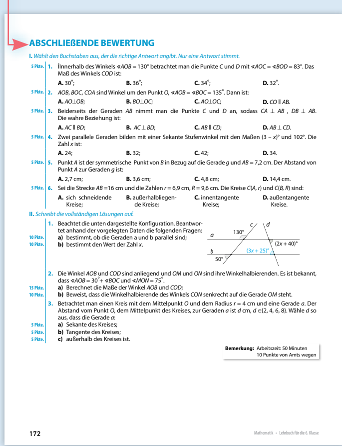
Untersuchung

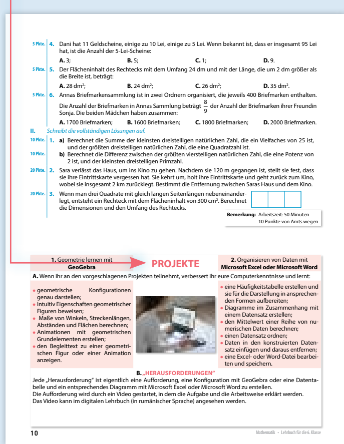
Portfoliothema

Bewertung

Projekt







Allgemeine Kompetenzen:

1. Identifizieren von Daten, Größen und mathematischen Zusammenhängen in ihrem Kontext
2. Verarbeiten von quantitativen, qualitativen und strukturellen mathematischen Daten aus verschiedenen Informationsquellen
3. Anwenden spezifischer Konzepte und Algorithmen in verschiedenen mathematischen Kontexten
4. Ausdrücken von Informationen, Schlussfolgerungen und Lösungsansätzen für eine gegebene Situation in mathematischer Sprache
5. Analyse der mathematischen Merkmale einer bestimmten Situation
6. Mathematische Modellierung einer gegebenen Situation durch Integration von Kenntnissen aus verschiedenen Bereichen

Spezifische Kompetenzen:

1.1 Identifizieren spezifischer Begriffe der Mengenlehre und der Teilbarkeitsbeziehung in $\mathbb{N}$

1.2 Erkennen von Verhältnissen, Verhältnisgleichungen und direkt oder umgekehrt proportionalen Größen

1.3 Erkennen der Eigenschaften ganzer Zahlen in verschiedenen Zusammenhängen

1.4 Erkennen von äquivalenten Brüchen, unkürzbaren Brüchen und Schreibweisen einer rationalen Zahl

1.5 Erkennen von ebenen geometrischen Figuren (Geraden, Winkel, Kreise, Bögen) in vorgegebenen Konfigurationen

1.6 Erkennen einiger Elemente der ebenen Geometrie im Zusammenhang mit dem Begriff Dreieck

2.1 Hervorheben durch Beispiele der Zugehörigkeits-, Einschluss-, Gleichheitsbeziehungen und Teilbarkeitskriterien durch 2, 5, 10^n, 3 und 9 in $\mathbb{N}$

2.2 Quantitative Verarbeitung und Organisierung von Daten unter Verwendung von Verhältnissen und Verhältnisgleichungen

2.3 Verwenden der Operationen mit ganzen Zahlen, um Gleichungen und Ungleichungen zu lösen

2.4 Anwenden der Rechenregeln mit rationalen Zahlen zur Lösung von Gleichungen der Art $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$, $(a \neq 0)$, $a \cdot x + b = c$, wobei a, b, c rationale Zahlen sind

2.5 Erkennen der Kollinearität von Punkten, der Arten von Winkeln (Scheitelwinkel, anliegende, komplementäre oder supplementäre Winkel) sowie der Tatsache, dass zwei Geraden parallel oder senkrecht zueinander sind

2.6 Berechnen von Streckenlängen und Winkelmaßen im Dreieck

3.1 Verwenden von geeigneten Methoden zur Darstellung von Mengen und zur Bestimmung des ggT und des kgV

3.2 Anwenden von spezifischen Methoden zur Lösung von Aufgaben mit Verhältnissen, Verhältnisgleichungen und direkt/umgekehrt proportionalen Größen

3.3 Anwenden der Rechenregeln und Verwendung von Klammern bei Operationen mit ganzen Zahlen

3.4 Anwenden der Eigenschaften von Operationen zum Vergleichen und Rechnen mit rationalen Zahlen

3.5 Verwenden der Eigenschaften von Abständen, Linien, Winkeln und Kreisen zur Erstellung geometrischer Konstruktionen

3.6 Verwenden der Kongruenzkriterien und Eigenschaften besonderer Dreiecke zur Bestimmung der Merkmale einer geometrischen Figur

4.1 Konkrete Situationen, die mithilfe von Mengen und Teilbarkeit beschrieben werden, in mathematischer Sprache ausdrücken

4.2 Mathematische Formulierung der Beziehungen und Größen in Aufgaben mit Verhältnissen, Verhältnisgleichungen und direkt oder umgekehrt proportionalen Größen

4.3 Erarbeiten der Schritte zur Lösung von Gleichungen und Ungleichungen in der Menge der ganzen Zahlen

4.4 Erarbeiten von Lösungsschritten für Aufgaben unter Anwendung der Operationen in der Menge der rationalen Zahlen

4.5 Elemente der Geometrie der Geraden, des Winkels und des Kreises darstellen oder in spezifisch mathematischer Sprache ausdrücken

4.6 Ausdruck von Merkmalen und der wichtigen Linien im Dreieck in symbolischer und bildlicher geometrischer Sprache

5.1 Analyse gegebener Situationen im Zusammenhang mit Mengen und Teilbarkeit in $\mathbb{N}$

5.2 Analyse praktischer Situationen im Kontext von Verhältnissen, Verhältnisgleichungen und Datensammlungen

5.3 Interpretation von Daten aus Aufgaben, die mithilfe von ganzen Zahlen gelöst werden

5.4 Bestimmen wirksamer Methoden für die Durchführung von Rechnungen mit rationalen Zahlen

5.5 Analysieren numerischer Datensätze oder geometrischer Darstellungen zur Optimierung von Berechnungen mit Streckenlängen, Entfernungen, Winkel- und Bogenmaßen

5.6 Analysieren geometrischer Konstruktionen zur Darstellung der Eigenschaften von Dreiecken

6.1 Übersetzen gegebener Situationen in mathematische Sprache unter Verwendung von Mengen, Operationen mit Mengen und Teilbarkeit in $\mathbb{N}$

6.2 Mathematische Modellierung einer gegebenen Situation mit direkt oder umgekehrt proportionalen Verhältnissen, Proportionen und Mengen

6.3 Übersetzen einer gegebenen Situation in algebraische Sprache, Lösen der sich daraus ergebenden Gleichung oder Ungleichung und Interpretieren des Ergebnisses

6.4 Mathematische Interpretation praktischer Aufgaben unter Verwendung von Operationen mit rationalen Zahlen

6.5 Interpretation von Informationen, die in geometrischen Darstellungen enthalten sind, um Streckenlängen, Entfernungen und Maße von Winkeln/Kreisbögen zu bestimmen

6.6 Übersetzen einer gegebenen Situation im Zusammenhang mit der Geometrie des Dreiecks in eine spezifische Sprache, Lösen der erhaltenen Aufgabe und Interpretieren des Ergebnisses

Beobachtungsbogen für das Schülerverhalten

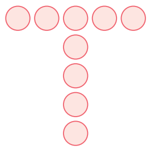
Verhalten	Nie	Manchmal	Oft	Immer
Ich habe Interesse am Lernen gezeigt.				
Ich habe die Anweisungen des Lehrers befolgt.				
Ich habe selbstständig gearbeitet.				
Ich habe um Hilfe gebeten, als ich sie brauchte.				
Wenn ich einen Fehler gemacht habe, wollte ich herausfinden, wie ich ihn korrigieren kann.				
Ich habe die Aktivitäten zu Ende geführt.				
Ich habe meine Meinung gesagt.				
Ich habe bei Gruppenaktivitäten mit anderen zusammengearbeitet.				

Bewerte am Ende jeder Einheit die geleistete Arbeit und wie du dich beim Durcharbeiten der Lektionen gefühlt hast.

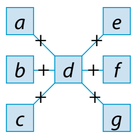
WIEDERHOLUNG UND ERSTBEWERTUNG

I. WIEDERHOLUNGSAUFGABEN

1. Führt die Rechnungen durch:
a) $567 - 56 - 5$;
b) $22 \cdot 23 + 4040 : 8$;
c) $2^5 - 5^2 + 25 \cdot 52$;
d) $3^{33} : 3^{29} + 2^5 \cdot 4^0 - 10^5 : 1000$.



2. Schreibt die Zahlen von 1 bis 9 jeweils einmal in die Kreise ein, sodass die Summe der Zahlen in der Zeile und in der Spalte gleich 23 ist.



3. Ersetzt die Buchstaben a, b, c, d, e, f, g durch die Zahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, sodass $a + d + g = b + d + f = c + d + e$.

4. Zeigt, dass die Zahl $a = (2^{20} + 2^{22} + 2^{24}) \cdot 21$ eine Quadratzahl ist.

5. Beweist, dass die Zahl $b = (3^9 - 3^8 - 3^7) : 15$ eine Kubikzahl ist.

6. Vergleicht die Zahlen n und m, wenn:
a) $n = 2^{44}$ und $m = 8^{15}$; **b)** $n = 20^{18}$ und $m = 50^{15}$.

7. Schreibt auf:
a) die Teiler der Zahl 12;
b) die Vielfachen der Zahl 23, größer als 35 und kleiner als 3^5.

8. Es ist bekannt, dass u die letzte Ziffer der Zahl 2^{22}, v die letzte Ziffer der Zahl 3^{33} und w die letzte Ziffer der Zahl 5^{55} ist. Bestimmt, ob die Zahl $u + v + w$ eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl ist.

9. Zeigt, dass für jedwelches $n \in \mathbb{N}^*$ die Zahl
$a = 3^n \cdot 5^{n+1} + 5^{n+2} \cdot 3^{n+3}$ durch 34 teilbar ist.

10. Liviu hat genauso viele Brüder wie Schwestern, und jede Schwester hat doppelt so viele Brüder wie Schwestern. Bestimmt:
a) die Anzahl der Kinder in Livius Familie.
b) die Anzahl der Brüder und die Anzahl der Schwestern von Liviu.

11. In einer Schachtel sind Karten in drei Farben:
13 blaue, 21 gelbe und 19 grüne.
a) Bestimmt die Mindestanzahl von Karten, die wir zufällig aus der Schachtel nehmen müssen, um sicherzustellen, dass wir Karten jeder Farbe haben.
b) Findet heraus, wie viele Karten wir mindestens zufällig aus der Schachtel nehmen müssen, um sicherzustellen, dass wir mindestens drei blaue Karten haben.

12. **a)** Schreibt als Dezimalbrüche:
$\frac{3}{5}, \frac{77}{100}, \frac{2}{3}, \frac{17}{15}, \frac{1234}{45}$.
b) Wandelt in gemeine Brüche um:
1,4; 2,5; 1,(2); 2,3(4).

13. Ordnet die Zahlen in fallender Reihenfolge:
2,(501); 2,5(501); 2,50(1); $\frac{1251}{500}$.

14. Führt die Rechnungen durch:
a) $\frac{7}{4} + \frac{5}{2} : 2$; **c)** $0{,}1 + 0{,}2^2 + 0{,}3^3$;
b) $4\frac{1}{2} - \frac{33}{25} : \frac{3}{10}$; **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{4}{9}\right)^2$.

15. Führt die Rechnungen durch und gebt an, ob
$a = \frac{1}{3} + 6{,}(6)$ eine natürliche Zahl ist.

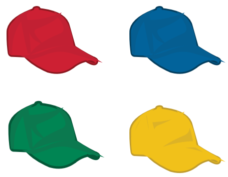
16. Ein Autofahrer hat zwei Fünftel der 535 km langen Strecke zurückgelegt. Findet heraus, wie viele km er noch fahren muss.

17. Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist 9,25.
a) Bestimmt die Summe der beiden Zahlen.
b) Wenn eine der Zahlen 7,5 ist, bestimmt die andere Zahl.

18. Anna legt die aus dem Garten gepflückten Äpfel in Körbe, 10 Äpfel in jeden Korb. Es bleiben ihr 21 Äpfel übrig. Wenn die Anzahl der Äpfel, die Anna gepflückt hat, zwischen 92 und 110 liegt, bestimmt die Anzahl der Äpfel, die Anna gepflückt hat, und die Anzahl der Körbe, die sie hat.

19. 4320 kg Zucker werden in 750-g-Tüten verpackt, und die Tüten werden in Schachteln verpackt, wobei jede Schachtel 24 Tüten enthält. Bestimmt die Anzahl der Tüten und die Anzahl der Schachteln, die zum Verpacken des Zuckers verwendet werden.

20. In einem Geschäft werden 15 Mützen zum Verkauf angeboten: rote, blaue, grüne und gelbe. Es ist bekannt, dass:



a) es wenigstens zwei grüne Mützen gibt, aber weniger als von jeder anderen Farbe;
b) die meisten Mützen rot sind;
c) es mehr gelbe als blaue Mützen gibt.

Raul kauft alle grünen Mützen. Findet heraus, wie viele Mützen übrig bleiben und welche Farben sie haben.

21. Gabriel hat 55 Lei. Nachdem er seiner Schwester Simona 9,5 Lei gibt, erhält er von seiner Mutter weitere 10 Lei. Mit dem Geld, das er jetzt hat, kauft Gabriel 4 Bleistifte zu je 1,2 Lei und einen Füller, der 24,5 Lei kostet. Berechnet, wie viel Geld Gabriel übrig bleibt.

22. Bogdan und Grig wollen Kameras kaufen. Bogdan wählt eine Kamera, die 540 Lei kostet, und Grig eine, die 1,2-mal so viel kostet. Sie erhalten folgendes Angebot: Wenn sie zwei Kameras kaufen, verkauft das Geschäft das Produkt für $\frac{7}{10}$ des angezeigten Preises. Bestimmt den Geldbdetrag, der für die beiden Kameras im Angebot bezahlt wird.

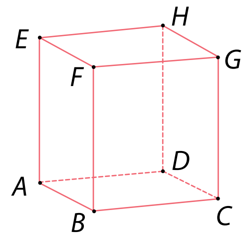
23. Tudor liest ein Buch, jeden Tag die gleiche Anzahl von Seiten. Nach vier Tagen hat Tudor 144 Seiten gelesen. Berechnet die Anzahl der Seiten, die er noch lesen muss, wenn man weiß, dass er die Lektüre in sieben Tagen beendet.

24. Schreibt ab und füllt die Lücken so aus, dass die Aussagen wahr sind:
a) 3,53 km = … dam;
b) 800 m = … km;
c) 12 000 m^2 = … hm^2 = … ha;
d) 0,014 km^2 = … m^2;
e) 7000 m^3 = … dam^3;
f) 3,5 m^3 = … dm^3.

25. Übertragt die Rechnungen in eure Hefte, berechnet und ergänzt, sodass die Aussagen wahr sind:
a) 1 km + 2 hm + 3 dam = … m;
b) 3 km – 4,4 hm – 33,3 dam = … cm;
c) 5 ha + 5 a + 5 m^2 = … m^2;
d) 30 m^2 + 3,303 dam^2 + 33 000 dm^2 = … m^2.

26. Zeichnet mithilfe der geometrischen Instrumente:
a) den Strahl *OA* mit dem Ursprung *O*;
b) die Strecke *AB* mit der Länge von 7,5 cm;
c) den rechten Winkel *ABC* und den gestreckten Winkel *DEF*;
d) die verschiedenen Punkte *A* und *B* in einem Abstand von 6 cm voneinander und *M*, die Mitte der Strecke *AB*;
e) die verschiedenen Punkte *C* und *D* und den Punkt *S*, den symmetrischen Punkt von *C* in Bezug auf *D*.

27. In der nebenstehenden Abbildung ist der Würfel *ABCDEFGH* dargestellt. Nennt:
a) zwei parallele Geraden;
b) drei sich schneidende Geraden.

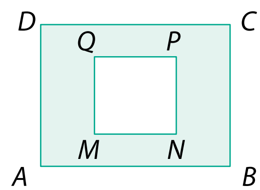


28. Führt die Rechnungen mit Winkelmaßen durch:
a) $12^\circ34' + 43^\circ26'$;
b) $75^\circ40' + 34^\circ32' - 100^\circ12'$;
c) $12 \cdot (5^\circ4')$;
d) $(25^\circ48') : 4$.

29. Berechnet den Umfang und den Flächeninhalt eines Rechtecks, dessen Länge 21,6 cm ist, und dessen Breite ein Drittel der Länge beträgt.

30. In ein Aquarium werden 144 Liter Wasser gegossen.
a) Findet heraus, wie hoch das Wasser steht, wenn das Aquarium die Form eines Quaders mit den Dimensionen $L = 96$ cm, $l = 50$ cm und $h = 40$ cm hat.
b) Gebt den Füllstand des Aquariums in Prozenten an.

31. Die Abbildung zeigt einen rechteckigen Park *ABCD* mit *AB* = 85 m, *BC* = 44 m. Das Quadrat *MNPQ* stellt das umlaufende Geländer dar, das den Eislaufplatz umgibt. Wenn das umlaufende Geländer 132 m lang ist und die Fläche um den Eislaufplatz mit Gras bedeckt ist, berechnet:



a) die Länge des Teils *MN* des Zauns.
b) die mit Gras bedeckte Fläche.

II ERSTBEWERTUNGSTESTS

TEST 1

I. *Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.*

5 Pkte. **1.** Das Ergebnis der Rechnung $1 + 3^0 + 595 : 17$ ist:

A. 35; **B.** 36; **C.** 37; **D.** 38.

5 Pkte. **2.** Die Summe der Zahlen, die durch 5 geteilt den Quotienten 4 ergeben, ist:

A. 100; **B.** 110; **C.** 120; **D.** 200.

5 Pkte. **3.** Als Dezimalbruch geschrieben ist die Zahl $\frac{65}{4}$:

A. 16,25; **B.** 12,25; **C.** 15,26; **D.** 16,15.

5 Pkte. **4.** Von den Zahlen $\overline{aaa0}$, $\overline{bbb1}$, $\overline{ccc2}$, 1234 ist durch 3 teilbar:

A. $\overline{aaa0}$; **B.** $\overline{bbb1}$; **C.** $\overline{ccc2}$; **D.** 1234.

5 Pkte. **5.** Simi hat in Geografie folgende Noten: 8, 10, 9, 8. Die Mittelnote ist:

A. 8; **B.** 8,50; **C.** 8,75; **D.** 9.

5 Pkte. **6.** Ein Quadrat mit dem Umfang von 0,16 km hat eine Seitenlänge von:

A. 16 m; **B.** 4 m; **C.** 40 m; **D.** 400 m.

II. *Schreibt die vollständigen Lösungen auf.*

20 Pkte. **1.** Man betrachte die Zahl $a = 2^4 + 3^8 : 3^5 - (2^7 \cdot 3^9) : (2^5 \cdot 3^8)$.

a) Berechnet die Zahl a.

b) Schreibt die Teiler der Zahl a auf und berechnet deren Summe.

20 Pkte. **2.** Ein Auto legt 720 Meter in einer Minute zurück. Berechnet die Strecke, die das Auto in 0,75 Stunden zurücklegt, wenn die Geschwindigkeit konstant bleibt. Gebt das Ergebnis in Kilometern an.

20 Pkte. **3.** Zeichnet mit dem Lineal die Strecke AB mit der Länge von 18 cm. Auf der Strecke AB werden die Punkte C und D so dargestellt, dass AC $\frac{2}{9}$ der Länge der Strecke AB ist und D die Mitte der Strecke BC.

Berechnet die Längen der Strecken AC, BC, BD, AD.

Bemerkung: *Arbeitszeit: 50 Minuten*
10 Punkte von Amts wegen

TEST 2

I. *Wählt den Buchstaben aus, der die richtige Antwort angibt. Nur eine Antwort stimmt.*

5 Pkte. **1.** Das Ergebnis der Rechnung $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{4} - \frac{5}{6}$ ist:

A. $\frac{1}{5}$; **B.** $\frac{2}{5}$; **C.** $\frac{3}{5}$; **D.** $\frac{4}{5}$.

5 Pkte. **2.** Wenn $2^x - 2^4 = 48$, dann ist x:

A. 8; **B.** 7; **C.** 6; **D.** 5.

5 Pkte. **3.** Wenn die Zahl $\overline{3aa3}$ durch 9 teilbar ist, dann ist a:

A. 0; **B.** 1; **C.** 6; **D.** 3.

5 Pkte. **4.** Dani hat 11 Geldscheine, einige zu 10 Lei, einige zu 5 Lei. Wenn bekannt ist, dass er insgesamt 95 Lei hat, ist die Anzahl der 5-Lei-Scheine:

A. 3; **B.** 5; **C.** 1; **D.** 9.

5 Pkte. **5.** Der Flächeninhalt des Rechtecks mit dem Umfang 24 dm und mit der Länge, die um 2 dm größer als die Breite ist, beträgt:

A. 28 dm^2; **B.** 24 dm^2; **C.** 26 dm^2; **D.** 35 dm^2.

5 Pkte. **6.** Annas Briefmarkensammlung ist in zwei Ordnern organisiert, die jeweils 400 Briefmarken enthalten. Die Anzahl der Briefmarken in Annas Sammlung beträgt $\frac{8}{9}$ der Anzahl der Briefmarken ihrer Freundin Sonja. Die beiden Mädchen haben zusammen:

A. 1700 Briefmarken; **B.** 1600 Briefmarken; **C.** 1800 Briefmarken; **D.** 2000 Briefmarken.

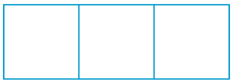
II. *Schreibt die vollständigen Lösungen auf.*

10 Pkte. **1. a)** Berechnet die Summe der kleinsten dreistelligen natürlichen Zahl, die ein Vielfaches von 25 ist, und der größten dreistelligen natürlichen Zahl, die eine Quadratzahl ist.

10 Pkte. **b)** Berechnet die Differenz zwischen der größten vierstelligen natürlichen Zahl, die eine Potenz von 2 ist, und der kleinsten dreistelligen Primzahl.

20 Pkte. **2.** Sara verlässt das Haus, um ins Kino zu gehen. Nachdem sie 120 m gegangen ist, stellt sie fest, dass sie ihre Eintrittskarte vergessen hat. Sie kehrt um, holt ihre Eintrittskarte und geht zurück zum Kino, wobei sie insgesamt 2 km zurücklegt. Bestimmt die Entfernung zwischen Saras Haus und dem Kino.

20 Pkte. **3.** Wenn man drei Quadrate mit gleich langen Seitenlängen nebeneinanderlegt, entsteht ein Rechteck mit dem Flächeninhalt von 300 cm^2. Berechnet die Dimensionen und den Umfang des Rechtecks.



Bemerkung: Arbeitszeit: 50 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

1. Geometrie lernen mit **GeoGebra**

PROJEKTE

2. Organisieren von Daten mit **Microsoft Excel oder Microsoft Word**

A. Wenn ihr an den vorgeschlagenen Projekten teilnehmt, verbessert ihr eure Computerkenntnisse und lernt:

- geometrische Konfigurationen genau darstellen;
- Intuitiv Eigenschaften geometrischer Figuren beweisen;
- Maße von Winkeln, Streckenlängen, Abständen und Flächen berechnen;
- Animationen mit geometrischen Grundelementen erstellen;
- den Begleittext zu einer geometrischen Figur oder einer Animation anzeigen.

- eine Häufigkeitstabelle erstellen und sie für die Darstellung in ansprechenden Formen aufbereiten;
- Diagramme im Zusammenhang mit einem Datensatz erstellen;
- den Mittelwert einer Reihe von numerischen Daten berechnen;
- einen Datensatz ordnen;
- Daten in den konstruierten Datensatz einfügen und daraus entfernen;
- eine Excel- oder Word-Datei bearbeiten und speichern.

B. „HERAUSFORDERUNGEN"

Jede „Herausforderung" ist eigentlich eine Aufforderung, eine Konfiguration mit GeoGebra oder eine Datentabelle und ein entsprechendes Diagramm mit Microsoft Excel oder Microsoft Word zu erstellen.
Die Aufforderung wird durch ein Video gestartet, in dem die Aufgabe und die Arbeitsweise erklärt werden.
Das Video kann im digitalen Lehrbuch (in rumänischer Sprache) angesehen werden.

1. MENGEN. DIE MENGE DER NATÜRLICHEN ZAHLEN

1.1 Mengen. Beziehungen zwischen Mengen

L1 Mengen. Die Menge der natürlichen Zahlen

Wir lösen und beobachten

In der nebenstehenden Abbildung sehen wir: mehrere Schüler in einem Klassenzimmer, Tische, Karten, eine Wanduhr, ein Bücherregal, Schreibgeräte, Bücher, Hefte und andere Gegenstände.
Wenn wir uns nur auf eine Kategorie von klar definierten, eindeutigen Objekten beziehen wollen, die durch eine *gemeinsame Eigenschaft* gekennzeichnet sind, sprechen wir über:

– *die Menge der Schüler* in der Klasse, wobei jeder Schüler ein *Element* der Menge darstellt;
– *die Menge der Bänke* im Klassenzimmer, wobei jede Bank ein *Element* der Menge ist;
– *die Menge der Bücher* im Klassenzimmer, *die Menge* der Bücher im Bücherregal, *die Menge* der Bücher auf den Tischen;
– *die Menge der Karten* im Klassenzimmer usw.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

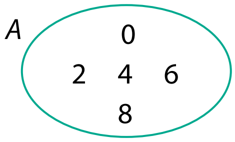
Betrachten wir die Aussage: „Die geraden Ziffern sind: 0, 2, 4, 6, 8."
Die aufgezählten Elemente sind *wohlbestimmt* und *eindeutig*. Sie bilden *die Menge* der geraden Ziffern. Jede gerade Ziffer ist *ein Element* der angegebenen Menge. Die Elemente der Menge werden zwischen geschweiften Klammern $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ *aufgezählt*.

Die Menge ist eine „Sammlung" von Objekten, die *wohlbestimmt* und *eindeutig* sind und *Elemente* der Menge genannt werden.

Die Mengen werden mit Großbuchstaben bezeichnet: $A, B, C, ..., X, Y, Z$.
Die Elemente der Menge werden mit *Kleinbuchstaben* bezeichnet: $a, b, c, ..., x, y, z$.

Wenn A eine Menge ist und x ein Element davon ist, sagen wir, dass x zu der Menge A *gehört* (*zugehörig* ist) und schreiben $x \in A$.	Wenn $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, dann: $0 \in A$, $2 \in A$, $4 \in A$, $6 \in A$ und $8 \in A$.
Wenn A eine Menge ist und x kein Element davon ist, sagen wir, dass x *nicht* zu der Menge A *gehört* (*nicht zugehörig* ist) und schreiben $x \notin A$.	Wenn $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, dann: $1 \notin A$, $3 \notin A$, $5 \notin A$, $9 \notin A$.

Die Mengen können auf eine der folgenden Arten dargestellt werden:

1. durch *Aufzählung der Elemente* in einer geschweiften Klammer:	$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;
2. indem man die Elemente in eine geschlossene krumme Linie, ein sogenanntes Venn-Euler-*Diagramm*, schreibt:	
3. durch Angabe einer *gemeinsamen Eigenschaft*, die für alle Elemente gilt:	$A = \{x \mid x \text{ gerade Ziffer}\}$ Wir lesen: „die Menge der Elemente x mit der Eigenschaft, dass x eine gerade Ziffer ist".

Bemerkung: In der 6. Klasse werden wir nur die ersten beiden Möglichkeiten verwenden, eine Menge zu schreiben: durch Aufzählung der Elemente oder mithilfe der Venn-Euler-Diagramme.

Die Menge aller natürlichen Zahlen heißt *Menge der natürlichen Zahlen* und wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.	Wir schreiben $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.
Die Menge der natürlichen Zahlen, die verschieden sind von 0, wird als *Menge der von null verschiedenen natürlichen Zahlen* bezeichnet.	Wir schreiben $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.
Eine Menge heißt *numerische Menge (Zahlenmenge)*, wenn alle ihre Elemente Zahlen sind.	Die Menge $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ist eine *numerische* Menge. Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^*$ sind *numerische* Mengen.
Eine Menge heißt *nicht-numerische Menge*, wenn sie mindestens ein Element enthält, das keine Zahl ist.	Die Mengen $B = \{M, a, t, h, e\}$, $C = \{a, 1, 2\}$, $M = \{◆, ●, *\}$ sind *nicht-numerische* Mengen.

Eine Menge kann *keine Elemente* haben, sie kann eine *endliche Anzahl* von Elementen haben, oder sie kann eine *unendliche Anzahl* von Elementen haben.

Eine Menge, die keine Elemente hat, wird *leere Menge* genannt und mit $\varnothing$ bezeichnet.	Die Menge der Konsonanten in dem Wort „Ei" ist die leere Menge.
Eine Menge, die eine bestimmte (endliche) Anzahl von Elementen hat, wird *endliche Menge* genannt. Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M wird *Kardinalzahl* dieser Menge genannt und mit card M bezeichnet.	Die leere Menge ist eine endliche Menge, ihre Kardinalzahl ist 0, und wir schreiben card $\varnothing = 0$. Die Menge $M = \{1, 4, 7, 9\}$ ist eine endliche Menge, ihre *Kardinalzahl* ist 4, und wir schreiben card $M = 4$.
Eine Menge, deren Anzahl der Elemente nicht genau bestimmt werden kann, wird *unendliche Menge* genannt.	Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^*$ sind unendliche Mengen. In der Geometrie bestehen die Gerade, die Halbgerade (der Strahl), die Strecke aus einer *unendlichen Anzahl* von Punkten, d. h. aus *unendlich* vielen Punkten. Schlussfolgernd sind die Gerade, die Halbgerade, die Strecke *unendliche Mengen* von Punkten.

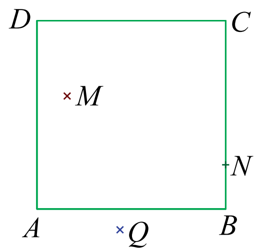
Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 1

In der Abbildung ist $ABCD$ ein Quadrat, der Punkt M liegt innerhalb des Quadrats, der Punkt N liegt auf der Seite BC und der Punkt Q liegt außerhalb des Quadrats.

a) Schreibt die Menge V der Eckpunkte des Quadrats, die Menge L der Seiten des Quadrats und die Menge P der abgebildeten Punkte, die nicht zum Quadrat gehören, auf.

b) Bestimmt für jeden der Punkte A, B, C, D, M, N, Q, ob sie zum Quadrat $ABCD$ gehören. Schreibt das Ergebnis in jedem Fall mithilfe eines der Symbole, $\in$ oder $\notin$, auf.



Lösung: **a)** $V = \{A, B, C, D\}$; $L = \{AB, BC, CD, DA\}$; $P = \{M, Q\}$. **b)** $A \in ABCD$; $B \in ABCD$; $C \in ABCD$; $D \in ABCD$; $N \in ABCD$; $M \notin ABCD$; $Q \notin ABCD$.

Ein wenig Sprachlehre

Die Kardinalzahl drückt eine natürliche Zahl ohne Bezug auf Objekte oder die Reihenfolge der Objekte aus.
Die Ordnungszahl drückt den Ort oder die numerische Reihenfolge von Objekten in einer Folge aus.

Anwendung 2

Zweiundneunzig Schüler unserer Schule nahmen an einer Freiwilligentätigkeit teil. *Zwei* von ihnen koordinierten die Aktivität und die anderen *neunzig* wurden in *neun* Gruppen mit der gleichen Anzahl von Schülern aufgeteilt. *Die erste, die zweite* und *die dritte* Gruppe bestanden aus *Fünftklässlern* (5. Klasse), die nächsten *drei* Gruppen bestanden nur aus *Sechstklässlern* (6. Klasse) und die restlichen Gruppen nur aus *Siebtklässlern* (7. Klasse).

I. a) Schreibt die Menge *C* der im Text vorkommenden *Kardinalzahlen* auf.
b) Schreibt die Menge *O* der im Text vorkommenden *Ordinalzahlen* auf.
c) Schreibt die Menge *G* der Gruppen auf, zu denen Claudiu gehören könnte, wenn man weiß, dass er ein Siebtklässler ist.

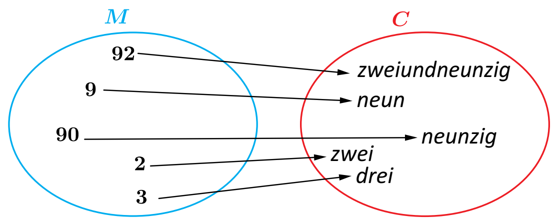
Lösung

I. a) C = {*zweiundneunzig, zwei, neunzig, neun, drei*}.
b) O = {*die erste, die zweite, die dritte, die fünfte, die sechste, die siebte*}.
c) In der siebten Klasse sind die Schüler der letzten drei Gruppen. G = {*siebte* Gruppe, *achte* Gruppe, *neunte* Gruppe}.

II. Wir bezeichnen mit *A* die Menge der an der Aktivität teilnehmenden Schüler, mit *B* die Menge der die Aktivität koordinierenden Schüler, mit *D* die Menge der in Gruppen organisierten Schüler, mit *E* die Menge der Gruppen und mit *F* die Menge der Gruppen von Siebtklässlern. Stellt mithilfe der Venn-Euler-Diagramme die Menge M = {card *A*, card *B*, card *D*, card *E*, card *F*} und die Menge *C* dar. Stellt mithilfe von Pfeilen die Entsprechung zwischen den Elementen der beiden Mengen her.

Lösung

Aus dem Text folgt:
card $A = 92$; card $B = 2$; card $D = 90$;
card $E = 9$; card $F = 3$.
Dann ist $M = \{2, 3, 9, 90, 92\}$. Jedes Element in der Menge *C* stellt die Kardinalzahl einer der Mengen *A*, *B*, *D*, *E*, *F* dar.



Übungen und Aufgaben

1. Betrachten wir die Wörter: Zahl; Schule; Mathematik.
a) Schreibt, durch Aufzählen, die Menge der Buchstaben auf, aus denen die gegebenen Wörter gebildet sind.
b) Übertragt die Tabelle in eure Hefte und füllt sie nach dem vorgegebenen Muster aus.

Das Wort	Zahl	Schule	Mathematik
Anzahl der Buchstaben des Wortes	4		
Die Menge der Buchstaben des Wortes	{Z, a, h, l}		
Die Kardinalzahl der Menge der Buchstaben des Wortes	4		

2. Betrachten wir die Zahlen: 2022; 321321; 11001100.
a) Schreibt, indem ihr die Elemente aufzählt, die Anzahl der Ziffern auf, aus denen die gegebenen Zahlen bestehen.
b) Übertragt die Tabelle in eure Hefte und füllt sie nach dem vorgegebenen Muster aus.

Zahl	2022	321 321	11 001 100
Anzahl der Ziffern der Zahl	4		
Die Menge der Ziffern der Zahl	{0, 2}		
Die Kardinalzahl der Menge der Ziffern der Zahl	2		

3. Wir betrachten die Mengen:
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$,
$C = \{100, 200, 300, \ldots 900\}$,
$D = \{0, 5, 15, 20, \ldots, 40\}$.
Bestimmt die Kardinalzahl jeder Menge.

4. Schreibt, unter Verwendung von Venn-Euler-Diagrammen:
a) die Menge *A*, die aus allen natürlichen Zahlen, die kleiner als 3 sind, besteht;
b) die Menge *B*, die aus allen ungeraden Zahlen zwischen 7 und 14 besteht;
c) die Menge *C*, die aus den Vokalen des Wortes *Aufgabe* besteht.

5. Betrachtet die Menge *P* aller Landkreise in Rumänien und die Menge *T* aller Städte in Rumänien.
a) Schreibt drei Elemente der Menge *P*;
b) Schreibt vier Elemente der Menge *T*.

6. Schreibt die Menge der Ziffern im Zehnersystem auf jede der folgenden Arten:
a) durch Aufzählung der Elemente;
b) durch Venn-Euler-Diagramme.

7. Sei *M* die Menge der natürlichen Zahlen der Form $m = 5 \cdot n + 3, n \in \mathbb{N}$.
a) Schreibt die fünf kleinsten Elemente der Menge *M* auf.
b) Prüft, ob die Zahlen 29, 48 und 2023 Elemente der Menge *M* sind.
c) Zeigt, dass die Menge *M* keine Quadratzahlen enthält.

8. Schreibt die Menge aller Zahlen mit höchstens zwei Ziffern, die sich nur mit den Ziffern 0 und 1 bilden lassen.

9. Wir betrachten die Mengen:
$M = \{2, 4, 6, 9\}$, $P = \{1, 2, 4, 8\}$. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und tragt den Buchstaben ***W*** ein, falls die Aussage wahr ist, und den Buchstaben ***F***, falls die Aussage falsch ist.

Aussage	***W/F***
$2 \in P$	**W**
$2^2 \notin P$	
$2 \in M$ und $2 \notin P$	
$4 \in M$ und $4 \in P$	

Aussage	***W/F***
$5 \notin P$	
$3^2 \notin M$	
$6 \in M$ oder $6 \in P$	
card M = card P	

10. Schreibt anhand der Verwaltungskarte Rumäniens die Menge der Kreise auf, zu denen folgende Städte gehören: Alba-Iulia, Buşteni, Constanţa, Deva, Eforie-Nord, Mangalia, Piatra-Neamţ, Timişoara, Sinaia.

11. Seien *a*, *b* von null verschiedene Ziffern im Zehnersystem, die folgende Ungleichungen bestätigen: $1 < a + 2 \cdot b < 7$.
a) Schreibt die Menge aller zweistelligen Zahlen auf, die sich mit den Ziffern *a* und *b* bilden lassen.
b) Bestimmt die Kardinalzahl der erhaltenen Menge.

Minitest

Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

15 Pkte. **1.** Betrachtet die Menge *T* aller Städte in Siebenbürgen. Ein Element der Menge *T* ist:
A. Buzău; **B.** Arad; **C.** Târgovişte; **D.** Medgidia.

15 Pkte. **2.** Die ungeraden Ziffern, die durch Aufzählen der Elemente geschrieben werden, sind:
A. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; **B.** $\{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$; **C.** $\{1, 3, 5, 9\}$; **D.** $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

20 Pkte. **3.** Das größte Element der Menge der Quadratzahlen mit höchstens zwei Ziffern ist:
A. 90; **B.** 100; **C.** 81; **D.** 99.

20 Pkte. **4.** Wenn *x* eine natürliche Zahl ist und $2 \in \{x - 3, x + 3\}$, dann ist *x* gleich:
A. 2; **B.** 3; **C.** 1; **D.** 5.

20 Pkte. **5.** Wenn $y + 2$ und $y + 5$ Elemente der Menge $\{4, 6, 7, 8\}$ sind, dann ist *y* gleich:
A. 2; **B.** 4; **C.** 6; **D.** 7.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Beziehungen zwischen Mengen

Wir lösen und beobachten

Wir betrachten die Menge A der ungeraden natürlichen Zahlen, die kleiner als 13 sind, die Menge B der ungeraden natürlichen Zahlen und die Menge $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

a) Schreibt die Menge A durch Aufzählen der Elemente. **b)** Bestimmt für die Mengen A und C, ob es Elemente gibt, die zu einer Menge gehören, aber nicht auch zu der anderen.	*Lösung* **a)** Die ungeraden natürlichen Zahlen, die kleiner als 13 sind, sind: 1, 3, 5, 7, 9, 11, also $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. **b)** Da $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ist, folgern wir, dass die beiden Mengen *genau die gleichen Elemente* haben.

Wir sagen, dass die Mengen A und C *gleich* sind.

c) Bestimmt für die Mengen A und B, ob es Elemente gibt, die zu einer der Mengen gehören und nicht zu der anderen.	**c)** Wenn ein Element zur Menge A gehört, dann ist es ungerade, also gehört es auch zur Menge B. Andererseits ist die Zahl 27 ungerade, d. h., sie gehört zur Menge B, aber nicht zur Menge A. Es gibt also Elemente der Menge B, die nicht zur Menge A gehören.

Wir sagen:
- Die Menge A *ist* in Menge B *eingeschlossen*, oder *Menge B schließt Menge A ein*, oder die *Menge A ist eine Teilmenge oder ein Teil* der Menge B.
- Menge B *ist in Menge A nicht eingeschlossen*, oder Menge A *schließt Menge B nicht ein*.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

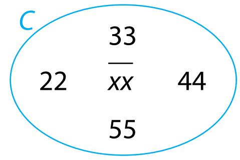
Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.	Wenn A die Menge der Ziffern in der Zehnerbasis ist und B die Menge der natürlichen Zahlen, die kleiner als 10 sind, dann ist $A = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Wenn A und B zwei gleiche Mengen sind, schreiben wir $A = B$.	Wenn A die Menge der Ziffern in der Zweierbasis ist und $B = \{0, 1, 2\}$, dann ist $A = \{0, 1\}$ und enthält nicht das Element 2, also $A \neq B$.
Wenn A und B nicht gleich sind, schreiben wir $A \neq B$.	$\varnothing \subset M$ für jedwelche Menge M. $M \subset M$ für jedwelche Menge M. Alle Elemente der Menge $A = \{0, 1\}$ sind auch Elemente der Menge $B = \{0, 1, 2\}$, also $A \subset B$, und A ist eine *Teilmenge* der Menge B.
Die Menge A *ist* in der Menge B *eingeschlossen*, wenn alle Elemente der Menge A auch Elemente der Menge B sind. Wenn die Menge A in der Menge B eingeschlossen ist, schreiben wir $A \subset B$. Die Menge A wird *Teilmenge* oder *Teil* der Menge B genannt. Wenn die Menge A *nicht* in der Menge B *eingeschlossen ist*, schreiben wir $A \not\subset B$.	Für die Mengen $A = \{a, 2, c\}$ und $B = \{a, c, 7\}$ gilt: $2 \in A$, aber $2 \notin B$, also $A \not\subset B$. $7 \in B$, aber $7 \notin A$, also $B \not\subset A$.

Bemerkungen
Wenn die Menge A in der Menge B *eingeschlossen* ist, sagen wir, dass die Menge B die Menge A *einschließt,* und schreiben $A \subset B$.
Wenn A *nicht* in der Menge B *eingeschlossen* ist, sagen wir, dass die Menge B die Menge A *nicht einschließt,* und schreiben $B \not\supset A$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 1

Man betrachte die Mengen $A = \{11, 22, 33, 44, 55\}$, $B = \{11, \overline{2a}, \overline{b5}, 44, \overline{cc}\}$ und die Menge C in dem nebenstehenden Diagramm.
a) Bestimmt die Ziffern a, b, c, sodass $A = B$.
b) Bestimmt die Ziffer x, sodass $B = C$.
c) Stellt anhand der in a) und b) erhaltenen Werte die Beziehung zwischen den Mengen A und C her.



Lösung: **a)** Damit $A = B$, d. h., damit A und B die gleichen Elemente haben, muss $\overline{2a} = 22$, $\overline{b5} = 55$ und $\overline{cc} = 33$ sein. Wir erhalten $a = 2$, $b = 5$, $c = 3$.
b) Aus $B = C$ folgt $\overline{xx} = 11$, also $x = 1$. **c)** $A = \{11, 22, 33, 44, 55\} = C$.

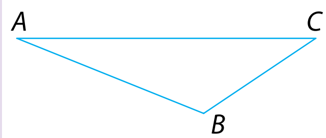
Wir merken uns

1. Jede Menge ist gleich sich selbst. $A = A$ für jedwelche Menge A.
2. Wenn $A = B$, dann ist $B = A$.
3. Wenn $A = B$ und $B = C$, dann ist $A = C$.

Bemerkungen: **1.** Wenn $A = B$, dann ist card A = card B.
2. Es gibt verschiedene Mengen, die die gleiche Anzahl von Elementen haben, d. h., $A \neq B$ und card A = card B.

Anwendung 2

Das Dreieck ABC, das in der Abbildung dargestellt ist, ist die Menge aller Punkte der Ebene, die sich mindestens auf einer der Strecken AB, BC, AC befinden.
a) Schreibt die Menge L der Seiten des Dreiecks und die Menge V der Ecken des Dreiecks.
b) Schreibt die Teilmengen der Menge L auf, die die Kardinalzahl 2 haben.
c) Schreibt alle Teilmengen der Menge V.



Lösung: **a)** $L = \{AB, BC, CA\}$; $V = \{A, B, C\}$. **b)** $\{AB, BC\}$; $\{AB, CA\}$; $\{BC, CA\}$;
c) $\varnothing$; $\{A\}$; $\{B\}$; $\{C\}$; $\{A, B\}$; $\{B, C\}$; $\{A, C\}$; $\{A, B, C\}$.

Anwendung 3

Bestimmt und argumentiert, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind: $\{1, 2, 3\} \subset \{0, 2, 1, 7\}$; $\{3\} \subset \{0, 1, 2, 3, 7\}$; $\varnothing \not\subset \{0\}$; $\{a, b, c\} \supset \{a, c\}$.

Lösung

Aussage	*W/F*	Begründung
$\{1, 2, 3\} \subset \{0, 2, 1, 7\}$	F	$3 \in \{1, 2, 3\}$, aber $3 \notin \{0, 2, 1, 7\}$
$\{3\} \subset \{0, 1, 2, 3, 7\}$	W	$3 \in \{3\}$ und $3 \in \{0, 1, 2, 3, 7\}$
$\varnothing \not\subset \{0\}$	F	$\varnothing$ ist Teilmenge jedwelcher Menge
$\{a, b, c\} \supset \{a, c\}$	W	$a \in \{a, c\}$ und $a \in \{a, b, c\}$; $c \in \{a, c\}$ und $c \in \{a, b, c\}$;

Wir merken uns

a) Die leere Menge ist Teilmenge jedwelcher Menge A. Wir schreben $\varnothing \subset A$.
b) Wenn $A \subset B$ und $B \subset C$, dann $A \subset C$.
c) Folgende Beziehungen finden statt: $\mathbf{c_1}$**:** Wenn $A \subset B$ und $B \subset A$, dann $A = B$. $\mathbf{c_2}$**:** Wenn $A = B$, dann $A \subset B$ und $B \subset A$.

Übungen und Aufgaben

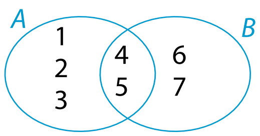
1. Es sei die Menge $M = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und tragt den Buchstaben ***W*** ein, wenn die Aussage wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

Aussage	***W/F***	Aussage	***W/F***
$\{2, 3\} \subset M$		$\{2, 6\} \not\subset M$	
$\{6, 7\} \not\subset M$		$\{3, 4, 5\} \not\subset M$	
$\{3, 6, 7\} \subset M$		$\{0, 1, 6\} \not\subset M$	
$\{2, 8\} \subset M$		$\{1, 2, 3, 4, 5, 8\} \subset M$	

2. Schreibt alle Teilmengen für jede der Mengen auf:
a) $A = \{a, b\}$; **b)** $B = \{0, 1, 2\}$; **c)** $C = \{2, 3, 9, 10\}$.

3. Schreibt die Teilmengen mit zwei Elementen der Menge der Buchstaben des Wortes „*Deckel*“.

4. In der nebenstehenden Abbildung sind die Mengen A und B durch Diagramme dargestellt.



a) Bestimmt die Menge M, deren Elemente den Mengen A und B gemeinsam sind.
b) Schreibt die Teilmengen der Menge M auf.
c) Bestimmt die Menge C, die aus Elementen besteht, die zur Menge A, aber nicht zur Menge B gehören.
d) Schreibt alle Teilmengen der Menge C auf.

5. Die Menge M hat zehn Elemente. Gebt die Anzahl der Teilmengen der Menge M an, die die Kardinalzahl 2 haben.

6. Betrachtet die Menge $X = \{13, 23, 33, 43, \ldots, 93\}$.
a) Bestimmt die Teilmengen der Menge X, die nur aus natürlichen Zahlen bestehen, die durch 3 teilbar sind.
b) Entscheidet unter Begründung eurer Antwort, ob es nicht-leere Teilmengen der Menge X gibt, die nur aus Quadratzahlen bestehen.

7. Findet die Werte der natürlichen Zahl a, sodass die Menge $\{a, 7\}$ eine Teilmenge der Menge $\{6, 7, 8\}$ ist.

8. Bestimmt die Menge A, wenn bekannt ist, dass $\{1, 3, 5\} \subset A$ und $A \subset \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

9. Die Mengen A und B sind gleich. Findet die Elemente a und b für jeden der Fälle:
a) $A = \{1, a, 3\}, B = \{2, 3, b\}$
b) $A = \{a, 7, 11\}, B = \{1, b, 11\}$
c) $A = \{9, 16, a + b\}, B = \{a + 5, 16, 23\}$

10. Sei die Menge $M = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$. Bestimmt die Teilmengen der Menge M der Form $\{a, b, c\}$, wobei $a + b = c^2$.

Minitest

1. Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

15 Pkte. **a)** Eine Teilmenge der Menge der Primzahlen ist:
A. $\{1, 2, 3, 5\}$; **B.** $\{2, 4, 6, \ldots\}$; **C.** $\{15, 17\}$; **D.** $\{2, 3, 2{+}3, 23\}$.

15 Pkte. **b)** Wenn die Menge A alle natürlichen Zahlen zwischen 2 und 5 enthält, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ und die Menge C aus natürlichen Zahlen, die kleiner als 5 sind, besteht, dann:
A. $A \subset B$; **B.** $B \subset C$; **C.** $C \subset A$; **D.** $B \subset A$.

15 Pkte. **c)** Die Anzahl der Teilmengen mit zwei Elementen der Menge $\{1, 11, 111\}$ ist:
A. 1; **B.** 2; **C.** 3; **D.** 4.

15 Pkte. **d)** Die Mengen $\{x - 3, x + 3\}$ und $\{17, 23\}$ sind gleich, wenn x gleich ist:
A. 14; **B.** 20; **C.** 26; **D.** 23.

30 Pkte. **2.** Schreibt in eure Hefte ab und füllt die Lücken mit einem der Symbole $\subset$ oder $\not\subset$ aus, um wahre Aussagen zu erhalten:
a) $\{3\} \ldots \{1, 2, 3\}$; **b)** $\{a, b, c, d, e\} \ldots \{a, b\}$; **c)** $\varnothing \ldots \mathbb{N}$.

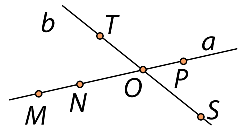
Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

1.2 Operationen mit Mengen

L1 Die Vereinigung zweier Mengen. Der Durchschnitt zweier Mengen. Die Differenz zweier Mengen

Wir lösen und beobachten

Beobachtet die nebenstehende Konfiguration und identifiziert:

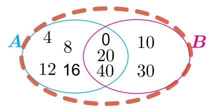


a) die Menge A der Punkte die auf der Geraden a liegen;
b) die Menge B der Punkte, die auf der Geraden b liegen;
c) die Menge X der Punkte, die sowohl auf der Geraden a als auch auf der Geraden b liegen;
d) die Menge Y der Punkte, die auf mindestens einer der Geraden a bzw. b liegen;
e) die Menge D_1 der Punkte auf der Geraden a, die nicht zur Geraden b gehören;
f) die Menge D_2 der Punkte auf der Geraden b, die nicht zur Geraden a gehören.

Lösung: **a)** $A = \{M, N, O, P\}$. **b)** $B = \{S, O, T\}$.
c) $X = \{O\}$. Die Menge X wird *Durchschnitt* der Mengen A und B genannt. Wir schreiben $X = A \cap B$.
d) $Y = \{M, N, O, P, S, T\}$. Die Menge Y wird *Vereinigung* der Mengen A und B genannt. Wir schreiben $Y = A \cup B$.
e) $D_1 = \{M, N, P\}$. Die Menge D_1 wird *Differenz* der Mengen A und B genannt. Wir schreiben $D_1 = A \setminus B$.
f) $D_2 = \{S, T\}$. Die Menge D_2 wird *Differenz* der Mengen B und A genannt. Wir schreiben $D_2 = B \setminus A$.

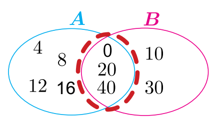
Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Die *Vereinigung* der Mengen A und B ist die Menge $A \cup B$, die aus Elementen gebildet wird, die *zu mindestens einer* der beiden Mengen gehören.

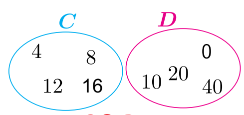


$A \cup B = \{4, 8, 12, 16, 0, 20, 40, 10, 30\}$

Der *Durchschnitt* der Mengen A und B ist die Menge $A \cap B$, die aus den gemeinsamen Elementen der beiden Mengen gebildet wird.
Zwei Mengen C und D, die keine gemeinsamen Elemente haben, werden *disjunkte* Mengen genannt. Wir schreiben $C \cap D = \varnothing$.

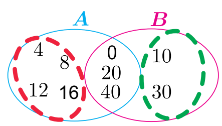


$A \cap B = \{0, 20, 40\}$



$C \cap D = \varnothing$

Die *Differenz* zwischen Menge A und Menge B ist die Menge $A \setminus B$ oder $A - B$, die aus den Elementen gebildet wird, die zu Menge A und nicht zu Menge B gehören.



$A - B = \{4, 8, 12, 16\}$
$B - A = \{10, 30\}$

Wir merken uns

Operation	Bezeichnung	Kennzeichnung	Wir lesen
Vereinigung	$A \cup B$	Wenn $x \in A \cup B$, dann $x \in A$ **oder** $x \in B$. Wenn $x \in A$ **oder** $x \in B$, dann $x \in A \cup B$.	Die Menge A *vereinigt* mit der Menge B oder *die Vereinigung* der Mengen A und B.
Durchschnitt	$A \cap B$	Wenn $x \in A \cap B$, dann $x \in A$ **und** $x \in B$. Wenn $x \in A$ **und** $x \in B$, dann $x \in A \cap B$.	Die Menge A *durchschnitten* mit der Menge B oder *der Durchschnitt* der Mengen A und B.
Differenz	$A \setminus B$	Wenn $x \in A \setminus B$, dann $x \in A$ **und** $x \notin B$. Wenn $x \in A$ **und** $x \notin B$, dann $x \in A \setminus B$.	Menge A *minus* Menge B oder *die Differenz* der Mengen A und B.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 1

Andrei, Vlad, Tudor, Silviu, Ioana, Alexandra, Mihai, Sofia und Simona, Schüler der 6. Klasse, nehmen jeweils an mindestens einem der Sportkurse teil. Andrei, Vlad, Tudor und Sofia nehmen am Basketballkurs teil; Tudor, Silviu, Ioana und Alexandra gehen zum Schwimmen; Ioana, Alexandra, Mihai, Sofia und Simona nehmen am Volleyballkurs teil. Wir bezeichnen mit A die Menge der Schüler, die am Basketballkurs teilnehmen, mit B die Menge der Schüler, die am Schwimmkurs teilnehmen, und mit C die Menge der Schüler, die am Volleyballkurs teilnehmen.

a) Schreibt durch Aufzählen der Elemente die Mengen A, B, C und gebt jeweils die Kardinalzahl an.
b) Schreibt die Mengen: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $C \setminus B$, $B \setminus C$.
c) Gebt unter Verwendung der Ergebnisse aus b) an:
c_1) die Anzahl der Schüler, die am Basketball- oder am Schwimmkurs teilnehmen;
c_2) die Anzahl der Schüler, die am Basketball- und am Volleyballkurs teilnehmen;
c_3) die Anzahl der Schüler, die am Schwimmkurs und nicht am Volleyballkurs teilnehmen.

Lösung

a) $A = \{$Andrei, Vlad, Tudor, Sofia$\}$; card $A = 4$;
$B = \{$Tudor, Silviu, Ioana, Alexandra$\}$; card $B = 4$;
$C = \{$Ioana, Alexandra, Mihai, Sofia, Simona$\}$; card $C = 5$;

b) $A \cup B = \{$Andrei, Vlad, Tudor, Sofia, Silviu, Ioana, Alexandra$\}$
$A \cap B = \{$Tudor$\}$; $B \cap C = \{$Ioana, Alexandra$\}$;
$A \cap C = \{$Sofia$\}$; $A \cap B \cap C = \{$Sofia$\}$;
$A \setminus B = \{$Andrei, Vlad, Sofia$\}$;
$C \setminus B = \{$Mihai, Sofia, Simona$\}$;
$B \setminus C = \{$Tudor, Silviu$\}$.

c) c_1) card $(A \cup B) = 7$; c_2) card $(A \cap C) = 1$; c_3) card $(B \setminus C) = 2$.

Anwendung 2

Sei A die Menge der zweistelligen natürlichen Zahlen und B sei die Menge der natürlichen Zahlen der Form $\overline{a5}$.

a) Stellt fest und begründet, ob die Menge B in der Menge A eingeschlossen ist.
b) Leitet die Beziehung zwischen den Mengen $A \cup B$ und A ab.
c) Leitet die Beziehung zwischen den Mengen $A \cap B$ und B ab.

Lösung

$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots, 25, \ldots 99\}$,
$B = \{15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95\}$.

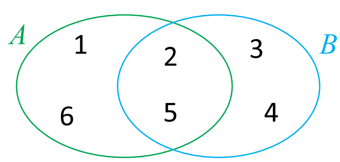
a) Alle Elemente der Menge B sind auch Elemente der Menge A, also $B \subset A$.
b) $A \cup B = A$.
c) $A \cap B = B$.

Wir merken uns

1. $A \cup B = B \cup A$ für jedwelche Mengen A und B.	**3.** Wenn $A \subset B$, dann $A \cup B = B$ und $A \cap B = A$.
2. $A \cap B = B \cap A$ für jedwelche Mengen A und B.	**4.** Wenn $A \neq B$, dann $A \setminus B \neq B \setminus A$.

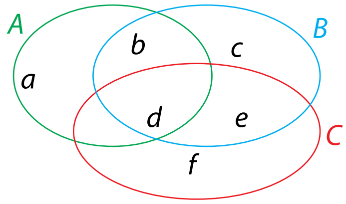
Übungen und Aufgaben

1. In der nebenstehenden Abbildung sind die Mengen A und B durch Diagramme dargestellt.
a) Schreibt durch Aufzählen der Elemente die Mengen A und B.
b) Bestimmt die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$. Schreibt sie durch Aufzählen der Elemente auf.



2. Es seien die Mengen $A = \{2, 3, 5\}$ und $B = \{1, 3, 4, 5\}$. Berechnet $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

3. In der unten stehenden Abbildung sind die Mengen A, B und C durch Diagramme dargestellt.
   a) Schreibt durch Aufzählen der Elemente die Mengen A, B und C.
   b) Bestimmt die Mengen $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(B \setminus A) \cap (B \setminus C)$. Schreibt sie durch Aufzählen der Elemente auf.



4. **a)** Schreibt zwei Mengen, deren Vereinigung die Menge $\{1, 2, 3\}$ ist.
   b) Schreibt zwei disjunkte Mengen, deren Vereinigung die Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ ist.

5. Bestimmt die Menge M, wenn $M \cup \{a\} = \{a, b, c\}$. Identifiziert alle möglichen Fälle.

6. Sei die Menge $P = \{3, 8\}$.
   a) Schreibt zwei Mengen auf, deren Durchschnitt die Menge P ist.
   b) Schreibt drei Mengen auf, deren Durchschnitt die Menge P ist.
   c) Schreibt zwei Mengen auf, deren Differenz die Menge P ist.

7. Bestimmt die Menge M, wenn $M \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $M \cap \{2, 3\} = \varnothing$.

8. Bestimmt die Mengen A und B, wenn folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden:
$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{2, 6\}$, $A \setminus B = \{1, 7\}$.

9. Bestimmt die Mengen A und B, wenn $A \setminus B = \{5, 6\}$, $B \setminus A = \{3, 7\}$ und $A \cap B = \{2, 4\}$.

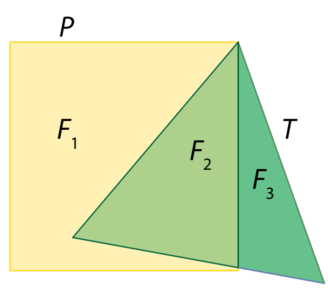
L2 Anwendungen: Operationen mit Mengen

Zur Erinnerung

Die Vereinigung der Mengen A und B ist die Menge $A \cup B$, die aus Elementen gebildet wird, die zu *mindestens einer* der beiden Mengen gehören.
Der Durchschnitt (oder Schnitt) der Mengen A und B ist die mit $A \cap B$ bezeichnete Menge, die aus den gemeinsamen Elementen der beiden Mengen gebildet wird.
Die Differenz der Mengen A und B ist die Menge $A \setminus B$ oder $A - B$, die aus Elementen besteht, *die zu* Menge A und *nicht zu* Menge B *gehören*.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 1
Durch teilweise Überlagerung der quadratischen Fläche P und der Dreiecksfläche T entstehen die Flächen F_1, F_2 und F_3.
a) Schreibt jede der Mengen F_1, F_2 und F_3, indem ihr Operationen zwischen den Mengen der Punkte P und T verwendet.
b) Stellt Beziehungen zwischen den Mengen $P \setminus F_2$ und $P \setminus T$ her.
c) Stellt Beziehungen zwischen den Mengen $P \cup T$, $P \cup F_3$, $F_1 \cup T$ und $F_1 \cup F_2 \cup F_3$ her.



Lösung
a) $F_1 = P \setminus T$; $F_2 = P \cap T$; $F_3 = T \setminus P$.
b) $P \setminus F_2 = P \setminus T = F_1$;
c) $P \cup T = P \cup F_3 = F_1 \cup T = F_1 \cup F_2 \cup F_3$.

Anwendung 2

See	Bucura	Zănoaga	Bâlea	Capra	Podragu	Tăul fără fund	Gâlcescu
Tiefe	15,5 m	29 m	11 m	8	16 m	17,6 m	9 m
Fläche	10 ha	6,5 ha	4,6 ha	1,6 ha	3 ha	3,76 ha	3 ha
Gebirgsmassiv, in dem er sich befindet	Retezat-Gebirge	Retezat-Gebirge	Fogarascher Gebirge	Fogarascher Gebirge	Fogarascher Gebirge	Rodna-Gebirge	Parâng-Gebirge

In der obigen Tabelle sind die Tiefe, die Fläche und das Gebirgsmassiv einiger Gletscherseen in Rumänien angegeben.

Foto vom Zănoaga-See – dem tiefsten Gletschersee in Rumänien

a) Verwendet die Daten in der Tabelle und schreibt:
- die Menge A der Seen, die in der Tabelle aufgeführt sind;
- die Menge B der Seen im Fogarascher Gebirge, die in der Tabelle aufgeführt sind;
- die Menge C der aufgeführten Seen mit einer Fläche von mehr als 3 ha;
- die Menge D der Seen mit einer Tiefe von mindestens 11 m.

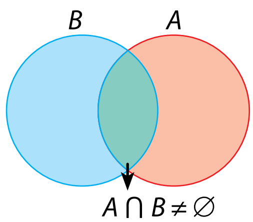
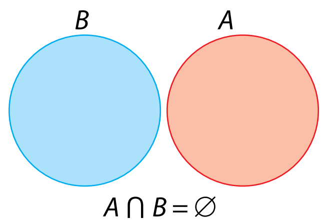
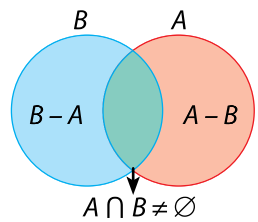
b) Schreibt unter Verwendung von Operationen mit Mengen und den Ergebnissen von Unterpunkt a):
- die Menge X der Seen, die nicht im Fogarascher Gebirge liegen;
- die Menge Y der Seen, deren Fläche größer als 3 ha ist und die mindestens 11 m tief sind;
- die Menge Z der Seen, deren Fläche größer als 3 ha ist oder die mindestens 11 m tief sind.

Lösung

a) $A = \{$Bucura, Zănoaga, Bâlea, Capra, Podragu, Tăul fără fund, Gâlcescu$\}$; $B = \{$Bâlea, Capra, Podragu$\}$;
$C = \{$Bucura, Zănoaga, Bâlea, Tăul fără fund$\}$; $D = \{$Bucura, Zănoaga, Bâlea, Podragu, Tăul fără fund$\}$;

b) $X = A \setminus B = \{$Bucura, Zănoaga, Tăul fără fund, Gâlcescu$\}$; $Y = C \cap D$ und $Z = C \cup D$, also
$Y = \{$Bucura, Zănoaga, Bâlea, Tăul fără fund$\}$; und $Z = \{$Bucura, Zănoaga, Bâlea, Podragu, Tăul fără fund$\}$.

Wir merken uns

card $(A \cup B) =$ $= \text{card } A + \text{card } B - \text{card } (A \cap B)$.	Wenn A und B *disjunkt* sind, dann ist $\text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$.	card $(A \cup B) =$ $= \text{card } (A \setminus B) + \text{card } (B \setminus A) + \text{card } (A \cap B)$.
		

Bemerkungen

1. Wenn $A = B$, dann $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$.
2. Wenn $A \neq B$, dann $A \setminus B \neq B \setminus A$.
3. $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$ für jedwelche Mengen A und B.
4. Wenn $A \cap B = \varnothing$, dann ist $A \setminus B = A$ und $B \setminus A = B$.

Übungen und Aufgaben

1. Berechnet für die Mengen $A = \{1, 2, 5, 7\}$ und $B = \{2, 9, 6\}$: $A \cup B$; $B \cup A$; $A \cap B$; $B \cap A$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

2. Die Menge A erfüllt *gleichzeitig* die Bedingungen:
a) $1 \in A$;
b) Wenn $x \in A$, dann $(x + 3) \in A$.
Zeigt, dass $10 \in A$.

3. Es sei die Menge A, die aus den Ziffern $\underline{a}$ besteht, für die die natürlichen Zahlen der Form $\overline{2a3}$ durch 3 teilbar sind, und die Menge B der natürlichen Zahlen b, für die $2^b \le 16$. Finde die Mengen A, B, $A \cap B$ und $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ heraus.

4. Menge A hat 25 Elemente, Menge B hat 52 Elemente, und $A \cap B$ hat 2 + 5 Elemente. Bestimmt die Anzahl der Elemente der Menge $A \cup B$.

5. Menge C hat 26 Elemente, Menge D hat 62 Elemente und $C \cup D$ hat 80 Elemente.
Bestimmt die Anzahl der Elemente der Menge $C \cap D$.

6. In einem Test mit 30 teilnemenden Schülern wurden zwei Aufgaben zur Lösung gestellt. Eine Aufgabe wurde von 25 Schülern gelöst, die andere Aufgabe von 17 Schülern. 2 Schüler haben keine Aufgabe gelöst. Findet heraus, wie viele Schüler beide Aufgaben gelöst haben. Löst die Aufgabe mithilfe von Mengen.

7. Betrachtet die Menge

$$A = \left\{ \frac{31}{2}, \frac{32}{3}, \frac{33}{4}, \frac{34}{5}, \ldots \right\}.$$

Bestimmt die Menge $B = A \cap \mathbb{N}$.

8. Es seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$, $B = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 11^2, 12^2\}$.
a) Bestimmt die Anzahl der Elemente der Mengen $A \cup B$ und $A \cap B$.
b) Vergleicht die Summe der Elemente der Menge A mit der Summe der Elemente der Menge B.

9. Die Mengen A und B sind disjunkt.
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ und
$A = \{a, b, c\}$, $a + b + c = 28$.
Bestimmt die Menge B und ermittelt alle möglichen Fälle.

10. Jeder der 232 Schüler einer Schule spricht mindestens eine der Sprachen Englisch und Französisch. 194 von ihnen sprechen Englisch und 96 Französisch.
a) Bestimmt die Anzahl der Schüler, die beide Sprachen sprechen.
b) Bestimmt die Anzahl der Schüler, die nur Englisch sprechen.

Minitest

Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

Es seien die Mengen $A = \{2, 3, 6\}$, $B = \{1, 3, 4\}$ und $C = \{3, 4, 5\}$.

20 Pkte. **a)** Die Menge $A \cup B$ ist:
A. $\{1, 2, 3, 6\}$; **B.** $\{1, 2, 4, 6\}$; **C.** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; **D.** $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.

20 Pkte. **b)** Die Menge $B \cap C$ ist:
A. $\{3, 4, 5\}$; **B.** $\{3, 5\}$; **C.** $\{3, 4\}$; **D.** $\{4, 5\}$.

20 Pkte. **c)** Die Menge $C \setminus A$ ist:
A. $\{3, 4\}$; **B.** $\{4, 5\}$; **C.** $\{3, 5\}$; **D.** $\varnothing$.

20 Pkte. **d)** Die Menge $A \setminus B$ ist:
A. $\{2, 3, 6\}$; **B.** $\{3, 6\}$; **C.** $\{1, 2, 3, 6\}$; **D.** $\{2,6\}$.

10 Pkte. **e)** Die Menge $A \cap B \cap C$ ist:
A. $\varnothing$; **B.** $\{2, 3\}$; **C.** $\{2, 4\}$; **D.** $\{3\}$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

1.3 Teilbarkeit in der Menge der natürlichen Zahlen

L1 Wiederholung und Ergänzungen

Zur Erinnerung

	Beispiel	Wie wir schreiben	Wie wir lesen
Die natürliche Zahl a ist teilbar durch die natürliche Zahl b (kann durch die natürliche Zahl b geteilt werden), wenn es eine natürliche Zahl c gibt, sodass: $a = b \cdot c$. Wir schreiben $a \vdots b$ oder $b \mid a$.	$6 = 3 \cdot 2$	$6 \vdots 2$ oder $6 \vdots 3$ oder $2 \mid 6$ oder $3 \mid 6$.	6 ist durch 2 teilbar; 6 ist durch 3 teilbar; 2 teilt 6; 3 teilt 6.

Bemerkungen

1. $0 \vdots a$ für jedwelche natürliche Zahl a. $(0 = a \cdot 0)$

2. $a \vdots 1$ und $a \vdots a$ für jedwelche natürliche Zahl a. $(a = 1 \cdot a)$

3. Wenn $a \neq 0$, dann $a \not\vdots\, 0$ (0 ist kein Teiler einer von null verschiedenen natürlichen Zahl).

4. Bemerkung: Um Missverständnissen vorzubeugen, wird in der 6. Klasse nur mit von null verschiedenen natürlichen Teilern gearbeitet.

Die Zahl a in der obigen Beziehung wird *Vielfaches* der Zahl b genannt, und b wird *Divisor (Teiler)* der Zahl a genannt.

Die Zahl 6 ist ein Vielfaches von 2 und 3. Die Zahlen 2 und 3 sind Divisoren (Teiler) von 6.

Wenn $a \geq 2$ ist, dann hat a mindestens zwei Teiler: die Zahl 1 und die Zahl a, die *uneigentliche Teiler* von a genannt werden.
Wenn a weitere Teiler hat, werden diese *eigentliche Teiler* von a genannt.

Für die Zahl 6:
1 und 6 sind *uneigentliche Teiler*;
2 und 3 sind *eigentliche Teiler*.

Eine natürliche Zahl $p \geq 2$, die genau zwei Teiler (1 und p) hat, wird *Primzahl* genannt.
Jede natürliche Zahl $n \geq 2$, die keine Primzahl ist, nennt man *zusammengesetzte* Zahl.

Bemerkungen

1. Die *einzige gerade Zahl*, die eine *Primzahl ist*, ist die Zahl 2.

2. Die Zahlen 0 und 1 *sind weder Primzahlen noch zusammengesetzte Zahlen*.

3. Wenn p eine Primzahl ist, dann ist p keine Quadratzahl.

4. Primzahlen haben nur uneigentliche Teiler.

5. Zusammengesetzte Zahlen haben mindestens einen eigentlichen Teiler.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

1. Wir bezeichnen mit T_n die Menge der Teiler und mit V_n die Menge der Vielfachen der natürlichen Zahl n.
Schreibt die Menge T_n, dann schreibt die Menge V_n, wobei ihr die vier kleinsten Elemente für die Zahlen 7, 12, 15 hervorhebt.

$T_7 = \{1, 7\}$;
$T_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;
$T_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$.

$V_7 = \{0, 7, 14, 21, \ldots\}$;
$V_{12} = \{0, 12, 24, 36, \ldots\}$;
$V_{15} = \{0, 15, 30, 45, \ldots\}$.

Bemerkung: Die Menge T_n ist eine endliche Menge für jedwelche natürliche Zahl n.
Die Menge V_n ist eine unendliche Menge für jedwelche natürliche Zahl n.

2. Es sei die Menge $A = \{16, 19, 26, 29, 36, 39, 46, 49, 56, 59, 66, 69, 76, 79, 86, 89, 96, 99\}$.

	Lösung
a) Schreibt die Teilmenge $B \subset A$, deren Elemente natürliche Zahlen sind, die durch 2 teilbar sind.	**a)** Die durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen bilden die Menge der Vielfachen von 2, bezeichnet mit V_2. $B = A \cap V_2 = \{16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96\}$.
b) Schreibt die Teilmenge $C \subset A$, deren Elemente natürliche Zahlen sind, die durch 3 teilbar sind.	**b)** Die durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen bilden die Menge der Vielfachen von 3, bezeichnet mit V_3. $C = A \cap V_3 = \{36, 39, 66, 69, 96, 99\}$.
c) Schreibt mithilfe der Ergebnisse von a) und b) die Teilmenge $D \subset A$, deren Elemente natürliche Zahlen sind, die durch 6 teilbar sind.	**c)** Eine natürliche Zahl ist nur dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist, d. h., $V_6 = V_2 \cap V_3$. Daher ist $D = B \cap C = \{36, 66, 96\}$.
d) Schreibt mithilfe der Ergebnisse von a) und b) die Teilmenge E, deren Elemente natürliche Zahlen sind, die durch mindestens eine der Zahlen 2 oder 3 teilbar sind.	**d)** Eine natürliche Zahl ist nur dann durch mindestens eine der Zahlen 2 oder 3 teilbar, wenn sie zur Vereinigung $V_2 \cup V_3$ gehört. Dann ist $E = A \cap (V_2 \cup V_3)$ oder $E = B \cup C = \{16, 26, 36, 39, 46, 56, 66, 69, 76, 86, 96\}$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Eigenschaft	*In Mengensprache ausgedrückt*
1. Wenn die natürliche Zahl $p \geq 2$ eine *Primzahl* ist, dann hat sie nur uneigentliche Teiler. Wenn die natürliche Zahl $p \geq 2$ nur uneigentliche Teiler hat, dann ist p eine Primzahl.	**1.** Wenn $p \geq 2$ eine *Primzahl* ist, dann $T_p = \{1, p\}$. Wenn $p \geq 2$ und $T_p = \{1, p\}$, dann ist p eine *Primzahl.*
Beispiel: $p = 11$ ist eine Primzahl und $T_p = T_{11} = \{1, 11\}$.	
2. Alle von 2 verschiedenen geraden Zahlen sind durch 2 teilbar, haben also mindestens einen eigentlichen Teiler.	**2.** Für jedwelches $k \geq 2$ gilt: $\{1, 2, 2k\} \subset T_{2k}$.
Beispiel: $62 = 2 \cdot 31$ ist eine gerade Zahl und $T_{62} = \{1, 2, 31, 62\}$, also $\{1, 2, 62\} \subset T_{62}$.	
3. Jede Quadratzahl, die verschieden von 0 und 1 ist, hat mindestens 3 Teiler.	**3.** Wenn $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, dann $\{1, p, p^2\} \subset T_{p^2}$.
Beispiel: $16 = 4^2$ und $T_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, also $\{1, 4, 4^2\} \subset T_{16}$.	
4. Wenn eine natürliche Zahl durch zwei Primzahlen teilbar ist, dann ist sie auch durch deren Produkt teilbar. Wenn eine natürliche Zahl durch das Produkt zweier Primzahlen teilbar ist, dann ist sie durch jede dieser Zahlen teilbar.	**4.** Wenn p und q Primzahlen sind, dann $V_p \cap V_q \subset V_{pq}$ und $V_{pq} \subset V_p \cap V_q$, also $V_p \cap V_q = V_{pq}$.
Beispiel: Wenn $a \vdots 2$ und $a \vdots 3$ ist, dann ist $a \vdots 6$, d. h., $a \vdots (2 \cdot 3)$, also $V_2 \cap V_3 \subset V_6$. Andererseits, wenn $a \vdots 6$, dann ist $a \vdots 3$ und $a \vdots 2$, also $V_6 \subset V_2 \cap V_3$. Daher ist $V_2 \cap V_3 = V_6$.	
5. Wenn p eine Primzahl ist, $p \mid a$, und a eine Quadratzahl ist, dann ist $p^2 \mid a$.	**5.** Wenn p eine Primzahl ist, $p \in T_a$, und a eine Quadratzahl ist, dann $p^2 \in T_a$.
Beispiel: $5 \mid 100$ und 100 ist eine Quadratzahl. $5^2 = 25$ und $25 \mid 100$.	
6. Wenn a eine natürliche Zahl und p eine Primzahl ist, sodass $p \mid a$ und $p^2 \nmid a$, dann ist a keine Quadratzahl.	**6.** Wenn $a \in \mathbb{N}$, p eine Primzahl ist, sodass $p \in T_a$ und $p^2 \nmid a$, dann ist a keine Quadratzahl.
Beispiel: Für $a = 300$ und $p = 3$ haben wir $3 \mid 300$, $3^2 \nmid 300$, also ist 300 keine Quadratzahl, was auch durch die Beziehung $17^2 < 300 < 18^2$ bestätigt wird.	

Übungen und Aufgaben

1. Beweist folgende Aussagen:
a) Die Zahl 68 *ist* durch 7 *teilbar*.
b) Die Zahl 92 *ist* durch 8 *nicht teilbar*.
c) Die Zahl 6 *teilt* die Zahl 132.
d) Die Zahl 12 *ist* durch die Zahl 146 *nicht teilbar*.
e) 76 ist *ein Vielfaches der* Zahl 19.
f) 30 ist *Teiler* der Zahl 210.

2. Schreibt in eure Hefte ab und füllt jedes freie Kästchen mit einem der Symbole „$\vdots$“, „$\not\vdots$“, „$|$“, „$\nmid$“ aus, sodass ihr wahre Aussagen erhaltet:

a) 40 $\square$ 2;		**e)** 9 $\square$ 567;
b) 162 $\square$ 3;		**f)** 10^3 $\square$ 700;
c) 94 $\square$ 5;		**g)** 2 $\square$ $\overline{1ab8}$;
d) 1001 $\square$ 10;		**h)** 5 $\square$ 15^2.

3. Sei die Menge $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Schreibt die Mengen auf, gebildet aus:
a) Elementen der Menge M, die Teiler der Zahl 10 sind.
b) Elementen der Menge M, die Vielfache der Zahl 2 sind.
c) Elementen der Menge M, die keine Vielfachen der Zahl 3 sind.

4. Bestimmt die natürliche Zahl n in jedem Fall:
a) n ist eigentlicher Teiler der Zahl 34;
b) $n + 5$ ist ein Vielfaches von 10 und $n < 20$;
c) $n^2 + 1$ ist uneigentlicher Teiler der Zahl 82.

5. Bestimmt:
a) ob man 59 Orangen zu gleichen Anteilen an 3 Kinder verteilen kann;
b) auf wie viele Kinder man 58 Orangen zu gleichen Anteilen verteilen kann.
Begründet eure Antworten.

6. Es sei die Menge
$M = \{2, 4, 5, 9, 13, 20, 29, 35, 49, 77, 97\}$.
a) Schreibt durch Aufzählen der Elemente die Menge P der Primzahlen auf, die zur Menge M gehören.
b) Schreibt durch Aufzählen der Elemente die Menge C der zusammengesetzten Zahlen, die zur Menge M gehören.

7. **a)** Bestimmt zwei Primzahlen, deren Summe 91 ist.
b) Bestimmt zwei Primzahlen, deren Summe 42 ist. Analysiert alle möglichen Fälle.

8. Wir bezeichnen mit P die Menge der natürlichen Primzahlen und mit V_2 die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Bestimmt die Menge $P \cap V_2$.

9. Zeigt, dass die Zahl $a = 2^3 \cdot 5^4 + 1$ eine zusammengesetzte Zahl ist.

10. Bestimmt alle Primzahlen, die Teiler der Zahl $b = 7 + 7^2 + 7^3$ sind.

Minitest

20 Pkte. **1.** Die Menge der Teiler der Zahl 18 ist:
A. {2, 3, 4, 6, 9, 18}; **B.** {1, 2, 3, 6, 9, 18}; **C.** {1, 3, 6, 9, 18}; **D.** {1, 2, 6, 9, 18}.

20 Pkte. **2.** Die natürliche Zahl 3^3 hat:
A. 2 Teiler; **B.** 3 Teiler; **C.** 4 Teiler; **D.** 5 Teiler.

20 Pkte. **3.** Die Menge der zweistelligen Vielfachen der Zahl 18 ist:
A. {18, 36, 54, 72}; **B.** {18, 32, 54, 76, 90}; **C.** {0, 18, 36, 54, 90}; **D.** {18, 36, 54, 72, 90}.

30 Pkte. **4.** Die Anzahl der Vielfachen der Zahl 12, die kleiner als 100 sind, beträgt:
A. 7; **B.** 8; **C.** 9; **D.** 10.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Zerlegung der natürlichen Zahlen in Produkte von Primfaktoren

Zur Erinnerung

Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ kann als *Potenz einer Primzahl* oder als *Produkt von Potenzen mit verschiedenen Primzahlen als Basen* geschrieben werden. Die oben beschriebene Schreibweise wird *Primfaktorzerlegung (die Zerlegung in Primfaktoren) der Zahl n* genannt.	$2 = 2^1$; $3 = 3^1$; $5 = 5^1$; $7 = 7^1$; $10 = 2^1 \cdot 5^1$; $100 = 2^2 \cdot 5^2$; $1000 = 2^3 \cdot 5^3$; $12 = 2^2 \cdot 3^1$; $16 = 2^4$; $15 = 3^1 \cdot 5^1$; $40 = 2^3 \cdot 5^1$; $75 = 3^1 \cdot 5^2$.
Bemerkung: Die *Primfaktorzerlegung* einer natürlichen Zahl ist *einzig*, unabhängig von der *Reihenfolge der Faktoren*.	$40 = 2^3 \cdot 5^1 = 5^1 \cdot 2^3$; $1000 = 2^3 \cdot 5^3 = 5^3 \cdot 2^3$.

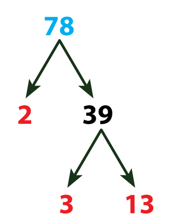
Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

In der Praxis ist es vorteilhaft, *den Algorithmus der Primfaktorzerlegung* (Euklidscher Algorithmus) zu verwenden. Der Zerlegungsalgorithmus besteht darin, *die* unten formulierten *Schritte* für die Zahl 98 zu befolgen.

Algorithmus Abfolge der Etappen		Primfaktoren	Auslegung (Interpretation)	
			durch Multiplikation	durch Division
Schritt 1: Man identifiziert einen Primteiler der gegebenen Zahl.	***Schritt 1′:*** Man berechnet den Quotienten der Division der Zahl durch den gefundenen Teiler.	$2 \mid 98$	$98 = 2 \cdot 49$	$98 : 2 = 49$
Schritt 2: Man identifiziert einen Primteiler des in *Schritt 1′* erhaltenen Quotienten.	***Schritt 2′:*** Man berechnet den Quotienten der Division des Quotienten aus *Schritt 1′* durch den neu ermittelten Teiler.	$7 \mid 49$	$49 = 7 \cdot 7$	$49 : 7 = 7$
Schritt 3: Man identifiziert einen Primteiler des in *Schritt 2′* erhaltenen Quotienten.	***Schritt 3′:*** Man berechnet den Quotienten der Division des Quotienten aus *Schritt 2′* durch den neu ermittelten Teiler.	$7 \mid 7$	$7 = 7 \cdot 1$	$7 : 7 = 1$
Schritt 4, … . Das Verfahren wird fortgesetzt, bis der Quotient 1 erhalten wird. Anschließend wird die Zahl als Produkt von Potenzen von Primfaktoren geschrieben.		$98 = 2 \cdot 7^2$		

Der beschriebene Algorithmus wird in Form eines der unten dargestellten Schemata verwendet.

Beispiel: Zerlege die Zahlen 78 und 210 in Faktoren.

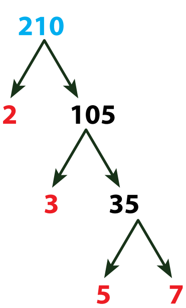


$78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$

78	2
39	3
13	13
1	

$78 = 2 \cdot 39$;
$39 = 3 \cdot 13$;
$13 = 13 \cdot 1$

Schlussfolgerung
$78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$.



210	2
105	3
35	5
7	7
1	

210	$2 \cdot 5$
21	3
7	7
1	

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$210 = 2 \cdot 105$;
$105 = 3 \cdot 35$;
$35 = 5 \cdot 7$;
$7 = 7 \cdot 1$, oder
$210 = 2 \cdot 5 \cdot 21$;
$21 = 3 \cdot 7$;
$7 = 7 \cdot 1$.
$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Bemerkung: Wenn die zu zerlegende Zahl durch eine Potenz von 10 geteilt wird, empfiehlt es sich, die Eigenschaft $10^n = 2^n \cdot 5^n$ zu verwenden, um zwei der Zerlegungsfaktoren zu erhalten.	$700 = 7 \cdot 100 =$ $= 7 \cdot (2^2 \cdot 5^2) =$ $= 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 1. Bestimmt die Summe $a + b$, wenn bekannt ist, dass a und b natürliche Zahlen sind, a eine Primzahl ist und $a \cdot b = 52$.
Lösung: Aus $52 = 2^2 \cdot 13$ und der Tatsache, dass a eine Primzahl ist, folgt, dass die folgenden Situationen möglich sind: a) $a = 2$ und $b = 26$, also $a + b = 28$; b) $a = 13$ und $b = 4$, also $a + b = 17$.
Daraus folgt: $a + b = 28$ oder $a + b = 17$.

Bemerkungen

1. Wenn die natürliche Zahl a eine Quadratzahl ist, dann sind bei ihrer Primfaktorzerlegung alle Exponenten gerade Zahlen.

1. Wenn $a = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^{2-n}$ eine Quadratzahl ist, dann ist $2 - n$ eine gerade natürliche Zahl, d. h., $n \in \{0, 2\}$.

2. Wenn bei der Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl alle Exponenten gerade Zahlen sind, dann ist sie eine Quadratzahl.

2. Die Exponenten aller Primfaktoren der Zerlegung der Zahl $b = 2^{202} \cdot 3^{404} \cdot 5^4 \cdot 17^{20}$ sind gerade Zahlen, also ist b eine Quadratzahl.

3. Wenn es in der Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl a mindestens einen Faktor gibt, dessen Exponent ungerade ist, dann ist a keine Quadratzahl.

3. Die Zahl $c = 3^{2022} \cdot 11^{4044} \cdot 5^4 \cdot 17^3$ ist keine Quadratzahl, weil bei der Zerlegung in Primfaktoren der Faktor 17^3 auftaucht, dessen Exponent ungerade ist.

Übungen und Aufgaben

1. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und ergänzt sie nach dem für die Zahlen 30 und 36 angegebenen Muster:

Zahl	Zerlegung in Primfaktoren	Zahl	Zerlegung in Primfaktoren
30	$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$	36	$36 = 2^2 \cdot 3^2$
42		56	
70		126	
210		168	

2. Schreibt als Produkt von Primzahlen 15, 21, 22, 39, 51, 65.

3. Zerlegt die natürlichen Zahlen in Primfaktoren: 4, 6, 7, 10, 15, 20, 24, 45, 54, 63, 72, 88, 125, 169, 240, 576, 605, 1000, 10^5, 10^n, $n \in \mathbb{N}$.

4. Bestimmt:
a) die kleinste natürliche Zahl, die sich als Produkt zweier verschiedener Primfaktoren schreiben lässt;
b) die kleinste natürliche Zahl, die sich als Produkt dreier verschiedener Primfaktoren schreiben lässt.

5. Schreibt als Produkt von Potenzen von Primfaktoren:
a) 125, 169, 240, 576, 605, 1000, 10^5, 10^n, $n \in \mathbb{N}$;
b) 25^2, $4^2 \cdot 9^4$, 28^3, $(8 \cdot 15)^5$.

6. **a)** Bestimmt die Differenz $b - a$, wobei $a^2 \cdot b = 28$ und b eine Primzahl ist.
b) Bestimmt die Summe $a + b + c$, wobei $a^2 \cdot b \cdot c = 225$ und $a > b \geq c > 1$.

7. **a)** Zerlegt die Zahl $A = 54 \cdot p$ in Primfaktoren, wobei p eine Primzahl ist und $p > 3$.
b) Zerlegt die Zahl $A = 54 \cdot p$ in Primfaktoren für jeden der Werte $p \in \{2, 3\}$.

8. Bestimmt die Primzahlen a, b und c, wobei $a \cdot b + a \cdot c = 25$.

Minitest

Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

15 Pkte. **1.** Die Menge $A = \{2, 23, 2^3 + 3, 3^2 + 2 \cdot 3, 123\}$ enthält n Primzahlen. Die Zahl n ist:
A. 2; **B.** 3; **C.** 1; **D.** 4.

15 Pkte. **2.** Die Zerlegung in Primfaktoren der Zahl 42 ist:
A. $2 \cdot 21$; **B.** $3 \cdot 14$; **C.** $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; **D.** $2 \cdot 3 \cdot 7$.

20 Pkte. **3.** Das Produkt $2 \cdot 3^3 \cdot 7$ ist die Faktorenzerlegung der Zahl:
A. 378; **B.** 576; **C.** 376; **D.** 678.

20 Pkte. **4.** Wenn x und $x + 11$ Primzahlen sind, dann ist x gleich:
A. 2; **B.** 0; **C.** 6; **D.** 11.

20 Pkte. **5.** Die größte Zahl der Form $\overline{aa}$, die vier Teiler hat, ist:
A. 99; **B.** 88; **C.** 77; **D.** 66.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L3 Bestimmen des größten gemeinsamen Teilers. Teilerfremde Zahlen

Zur Erinnerung

Wenn die natürlichen Zahlen a, b und d die Beziehungen $d \mid a$ und $d \mid b$ überprüfen, dann ist die Zahl d *gemeinsamer Teiler* der Zahlen a und b.

Auslegung (Interpretation) in der Mengensprache
Die Menge der gemeinsamen Teiler der natürlichen Zahlen a und b ist der Durchschnitt $T_a \cap T_b$.

Beispiel: Die Zahl 7 ist der gemeinsame Teiler der natürlichen Zahlen 14 und 28, weil $7 \mid 14$ und $7 \mid 21$.
Die Menge der gemeinsamen Teiler der Zahlen 14 und 28 ist $T_{14} \cap T_{21} = \{1, 2, 7, 14\} \cap \{1, 3, 7, 21\} = \{1, 7\}$.

Bemerkung
1. Die Zahl 1 ist *gemeinsamer Teiler* aller natürlichen Zahlen. Wir schreiben $1 \mid n$ oder $1 \in T_n$ für jedwelche natürliche Zahl n.
2. Wenn d *gemeinsamer Teiler* der von null verschiedenen natürlichen Zahlen a und b ist, dann ist $d \leq a$ und $d \leq b$.

Begründung
Für jedwelche natürliche Zahl n wird $n = 1 \cdot n$ geschrieben, also $1 \mid n$.

Aus $d \mid a$ folgt $a = d \cdot x$, wobei $x \geq 1$, also $d \leq a$.
Aus $d \mid a$ folgt $b = d \cdot z$, wobei $y \geq 1$, also $d \leq b$.

Die natürliche Zahl d, die gemeinsamer Teiler der Zahlen a und b ist und die das Vielfache aller anderen gemeinsamen Teiler der Zahlen a und b ist, heißt *größter gemeinsamer Teiler* dieser Zahlen.

Man betrachte die natürlichen Zahlen a und b, *von denen mindestens eine verschieden von null ist.*

Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und b ist die größte von null verschiedene natürliche Zahl d mit der Eigenschaft, dass d gemeinsamer Teiler der Zahlen a und b ist.

Wir schreiben $\text{ggT}(a, b) = d$ oder $(a, b) = d$.

Beispiel:
Die gemeinsamen Teiler der Zahlen 8 und 12 sind 1, 2, 4, und $1 < 2 < 4$. Daraus folgt: *der größte gemeinsame Teiler* der Zahlen 8 und 12 ist 4.
Wir schreiben: $\text{ggT}(8, 12) = 4$ oder $(8, 12) = 4$.

Bemerkung: *Der größte gemeinsame Teiler* mehrerer natürlicher *Zahlen* ist die größte natürliche Zahl, die der gemeinsame Teiler aller dieser Zahlen ist.

Beispiel: *Der größte gemeinsame Teiler* der Zahlen 6, 12 und 51 ist 3, weil die gemeinsamen Teiler der Zahlen 6, 12, 51 die Zahlen 1 und 3 sind und der größte Teiler 3 ist. Wir schreiben $(6, 12, 51) = 3$.

Ist der größte gemeinsame Teiler der natürlichen Zahlen a und b gleich 1, so nennt man die Zahlen a und b *teilerfremde Zahlen (relative Primzahlen).*

Beispiele: $(1, 7) = 1$; $(8, 1) = 1$; $(2, 7) = 1$; $(2, 3) = 1$; $(7, 11) = 1$; $(3, 16) = 1$; $(6, 35) = 1$; $(21, 10) = 1$.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Unmittelbare Ergebnisse, die beim Lösen von Aufgaben nützlich sind	*Wie wir schreiben*	*Beispiele*
Wenn n eine von null verschiedene natürliche Zahl ist, dann ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 0 und n die Zahl n selbst.	ggT $(0, n) = n$ für jedwelches $n \in \mathbb{N}^*$. $(0, n) = n$ für jedwelches $n \in \mathbb{N}^*$.	$(0, 1) = 1$; $(0, 2) = 2$; $(7, 0) = 7$; $(0, 3) = 3$; $(0, 4) = 4$; $(9, 0) = 9$; $(0, 5) = 5$; $(0, 6) = 6$; $(0, 12) = 12$.
Wenn a und b von null verschiedene natürliche Zahlen sind und $a \mid b$, dann ist der größte gemeinsame Teiler die Zahl a.	Aus $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$ und $a \mid b$ folgt, dass $(a, b) = a$.	$(2, 4) = 2$; $(3, 9) = 3$; $(6, 12) = 6$; $(9, 27) = 9$; $(5, 10) = 5$; $(8, 4) = 4$; $(6, 2) = 2$; $(3, 1) = 1$; $(6, 3) = 3$.
Wenn n eine von null verschiedene natürliche Zahl ist, dann ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 1 und n die Zahl 1.	$(1, n) = 1$ für jedwelches $n \in \mathbb{N}^*$.	$(1, 2) = 1$; $(1, 3) = 1$; $(1, 6) = 1$; $(1, 5) = 1$; $(1, 9) = 1$; $(1, 8) = 1$; $(10, 1) = 1$; $(11, 1) = 1$; $(12, 1) = 1$.
Zwei verschiedene Primzahlen sind teilerfremd.	Aus p_1 und p_2 Primzahlen und $p_1 \neq p_2$ folgt, dass $(p_1, p_2) = 1$.	$(2, 3) = 1$; $(2, 5) = 1$; $(2, 7) = 1$; $(3, 7) = 1$; $(5, 11) = 1$; $(7, 13) = 1$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Partnerarbeit

Arbeitet zu zweit. Einer der Partner führt die Aufgabe S1 aus, der andere die Aufgabe S2. Der letzte Teil der Aufgabe wird gemeinsam bearbeitet.

S1: Führt die Schritte P1, P2, P3, P4 durch, dann führt mit dem Teamkollegen den Schritt P4′ durch.

S2: Führt die Schritte P1, P3′ durch, dann führt mit dem Teamkollegen den Schritt P4′ durch.

P1. Zerlegt die Zahlen 84 und 90 in Primfaktoren.	***P1.*** $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$; $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.
P2. Schreibt die Menge der Teiler jeder der Zahlen 84 und 90 auf.	***P2.*** $T_{84} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 7, 4, \mathbf{6}, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$; $T_{90} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 5, \mathbf{6}, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$.
P3. Schreibt die Menge der gemeinsamen Teiler der Zahlen 84 und 90 auf.	***P3.*** $T_{84} \cap T_{90} = \{1, 2, 3, 6\}$.
P4. Identifiziert mit Begründung den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 84 und 90.	***P4.*** $1 < 2 < 3 < 6$, $(84, 90) = \mathbf{6}$.
P3′. Schreibt das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren mit dem kleinsten Exponenten, die in den Zerlegungen von Schritt 1 vorkommen, und berechnet ihr Produkt.	***P3′.*** $84 = \mathbf{2^2} \cdot 3^1 \cdot 7^1$; $90 = \mathbf{2^1} \cdot 3^2 \cdot 5^1$. Wir berechnen das Produkt $\mathbf{2^1} \cdot 3^1 = \mathbf{6}$.
P4′. Vergleicht das in Schritt 3′ erhaltene Ergebnis mit dem in Schritt 4 erhaltenen Ergebnis. Stellt die Beziehung zwischen dem *größten gemeinsamen Teiler* und dem *Produkt der Potenzen mit dem kleinsten Exponenten der* in den Zerlegungen vorkommenden *gemeinsamen Primzahlen* her.	*P2 → P3 → P4* und *P1 → P3′* führen jeweils zu demselben Ergebnis: $(84, 90) = 6$ oder $(84, 90) = (2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1, 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1) = 2^1 \cdot 3^1 = 6$.

Wir merken uns

Das Bestimmen des ggT mehrerer von null verschiedener natürlicher Zahlen *mithilfe* ihrer *Zerlegung in Primfaktoren* wird wie folgt durchgeführt:

1. Man zerlegt die Zahlen in ein Produkt von verschiedenen Primfaktoren.

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$
$$168 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1$$

2. Der ggT der gegebenen Zahlen ist das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren zur jeweils kleinsten Potenz erhoben, zu der die Faktoren in den Zerlegungen der Zahlen vorkommen, wobei jeder Primfaktor nur einmal geschrieben wird.

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$
$$168 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1$$
$$(180, 168) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$$

Übungen und Aufgaben

1. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und vervollständigt sie nach dem Muster, wobei T_x die Menge der Teiler der natürlichen Zahl x, T_y die Menge der Teiler der natürlichen Zahl y und (x, y) der *größte gemeinsame Teiler* von x und y ist.

x	y	T_x	T_y	$T_x \cap T_y$	(x, y)
10	15	$T_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$	$T_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$	$T_{10} \cap T_{15} = \{1, 5\}$	$(10, 15) = 5$
30	54				
100	75				

2. Schreibt die Menge der Teiler der Zahlen x und y und die Menge ihrer gemeinsamen Teiler. Gebt jeweils ihren größten gemeinsamen Teiler an.
a) $x = 16; y = 24;$ **b)** $x = 28; y = 42.$

3. Findet für jedes Zahlenpaar den ggT:
a) 6 und 8; **b)** 12 und 16; **c)** 15 und 20; **d)** 12 und 17; **e)** 24 und 30; **f)** 25 und 35.

4. Ermittelt mithilfe der Primfaktorzerlegung der Zahlen den ggT folgender Zahlenpaare:
a) 36 und 48; **b)** 27 und 63; **c)** 105 und 45; **d)** 66 und 110; **e)** 27 und 135; **f)** $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$ und 512.

5. Ermittelt den ggT folgender Zahlengruppen:
a) 24, 36 und 60; **b)** 28, 35 und 210.

6. Schreibt je ein Paar natürlicher Zahlen, deren größter gemeinsamer Teiler … ist:
a) 6; **b)** 9; **c)** 10; **d)** 100.

7. Gebt an, ob folgende Zahlenpaare teilerfremd sind, und begründet eure Antwort:
a) 4 und 15; **b)** 8 und 9; **c)** 12 und 16; **d)** 21 und 40; **e)** 45 und 56. **f)** 5 und 53.

8. Findet die Zahl $\overline{ab}$, wenn bekannt ist, dass sie gemeinsamer Teiler der Zahlen 54 und 81 ist.

9. Bestimmt die Anzahl der natürlichen Zahlen, die kleiner als 100 und mit 100 teilerfremd sind.

10. Die Division der Zahlen 125 und 189 durch dieselbe natürliche Zahl ergibt die Reste 5 bzw. 9. Findet den Divisor, wenn bekannt ist, dass er der größtmögliche ist.

Minitest

1. Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

20 Pkte. **a)** Ein gemeinsamer Teiler der Zahlen 18 und 27 ist:

A. 2; **B.** 3; **C.** 6; **D.** 12.

20 Pkte. **b)** Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 18 und 27 ist:

A. 3; **B.** 6; **C.** 9; **D.** 18.

20 Pkte. 2. Schreibt die gemeinsamen Teiler der Zahlen auf:

a) 28 und 35; **b)** 75 und 100; **c)** 36 und 49; **d)** 20, 30 und 40.

15 Pkte. 3. Bestimmt die Primzahl $\overline{cd}$, wenn bekannt ist, dass sie gemeinsamer Teiler der Zahlen 460 und 138 ist.

15 Pkte. 4. Bestimmt die natürlichen Zahlen a und b, wenn bekannt ist, dass $a + b = 63$ und $(a, b) = 7$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L4 Bestimmen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen

Zur Erinnerung

Wenn die natürlichen Zahlen m, a und b die Beziehungen $m \vdots a$ und $m \vdots b$ überprüfen, dann ist die Zahl m *gemeinsames Vielfaches* der Zahlen a und b.

Auslegung (Interpretation) in der Mengensprache

Die Menge der gemeinsamen Vielfachen der natürlichen Zahlen a und b ist der Durchschnitt $V_a \cap V_b$.

Beispiel: Die Zahl 24 ist ein gemeinsames Vielfaches der natürlichen Zahlen 8 und 6, weil $24 \vdots 8$ und $24 \vdots 6$.
Die Menge der gemeinsamen Vielfachen der Zahlen 6 und 8 ist
$V_6 \cap V_8 = \{\mathbf{0}, 6, 12, 18, \mathbf{24}, \dots\} \cap \{\mathbf{0}, 8, 16, \mathbf{24}, \dots\} = \{0, 24, 48, \dots\}$.

Bemerkung: Die Zahl 0 ist *gemeinsames Vielfaches* aller natürlichen Zahlen. Wir schreiben $0 \vdots n$ oder $0 \in M_n$ für jedwelche natürliche Zahl n.

Die natürliche Zahl m, die gemeinsames Vielfaches der Zahlen a und b und der Teiler aller anderen gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b ist, heißt *kleinstes gemeinsames Vielfaches.*

Wie beim ggT werden wir in der Praxis Umformulierungen oder Anpassungen der obigen Aussage verwenden.

Das kleinste gemeinsame Vielfache der *von null verschiedenen* natürlichen Zahlen a und b ist die kleinste von null verschiedene natürliche Zahl m mit der Eigenschaft, dass m gemeinsames Vielfaches der Zahlen a und b ist.
Wir schreiben: kgV$[a, b] = m$ oder $[a, b] = m$.

Bemerkung: *Das kleinste gemeinsame Vielfache mehrerer Zahlen* ist die kleinste natürliche Zahl, die das gemeinsame Vielfache aller dieser Zahlen ist.

Beispiel: Die gemeinsamen, von null verschiedenen Vielfachen der Zahlen 4 und 14 sind: **28**, 56, 84, 112, ..., wobei das kleinste **28** ist.
Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 4 und 14 ist also 28.
Wir schreiben: kgV$[4, 14] = 28$ oder $[4, 14] = 28$.

Beispiel: *Das kleinste gemeinsame Vielfache* der Zahlen 15, 9 und 10 ist 90, weil:
$V_{15} = \{0, 15, 30, 45, 60, \mathbf{90}, \dots\}$
$V_9 = \{0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, \mathbf{90}, \dots\}$
$V_{10} = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, \mathbf{90}, \dots\}$
$V_{15} \cap V_9 \cap V_{90} = \{0, \mathbf{90}, 180, \dots\}$
Das kleinste von null verschiedene gemeinsame Vielfache der Zahlen 15, 9, 10 ist 90, also $[15, 9, 10] = 90$.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Unmittelbare Ergebnisse, die beim Lösen von Aufgaben nützlich sind	*Wie wir schreiben*	*Beispiele*
Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 0 und n die Zahl 0 selbst.	kgV $[0, n] = 0$ für jedwelches $n \in \mathbb{N}$. $[0, n] = 0$ für jedwelches $n \in \mathbb{N}$.	$[0, 1] = 0$; $[0, 2] = 0$; $[7, 0] = 0$ $[0, 3] = 0$; $[0, 4] = 0$; $[9, 0] = 0$
Wenn a und b *von null verschiedene* natürliche Zahlen sind und $a \mid b$, dann ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen a und b die Zahl b.	Aus $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$ und $a \mid b$ folgt, dass $[a, b] = b$.	$[2, 4] = 4$; $[3, 9] = 9$; $[6, 12] = 12$ $[9, 27] = 27$; $[5, 10] = 10$; $[8, 4] = 8$ $[6, 2] = 6$; $[3, 1] = 3$; $[6, 3] = 6$
Wenn n eine von null verschiedene natürliche Zahl ist, dann ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 1 und n die Zahl n.	$[1, n] = n$ für jedwelches $n \in \mathbb{N}^*$.	$[1, 2] = 2$; $[1, 3] = 3$; $[1, 6] = 6$ $[1, 5] = 5$; $[1, 9] = 9$; $[1, 8] = 8$ $[10, 1] = 10$; $[11, 1] = 11$
Wenn p_1 und p_2 teilerfremde Zahlen sind, ist ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches das Produkt dieser Zahlen.	Aus p_1 und p_2 natürliche Zahlen und $(p_1, p_2) = 1$ folgt, dass $[p_1, p_2] = p_1 \cdot p_2$.	$[2, 3] = 6$; $[2, 5] = 10$ $[2, 7] = 14$; $[3, 7] = 21$ $[5, 12] = 60$; $[7, 8] = 56$

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Verwendet das digitale Lehrbuch (in rumänischer Sprache), um den Algorithmus der Bestimmung des kgV in Partnerarbeit anzuwenden.

Wir merken uns

Das Bestimmen des kgV mehrerer von null verschiedener natürlicher Zahlen *unter Verwendung* ihrer *Zerlegung in Primfaktoren* wird wie folgt durchgeführt:

1. Man zerlegt die Zahlen in ein Produkt von verschiedenen Primfaktoren.
2. Das kgV der gegebenen Zahlen ist das Produkt der gemeinsamen und nicht-gemeinsamen Primfaktoren zum größten Exponenten erhoben, zu dem der entsprechende Faktor in den Zerlegungen der Zahlen vorkommt, wobei jeder Primfaktor nur einmal geschrieben wird.

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$
$168 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1$

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$
$168 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^1$

$[180, 168] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 2520$

Übungen und Aufgaben

1. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und ergänzt sie. Beachtet, dass V_x die Menge der Vielfachen der natürlichen Zahl x, V_y die Menge der Vielfachen der natürlichen Zahl y und $[x, y]$ das *kleinste gemeinsame Vielfache* von x und y ist. Für die Mengen V_x, V_y und $V_x \cap V_y$ schreibt explizit die ersten vier Elemente nach dem angegebenen Muster.

x	y	V_x	V_y	$V_x \cap V_y$	$[x, y]$
10	15	$V_{10} = \{0, 10, 20, 30, \ldots\}$	$V_{15} = \{0, 15, 30, 45, \ldots\}$	$V_{10} \cap V_{15} = \{0, 30, 60, 90, \ldots\}$	$[10, 15] = 30$
36	54				
100	75				

2. Bestimmt das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen für jedes der folgenden Paare.

a) 2 und 3; **c)** 10 und 15; **e)** 20 und 30;
b) 4 und 6; **d)** 9 und 12; **f)** 25 und 50.

3. Bestimmt eine natürliche Zahl, die kleiner als 500 ist und die, der Reihe nach durch die Zahlen 12, 15 bzw. 18 geteilt, den Rest 0 ergibt.

4. Berechnet mithilfe der Primfaktorzerlegung der Zahlen das kleinste gemeinsame Vielfache für jedes der folgenden Zahlenpaare:

a) 8 und 12; **d)** 16 und 36;
b) 18 und 24; **e)** 24 und 25;
c) 21 und 14; **f)** $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4$ und $2 \cdot 243$.

5. Für den Transport von Kies aus einem Steinbruch zu einer Baustelle werden Lkw mit der gleichen Kapazität eingesetzt. Das Transportunternehmen verfügt über 3 Arten von Lastkraftwagen, je nach der Menge, die sie transportieren können. Die Lastkraftwagen können eine Höchstlast von 8 Tonnen, 9 Tonnen oder 12 Tonnen transportieren. Egal, mit welchem der drei Lkw-Typen der Transport bei voller Beladung durchgeführt werden würde, bliebe für den letzten Transport die gleiche Kiesmenge übrig. Bestimmt die größte Menge an transportiertem Kies, wenn bekannt ist, dass diese Menge in Tonnen als dreistellige natürliche Zahl ausgedrückt wird.

6. Berechnet das kleinste gemeinsame Vielfache folgender Zahlengruppen:

a) 4; 6 und 8; **b)** 20; 25 und 45.

7. Schreibt je ein Paar natürlicher Zahlen, deren kleinstes gemeinsames Vielfaches … ist.

a) 10; **b)** 18; **c)** 47; **d)** 200.

8. Betrachtet die natürlichen Zahlen $x = 28$ und $y = 42$. Indem ihr die üblichen Bezeichnungen für ggT und für kgV verwendet:

a) berechnet $(x, y) + [x, y]$;
b) prüft, ob die Aussage „$x \cdot y = (x, y) \cdot [x, y]$“ für jedwelche natürlichen Zahlen x und y wahr ist.

9. Bestimmt die kleinste natürliche Zahl, die geteilt durch die Zahl 15 den Rest 13, geteilt durch 12 den Rest 10 und geteilt durch 9 den Rest 7 ergibt.

10. Bestimmt alle möglichen Werte der natürlichen Zahl n, für die $(n, 36) = 12$ und $[n, 36] = 252$.

11. Bestimmt die kleinste Anzahl von Sportlern, aus denen man – wenn man alle Sportler in Betracht zieht – Mannschaften zu je 4, zu je 6 oder zu je 9 Sportlern bilden kann.

12. Drei Schüler ordnen die Bücher im Bücherregal des Mathematiklabors. Sie stellen fest, dass, wenn sie je 8, je 12 oder je 15 Bücher auf jedes Regalbrett stellen, immer 7 Bücher uneingeordnet bleiben. Bestimmt die kleinste Anzahl von Büchern, die sich im Mathematiklabor befinden.

13. Sorin malt auf einem Strahl vom Ursprung O ausgehend alle 12 cm einen blauen Punkt. Rareș malt auf demselben Strahl, ebenfalls von O ausgehend, alle 15 cm einen gelben Punkt. Bestimmt die Entfernung des nächsten mit beiden Farben gemalten Punktes zum Ursprung des Strahls.

Minitest

1. Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

20 Pkte. **a)** Ein gemeinsames Vielfaches der Zahlen 12 und 18 ist:

A. 18; **B.** 24; **C.** 72; **D.** 90.

20 Pkte. **b)** Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 12 und 18 ist:

A. 72; **B.** 48; **C.** 1; **D.** 36.

20 Pkte. **2.** Schreibt drei gemeinsame Vielfache der Zahlen:

a) 8 und 6; **b)** 15 und 20; **c)** 7 und 11; **d)** 12, 18 und 36.

15 Pkte. **3.** Bestimmt die natürliche Zahl $\overline{ab}$, wenn bekannt ist, dass sie das gemeinsame Vielfache der Zahlen 12 und 15 ist.

15 Pkte. **4.** Bestimmt zwei natürliche Zahlen c und d, wenn bekannt ist, dass $c \cdot d = 864$ und $[c, d] = 72$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L5 Eigenschaften der Teilbarkeit in $\mathbb{N}$

Zur Erinnerung

Die natürliche Zahl a ist durch die natürliche Zahl b teilbar, wenn es eine natürliche Zahl c gibt, sodass $a = b \cdot c$.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Formulierung der Eigenschaft	*Wie wir schreiben*	*Beispiele*
Jede natürliche Zahl a ist durch sich selbst teilbar.	$a \vdots a$ für jedwelches $a \in \mathbb{N}^*$.	$1 \vdots 1$; $2 \vdots 2$; $3 \vdots 3$; … .
Wenn a und b natürliche Zahlen sind, a durch b teilbar ist und b durch a teilbar ist, dann stimmen die beiden Zahlen überein.	Wenn $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, sodass $a \vdots b$ und $b \vdots a$, dann $a = b$.	Aus $7 \vdots p$ und $p \vdots 7$ folgt, dass $p = 7$ ist. Aus $1 \vdots p$ und $p \in \mathbb{N}$ folgt, dass $p = 1$ ist.
Wenn a, b, c natürliche Zahlen sind, a durch b teilbar ist und b durch c teilbar ist, dann ist a durch c teilbar.	Wenn $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}$, sodass $a \vdots b$ und $b \vdots c$, dann $a \vdots c$.	Aus $p \vdots 6$ und $6 \vdots 3$ folgt, dass $p \vdots 3$ ist. Aus $p \vdots 6$ und $6 \vdots 2$ folgt, dass $p \vdots 2$ ist.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Die kennzeichnenden Eigenschaften der Teilbarkeitsbeziehung, die in der unten stehenden Tabelle beschrieben sind, führen auch zu anderen Ergebnissen, den sogenannten Eigenschaften, die das Verständnis und die Lösung von Aufgaben mit natürlichen Zahlen erleichtern.

1. Wenn die natürliche Zahl d der gemeinsame Teiler der natürlichen Zahlen a und b ist, $b \le a$, dann ist d auch der Teiler der Zahlen $a + b$ und $a - b$.	Wenn $d \mid a$ und $d \mid b$, mit $a, b, d \in \mathbb{N}$, $b \le a$, dann $d \mid (a + b)$ und $d \mid (a - b)$.
a) Wenn die natürliche Zahl d die Summe der natürlichen Zahlen a und b teilt und d ein Teiler eines der Terme (Glieder) der Summe ist, dann ist d auch ein Teiler des anderen Terms (Gliedes) der Summe.	Wenn $d \mid (a + b)$ und $d \mid a$, wobei $a, b, d \in \mathbb{N}$, dann $d \mid b$. Wenn $d \mid (a + b)$ und $d \mid b$, wobei $a, b, d \in \mathbb{N}$, dann $d \mid a$.
b) Wenn die natürliche Zahl d die Differenz der natürlichen Zahlen a und b teilt und d Teiler eines der Terme (Glieder) der Differenz ist, dann ist d auch Teiler des anderen Terms (Gliedes).	Wenn $d \mid (a - b)$ und $d \mid b$, wobei $a, b, d \in \mathbb{N}$, $b \le a$, dann $d \mid a$. Wenn $d \mid (a - b)$ und $d \mid a$, wobei $a, b, d \in \mathbb{N}$, $b \le a$, dann $d \mid b$.
2. a) Ist die natürliche Zahl a Teiler des Produkts $b \cdot c$ und a und b teilerfremde Zahlen, dann ist a Teiler der Zahl c.	Wenn $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a \mid b \cdot c$ und $(a, b) = 1$, dann $a \mid c$.
b) Beweist anhand eines Beispiels die Gültigkeit der Aussage von Unterpunkt a).	$2 \mid 3 \cdot x$, $x \in \mathbb{N}$, $(2, 3) = 1$, folglich $2 \mid x$.

Verwendet das digitale Lehrbuch (in rumänischer Sprache), um die Begründungen für die obigen Aussagen zu erfahren.

Gelöste Aufgaben

1. a) Berechnet den ggT der Zahlen 120 und 180.
b) Vergleicht die Zahlen 3^{120} und 2^{180}, wobei ihr das Ergebnis von a) verwendet.

Lösung: **a)** $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$,
$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
$(120, 180) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
b) $3^{120} = (3^2)^{60} = 9^{60}$ und $2^{180} = (2^3)^{60} = 8^{60}$.
Da $9 > 8$, erhalten wir $9^{60} > 8^{60}$, also $3^{120} < 2^{180}$.

2. a) Überprüft die Gleichheit $m \cdot n = (m, n) \cdot [m, n]$ für $m = 28$ und $n = 21$.
b) Unter Verwendung der Aussage $m \cdot n = (m, n) \cdot [m, n]$ für jedwelche natürlichen Zahlen m, n begründet die Aussage: „Das kleinste gemeinsame Vielfache der teilerfremden natürlichen Zahlen m und n ist das Produkt von m und n."

Lösung:
a) $(28, 21) = (2^2 \cdot 7, 3 \cdot 7) = 7$; $[28, 21] = 84$;
$\mathbf{(28, 21)} \cdot \mathbf{[28, 21]} = 7 \cdot 84 = 588 = \mathbf{28 \cdot 21}$.
b) Wenn m und n teilerfremd sind, dann $(m, n) = 1$.
Da $m \cdot n = (m, n) \cdot [m, n]$, folgt, dass $m \cdot n = 1 \cdot [m, n]$, also $[m, n] = m \cdot n$.

Wenn $m, n \in \mathbb{N}$ und $(m, n) = 1$, dann $[m, n] = m \cdot n$.

3. Bestimmt die natürlichen Zahlen n, $4 \cdot n + 3$ und $5 \cdot n + 7$, wenn bekannt ist, dass sie alle Primzahlen sind.

Lösung: Wenn $5 \cdot n + 7$ eine Primzahl ist, dann ist sie ungerade. Da 7 ungerade ist, folgt daraus, dass $5 \cdot n$ eine gerade Zahl ist, also ist n gerade. Die einzige *gerade Primzahl* ist $n = 2$. Wir erhalten die Primzahlen: 2, 11, 17.

Übungen und Aufgaben

1. Eine natürliche Zahl ist durch 33 teilbar. Bestimme den Rest der Division dieser Zahl durch 3.

2. Ein Bus hat 36 Sitzplätze.
a) Bestimmt die kleinste Anzahl von Fahrten, die mit diesem Bus durchgeführt werden müssen, um 144 Personen zu befördern, sodass jeder Fahrgast einen Sitzplatz belegt.
b) Bestimmt die kleinste Anzahl von Fahrten, die mit diesem Bus durchgeführt werden müssen, um 444 Personen zu befördern, sodass jeder Fahrgast einen Sitzplatz belegt.

3. Beweist, dass:
a) die Zahl $2 \cdot 123 + 2 \cdot 456$ durch 2 teilbar ist;
b) die Zahl $5 \cdot 13 + 15 \cdot 57 + 25 \cdot 99$ ein Vielfaches der Zahl 5 ist;
c) die Zahl 4 die Zahl $4 \cdot 123 + 44 \cdot n$ teilt, für jedwelche natürliche Zahl n.

4. Bestimmt:
a) die Zahlen der Form $\overline{4x3y}$, die durch 3 und durch 5 teilbar sind.
b) die Zahlen der Form $\overline{1x2y3x}$, die durch 4 und durch 9 teilbar sind.

5. **a)** Beweist, dass die Zahl $A = \overline{12x} + \overline{3x4} + \overline{x56}$, in der Zehnerbasis geschrieben, durch 3 teilbar ist für jedwelche Ziffer x.
b) Bestimmt den größten Wert von x, für den A durch 6 teilbar ist.

6. Beweist, dass es keine natürliche Zahl gibt, die geteilt durch 4 den Rest 3 und geteilt durch 6 den Rest 4 ergibt.

7. Für die Schüler einer Klasse werden 127 Hefte und 110 Bleistifte gekauft und gleichmäßig an die Schüler verteilt. Bestimmt die Anzahl der Schüler der Klasse, wenn bekannt ist, dass mehr als 10 Schüler in der Klasse sind und dass nach der Verteilung noch 2 Bleistifte und 1 Heft übrig bleiben.

8. An der Schule, die Ioana besucht, gibt es weniger als 200 Schüler, die in Gruppen von je 18 oder je 24 Schülern aufgeteilt werden können. Berechnet die Anzahl der an dieser Schule eingeschriebenen Schüler.

9. Bestimmt die kleinste natürliche Zahl, die durch 25, 45 bzw. 50 geteilt den Rest 7 ergibt.

10. Die Menge $M = \{3, 4, 8, a, b, c\}$ hat die Eigenschaft, dass unter ihren Elementen sowohl der ggT als auch das kgV von jedwelchen zwei beliebigen Elementen der Menge sind. Bestimmt die unbekannten Elemente der Menge M.

11. Berechnet den ggT und das kgV der Zahlen $a = 4^{25} + 128^7$ und $b = 9^{17} - 27^{11}$.

12. Bestimmt die Primzahlen a, b, c, die die Beziehung $2 \cdot a + 3 \cdot b + 4 \cdot c = 30$ erfüllen.

13. Ein Kosmetikprodukt ist in kleinen Schachteln mit den Dimensionen von 6 cm, 4 cm und 3 cm verpackt, die in einer würfelförmigen Schachtel untergebracht sind. Bestimmt die Kantenlänge des Würfels, wenn das Innere des Würfels vollständig gefüllt ist und die Anzahl der Schachteln höchstens 50 beträgt.

Minitest

Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

30 Pkte. **1.** Die Faktorenzerlegung der Zahl 780 ist:
A. $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; **B.** $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$; **C.** $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$; **D.** $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$.

30 Pkte. **2.** Durch Berechnen der Summe des ggT und des kgV der Zahlen 280 und 392 erhält man:
A. 2024; **B.** 2016; **C.** 2026; **D.** 2014.

30 Pkte. **3.** Sei P die Menge der Primzahlen und $A = \{7, 25, 47, 64, 91\}$. Berechne die Menge $A \setminus P$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

ABSCHLIEßENDE BEWERTUNG

I. *Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.*

5 Pkte. **1.** Welche der folgenden Mengen ist eine endliche Menge?
A. $\{1, 10, 100, \ldots\}$; **B.** $\{2^0, 2^1, 2^2, \ldots\}$; **C.** D_{1000}; **D.** M_{100}.

5 Pkte. **2.** Die Kardinalzahl der Menge der natürlichen Zahlen zwischen 5^2 und 2^5 ist:
A. 7; **B.** 6; **C.** 8; **D.** 32.

5 Pkte. **3.** Die Anzahl der Teilmengen mit zwei Elementen der Menge $\{m, a, t, e\}$ ist:
A. 6; **B.** 12; **C.** 8; **D.** 10.

5 Pkte. **4.** Die Summe der eigentlichen Teiler der Zahl 15 ist:
A. 24; **B.** 16; **C.** 13; **D.** 8.

5 Pkte. **5.** Die größte Zahl der Form $\overline{1ab}$, die durch 9 teilbar ist, ist:
A. 199; **B.** 189; **C.** 999; **D.** 198.

5 Pkte. **6.** Die Anzahl der durch 8 teilbaren Glieder in der Folge 4; 40; 44; 400; 404; 440; 444 ist:
A. 6; **B.** 3; **C.** 4; **D.** 5.

II. *Schreibt die vollständigen Lösungen auf.*

1. Es seien die Mengen $A = \{1, 3, 4, 5\}$ und $B = \{2, 4, 6\}$. C ist die Menge der durch 3 teilbaren Ziffern.
5 Pkte. **a)** Bestimmt die Menge C.
10 Pkte. **b)** Berechnet: $A \cup B$, $B \cap C$, $C \setminus A$.
5 Pkte. **c)** Bestimmt die Zahl a, wenn bekannt ist, dass $(A \cap B) \cup \{a, 5\} = \{3, 4, 5\}$.

2.
10 Pkte. **a)** Gebt mit Begründung die Anzahl der Zahlen der Form $\overline{a0b}$, die durch 2 teilbar sind, an.
10 Pkte. **b)** Schreibt die Menge der Teiler der Zahl 98.

3. Es seien die Zahlen $a = 24$ und $b = 45$.
15 Pkte. **a)** Berechnet den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen a und b.
5 Pkte. **b)** Bestimmt die Primzahlen, die Teiler der Zahl $a + b$ sind.

Bemerkung: Arbeitszeit: 50 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

2. VERHÄLTNISSE. VERHÄLTNISGLEICHUNGEN

Spezifische Kompetenzen: 1.2; 2.2; 3.2; 4.2; 5.2; 6.2

2.1 Verhältnisse. Verhältnisgleichungen. Die Dreisatzregel

L1 Verhältnisse

Sowohl im Alltag als auch bei dem Studium verschiedener wissenschaftlicher Phänomene vergleichen wir die Maße einer Größe mit den Maßen anderer Größen. Die physikalischen Größen, auf die wir uns beziehen, können von *gleicher Art oder unterschiedlicher Art* sein.
In diesem Sinne ist es oft nützlich, den Quotienten (das Verhältnis) der Maße zweier *gleichartiger Größen* oder den Quotienten (das Verhältnis) der Maße zweier *unterschiedlicher*, voneinander abhängiger *Größen* zu kennen.

Wir lösen und beobachten

Aufgabe **1**
Radu baut mehrere quadratische Rahmen mit einer Seitenlänge von 15 cm für den Grafikdesign-Wettbewerb, an dem er teilnimmt. Zu diesem Zweck kauft er 120 cm lange Leisten aus bearbeitetem Holz. Findet heraus, wie viele Rahmen aus einer Leiste hergestellt werden können.

Lösung: Da die Rahmen die Form eines Quadrats mit 15 cm Seitenlänge haben, wird für jeden Rahmen eine 60 cm lange Leiste benötigt (entsprechend dem Umfang des Quadrats), aus dem die vier Seiten herausgeschnitten werden.

Die Aufgabe wird wie folgt umformuliert:

Bestimmt, wievielmal der Umfang des Quadrats mit der Seitenlänge von 15 cm in der 120 cm langen Leiste enthalten ist.

Aus $l = 15$ cm ergibt sich $U = 60$ cm. Es sei x so, dass $U \cdot x = 120$ (cm). Da U in der gleichen Einheit wie die Länge der Leiste ausgedrückt wird, ist $x = 120 : 60$, d. h., $x = 2$. Die Leiste ist also doppelt so lang wie der Umfang des Quadrats, d. h., jede Leiste kann zu genau zwei Rahmen verarbeitet werden.
In der obigen Aufgabe *sind* alle *Größen gleicher Art* (Streckenlängen), *ausgedrückt in der gleichen Maßeinheit.*
Um festzustellen, wievielmal das Maß einer Größe in dem Maß einer anderen Größe enthalten ist, oder welchen Teil eines Maßes einer Größe das Maß einer anderen Größe darstellt, teilen wir die Zahlen, die den Maßen der beiden Größen entsprechen.

Die Division 120 : 60 wird $\frac{120}{60}$ geschrieben. Wir sagen, dass wir das Verhältnis der Länge der Leiste und des Umfangs des Rahmens geschrieben haben.
Das Verhältnis des Rahmenumfangs und der Länge der Leiste ist $\frac{60}{120}$.

Aufgabe **2**
Ein Radfahrer legt eine 70 km lange Strecke in 3,5 Stunden zurück.
Berechnet die Durchschnittsgeschwindigkeit, mit der der Radfahrer unterwegs ist.

Lösung: Die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Fahrzeugs, ausgedrückt in km/h (Kilometer pro Stunde) ist die in Kilometern ausgedrückte *Strecke*, die das Fahrzeug *in einer Stunde* zurücklegt.
Wenn der Radfahrer in 3,5 Stunden 70 km zurücklegt, dann legt er *in einer Stunde* den 3,5-ten Teil der Strecke zurück, d. h. 70 : 3,5.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Radfahrers ergibt sich also aus dem Verhältnis $\frac{70}{3{,}5}$. Die vollständige Information ergibt sich aus dem Ergebnis der Division, dem sogenannten *Verhältniswert* $v = \frac{70}{3{,}5} = 20$ (km/h).

In der obigen Aufgabe sind die *Größen unterschiedlich*: Entfernung (Distanz), gemessen in km, und Zeit, gemessen in Stunden.
Das Verhältnis der Maße dieser physikalischen Größen (Entfernung und Zeit) führt zu einer neuen physikalischen Größe (Geschwindigkeit), deren Maßeinheit im Verhältnis zu den Maßeinheiten der gegebenen Größen bestimmt wird.
Wenn also ein Fahrzeug in der Zeit t h eine Strecke von d km zurücklegt, hat es eine Durchschnittsgeschwindigkeit $v = \frac{d}{t}$ (km/h).
Wenn ein Fahrzeug die Strecke d m in t s zurücklegt, dann ist die Durchschnittsgeschwindigkeit dieses Fahrzeugs $v = \frac{d}{t}$ m/s (Meter pro Sekunde).

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Für beide Aufgaben wird das *Verhältnis von zwei Zahlen* als mathematisches Modell ermittelt.

Das Verhältnis zwischen der Zahl a und der Zahl b, $b \neq 0$, wird mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet und ist der *Quotient* $a : b$, d. h., $\frac{a}{b} = a : b$.	Das Verhältnis zwischen der Zahl 9 und der Zahl 3 ist $\frac{9}{3}$. Das Verhältnis zwischen der Zahl 1 und der Zahl 5 ist $\frac{1}{5}$.
Die Zahlen a und b werden *Glieder des Verhältnisses* genannt.	Die Glieder des Verhältnisses $\frac{9}{3}$ sind 9 und 3, die Glieder des Verhältnisses $\frac{1}{5}$ sind 1 und 5.
Der Wert des Quotienten $a : b$, $b \neq 0$, wird *Verhältniswert* genannt.	Der Wert des Verhältnisses $\frac{9}{3}$ ist 3 und der Wert des Verhältnisses $\frac{1}{5}$ ist 0,2.
Das Verhältnis in der Form $\frac{p}{100}$ heißt *Prozentverhältnis.*	Jedes Verhältnis kann durch Erweitern oder Kürzen als Prozentverhältnis ausgedrückt werden. Zum Beispiel: ${}^{50)}\frac{1}{2} = \frac{50}{100}$.
Ein Prozentverhältnis wird mit p % bezeichnet und lautet „p von 100" oder „p Prozent".	$\frac{50}{100} \overset{Bez}{=} 50\ \%$.

Wir merken uns

Das Verhältnis von zwei physikalischen Größen ist das Verhältnis der Zahlen, die den Maßen dieser Größen entsprechen.
Die beiden physikalischen Größen können *von der gleichen Art* sein, oder es kann sich um *unterschiedliche physikalische Größen* handeln.

Bemerkungen
a) Wenn die beiden physikalischen Größen von gleicher Art sind, dann müssen ihre Maße in der gleichen Maßeinheit ausgedrückt werden, wobei das Verhältnis eine Zahl ist.
b) Das Verhältnis von zwei verschiedenen physikalischen Größen führt zu einer dritten physikalischen Größe, deren Maßeinheit von den Maßeinheiten der ursprünglichen physikalischen Größen abhängt.
c) Der Wert eines Verhältnisses ändert sich nicht, wenn der Bruch, durch den er dargestellt wird, durch eine von null verschiedene Zahl erweitert oder gekürzt wird.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Gelöste Aufgabe

Simona fährt mit dem Fahrrad eine Strecke d mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 12 km/h und erreicht ihr Ziel in 30 Minuten. Viktor legt die gleiche Strecke mit seinem Motorrad in 6 Minuten zurück.

a) Berechnet die von Simona zurückgelegte Strecke.

b) Berechnet die Durchschnittsgeschwindigkeit, mit der Viktor sein Motorrad fährt.

c) Berechnet anhand des Verhältnisses zwischen der Motorrad- und der Fahrradgeschwindigkeit, wievielmal so groß die Motorradgeschwindigkeit ist wie die Fahrradgeschwindigkeit.

Lösung

a) Mit v_F bezeichnen wir Simonas Durchschnittsgeschwindigkeit. Aus $v_F = \frac{d}{t}$ folgt $d = v_F \cdot t$. Da die Geschwindigkeit in km/h angegeben ist, wird die Entfernung in Kilometern und die Zeit in Stunden angegeben.

Aus 30 min = 0,5 h folgt: $d = 12 \cdot 0{,}5 = 6$ (km).

b) v_M sei die Durchschnittsgeschwindigkeit des Motorrads. Aber $d = 6$ km, und $t = 6\text{ min} = \frac{6}{60}\text{ h} = \frac{1}{10}\text{ h} = 0{,}1\text{ h}$.

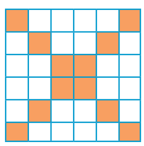
Dann gilt: $v_M = {}^{10)}\frac{6}{0{,}1} = 60$ (km/h).

c) Die beiden Geschwindigkeiten sind gleichartige Größen, in der gleichen Maßeinheit ausgedrückt.

Dann ist $\frac{v_M}{v_F} = \frac{60}{12} = 5$, also bewegt sich Viktor 5-mal so schnell wie Simona.

Übungen und Aufgaben

1. Die nebenstehende Abbildung ist auf einem Quadratraster erstellt. Wählt die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort stimmt.



a) Die Anzahl der farbigen Quadrate ist:

A. 24; **B.** 16; **C.** 12; **D.** 18.

b) Die Anzahl der ungefärbten Quadrate ist:

A. 24; **B.** 18; **C.** 16; **D.** 12.

c) Das Verhältnis zwischen der Anzahl der farbigen Quadrate und der Anzahl der ungefärbten Quadrate ist:

A. $\frac{1}{3}$; **B.** $\frac{1}{2}$; **C.** $\frac{1}{4}$; **D.** $\frac{2}{3}$.

d) Das Verhältnis zwischen der Anzahl der farbigen Quadrate und der Gesamtzahl der Quadrate, aus denen das große Quadrat besteht, beträgt:

A. $\frac{3}{4}$; **B.** $\frac{2}{3}$; **C.** $\frac{1}{2}$; **D.** $\frac{1}{3}$.

2. Schreibt das Verhältnis der Zahlen a und b auf und berechnet dann den Wert dieses Verhältnisses für jedes der Paare:

a) $a = 180$ und $b = 240$;

b) $a = 27{,}5$ und $b = 5{,}5$;

c) $a = \frac{4}{3}$ und $b = \frac{2}{9}$.

3. In der folgenden Tabelle stellen x und y Obstmengen, in Tonnen ausgedrückt, dar. Schreibt die Tabelle in eure Hefte ab und füllt die Lücken so aus, dass das Verhältnis von x und y gleich 4 ist.

x	12			3,6	200
y		5	24		

4. Ein Stadion hat eine Kapazität von 36 000 Plätzen. Ein Fußballspiel wird von 24 000 Zuschauern besucht.

a) Ermittelt das Verhältnis zwischen der Anzahl der belegten Sitzplätze und der Anzahl der verfügbaren Sitzplätze.

b) Ermittelt das Verhältnis zwischen der Anzahl der unbesetzten Plätze und der Anzahl der besetzten Plätze.

5. Zeichnet die Strecken AB und CD mit der Länge von 12,5 cm bzw. 250 mm. Entscheidet, welche Strecke größer ist und wievielmal so groß sie ist wie die andere.

6. Findet den Wert des Verhältnisses zwischen:
a) einer Stunde und einer Minute;
b) einem Gramm und einem Kilogramm;
c) einem Hektar und einem Quadratmeter.

7. Betrachtet die Verhältnisse $\frac{a}{b}=3$, $\frac{b}{c}=12$.
Berechnet die Verhältniswerte $\frac{a}{c}$, $\frac{2\cdot a}{3\cdot b}$, $\frac{5\cdot b}{6\cdot c}$.

Minitest

1.
10 Pkte. **a)** Schreibt ein Zahlenpaar, das das Verhältnis 10 hat.
20 Pkte. **b)** Schreibt zwei Zahlenpaare, die das Verhältnis 1,25 haben.

2. Der Wert des Verhältnisses $\frac{m}{n}$ ist 6. Füllt die Lücken aus, sodass wahre Aussagen entstehen.
15 Pkte. **a)** Die Zahl *m* ist ….-mal so …. wie die Zahl *n*.
15 Pkte. **b)** Wenn *m* und *n* mit 3 multipliziert werden, dann ist der Wert des neuen Verhältnisses … .

3. Vlads Schulranzen wiegt leer 300 g. Darin befinden sich: das Federmäppchen, das 400 g wiegt, der Malkasten, der 300 g wiegt, die Hefte, die 1,6 kg wiegen, und die Schulbücher, die 3,4 kg wiegen.
10 Pkte. **a)** Berechnet, wie viel der volle Schulranzen wiegt.
10 Pkte. **b)** Berechnet das Verhältnis zwischen der Masse des vollen Schulranzens und der Masse des Federmäppchens.
10 Pkte. **c)** Berechnet das Verhältnis zwischen der Masse des Malkastens und der Masse des vollen Schulranzens.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Verhältnisgleichungen (Proportionen)

Wir lösen und beobachten

Aufgabe 1. Ein Händler verkauft Erdbeeren der gleichen Qualität, verpackt in Kisten zu 3 kg oder zu 5 kg. Der Preis der Erdbeeren ist auf jeder Kiste angegeben, wie in der folgenden Tabelle dargestellt. Emmas Großmutter und Sonjas Großmutter haben jeweils zwei Kisten mit Erdbeeren gekauft.

Menge der Erdbeeren in einer Kiste	3 kg	5 kg
Kosten für eine Kiste	27 Lei	45 Lei

a) Berechnet den Betrag, den Emmas Großmutter für 8 kg Erdbeeren und Sonjas Großmutter für 10 kg Erdbeeren bezahlt haben.
b) Berechnet den Durchschnittspreis, zu dem die beiden Großmütter jeweils Erdbeeren gekauft haben.
c) Bestimmt den Preis der Erdbeeren in jeder Kiste.

Lösung: **a)** Die Menge von 8 kg kann nur durch den Kauf einer 3-kg-Kiste und einer 5-kg-Kiste erreicht werden. Der von Emmas Großmutter gezahlte Betrag ist 27 + 45 = 72 (Lei). Entsprechend einer ähnlichen Überlegung kauft Sonjas Großmutter zwei Kisten zu je 5 kg und bezahlt 90 Lei.
b) Der Preis der Erdbeeren, die Emmas Großmutter kauft, ist $P_1=\frac{72}{8}=9$ (Lei/kg), und der Preis der Erdbeeren, die Sonjas Großmutter kauft, ist $P_2=\frac{90}{10}=9$ (Lei/kg).
c) Der Preis für Erdbeeren in 3-kg-Kisten ist $P_3=\frac{27}{3}=9$ (Lei/kg), und der Preis für Erdbeeren in 5-kg-Kisten ist $P_4=\frac{45}{5}=9$ (lei/kg).

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Aus der obigen Aufgabe geht hervor, dass der Preis von Erdbeeren durch mehrere *Verhältnisse* ausgedrückt werden kann, die *denselben* Wert haben. Diese werden *gleiche Verhältnisse* genannt.

Die Gleichheit zweier Verhältnisse heißt *Verhältnisgleichung*.

$\frac{72}{8}=\frac{90}{10}$; $\frac{90}{10}=\frac{27}{3}$; $\frac{27}{3}=\frac{45}{5}$; $\frac{45}{5}=\frac{72}{8}$; $\frac{27}{3}=\frac{72}{8}$ sind *Verhältnisgleichungen.*

Wenn die Verhältnisse $\frac{a}{b}$, $a \neq 0, b \neq 0$, und $\frac{c}{d}$, $c \neq 0, d \neq 0$, *den gleichen Wert* haben, dann schreiben wir *die Verhältnisgleichung* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Die von null verschiedenen Zahlen *a, b, c, d* sind die *Glieder* der Verhältnisgleichung.
a und *d* heißen *Außenglieder*, *b* und *c* heißen *Innenglieder*.

Außenglied — Innenglied

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Innenglied — Außenglied

Grundeigenschaft der Verhältnisgleichung	*In mathematischer Sprache*	*Beispiele*
In jeder Verhältnisgleichung ist das *Produkt der Innenglieder gleich dem Produkt der Außenglieder.*	Wenn $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ und $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, dann $a \cdot d = b \cdot c$.	$\frac{2}{12}=\frac{3}{18}$ und $2 \cdot 18 = 12 \cdot 3$.

In der Praxis ist es sinnvoll, eine Verhältnisgleichung aus der Beziehung zwischen ihren Gliedern *zu bilden.*

Wenn $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ und $a \cdot d = b \cdot c$, dann sind *a, b, c, d* die Glieder einer Verhältnisgleichung. Zum Beispiel wird die Verhältnisgleichung $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ gebildet.	Aus $2 \cdot 18 = 12 \cdot 3$ bildet sich die Verhältnisgleichung $\frac{2}{12}=\frac{3}{18}$.

Die beiden oben genannten Aussagen lassen sich in einer einzigen Aussage wie folgt formulieren:

Für jedwelche von null verschiedene Zahlen *a, b, c, d* gilt $a \cdot d = b \cdot c$, wenn und nur wenn $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.	Wenn $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, dann $a \cdot d = b \cdot c \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.	$2 \cdot 18 = 12 \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{2}{12}=\frac{3}{18}$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Je nach dem praktischen Kontext, in dem wir eine Verhältnisgleichung identifizieren, können wir ein Glied der Verhältnisgleichung anhand der anderen drei Glieder bestimmen. Für $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ und $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ erhalten wir:

Formel	*Berechnungsmethode*		*Beispiele*
ein Außenglied $=\frac{\text{Produkt der Innenglieder}}{\text{das andere Außenglied}}$	$a = \frac{b \cdot c}{d}$	$d = \frac{b \cdot c}{a}$	Aus $\frac{x}{9}=\frac{2{,}5}{3}$ folgt $x=\frac{9 \cdot 2{,}5}{3}=7{,}5$; Aus $\frac{4}{9}=\frac{5}{y}$ folgt $y=\frac{9 \cdot 5}{4}=11{,}25$.
ein Innenglied $=\frac{\text{Produkt der Außenglieder}}{\text{das andere Innenglied}}$	$b = \frac{a \cdot d}{c}$	$c = \frac{a \cdot d}{b}$	Aus $\frac{12}{m}=\frac{3}{7}$ folgt $m=\frac{12 \cdot 7}{3}=28$; Aus $\frac{15}{11}=\frac{p}{33}$ folgt $p=\frac{15 \cdot 33}{11}=45$.

Die Eigenschaften der Operationen mit von null verschiedenen rationalen Zahlen erlauben es, ausgehend von den Zahlen *a, b, c, d* und der Verhältnisgleichung $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, andere Verhältnisgleichungen zu bilden, indem man entweder *dieselben Glieder* mit anderen Rollen *verwendet*, oder die *Glieder* nach bestimmten Regeln *ändert*.

a) *Abgeleitete Verhältnisgleichungen des Verhältnisses* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *mit denselben Gliedern*

Das Verfahren	*In mathematischer Sprache*	*Beispiele*
Vertauschen der Innenglieder	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	$\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{2}{3}=\frac{4}{6}$
Vertauschen der Außenglieder	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$	$\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{6}{4}=\frac{3}{2}$
Umkehren der Verhältnisse	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	$\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{4}{2}=\frac{6}{3}$

b) Von der Verhältnisgleichung $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *abgeleitete Verhälnisgleichungen mit veränderten Gliedern*

Die erhaltene Verhältnisgleichung		*Beispiele*
$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$	$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}, a>b, c>d.$	$\frac{4}{2}=\frac{6}{3} \Leftrightarrow \frac{4+2}{2}=\frac{6+3}{3}$ und $\frac{4}{2}=\frac{6}{3} \Leftrightarrow \frac{4-2}{2}=\frac{6-3}{3}$
$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	$\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}, a>b, c>d.$	$\frac{4}{2}=\frac{6}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{4+2}=\frac{6}{6+3}$ und $\frac{4}{2}=\frac{6}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{4-2}=\frac{6}{6-3}$
$\frac{a}{b}=\frac{m\cdot c}{m\cdot d}, m\neq 0$	$\frac{m\cdot a}{m\cdot b}=\frac{c}{d}, m\neq 0$	$\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{2}{4}=\frac{0{,}5\cdot 3}{0{,}5\cdot 6}$ und $\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{5\cdot 2}{5\cdot 4}=\frac{3}{6}$
$\frac{a}{m\cdot b}=\frac{c}{m\cdot d}, m\neq 0$	$\frac{m\cdot a}{b}=\frac{m\cdot c}{d}, m\neq 0$	$\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{2}{5\cdot 4}=\frac{3}{5\cdot 6}$ und $\frac{2}{4}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{5\cdot 2}{4}=\frac{5\cdot 3}{6}$
$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$	$\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}, a>c, b>d.$	$\frac{6}{3}=\frac{4}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{3}=\frac{6+4}{3+2}$ und $\frac{6}{3}=\frac{4}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{3}=\frac{6-4}{3-2}.$

Übungen und Aufgaben

1. Identifiziert die Paare von Verhältnissen, die Verhältnisgleichungen bilden:

a) $\frac{2}{3}$ und $\frac{6}{9}$; **c)** $\frac{1}{0{,}5}$ und $\frac{8}{4}$; **e)** $\frac{2{,}5}{3{,}5}$ und $\frac{2}{3}$;

b) $\frac{5}{4}$ und $\frac{25}{20}$; **d)** $\frac{9}{2}$ und $\frac{14}{3}$; **f)** $\frac{1{,}5}{3}$ und $\frac{3}{6}$.

2. Füllt die Lücken mit Zahlen aus, um Verhältnisgleichungen zu erhalten:

a) $\frac{5}{2}=\frac{\cdots}{8}$; **b)** $\frac{\cdots}{0{,}5}=\frac{6}{1{,}5}$; **c)** $\frac{6}{\cdots}=\frac{\cdots}{4}$.

3. Schreibt Verhältnisgleichungen mit folgenden Zahlen als Gliedern:

a) 4; 6; 8; 12; **b)** 9; 3; 6; 4,5.

4. Schreibt die Verhältnisgleichungen auf, die mit zwei der Verhältnisse gebildet werden können: $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{33}{55}$, $\frac{51}{85}$.

5. Schreibt ab und ergänzt die Lücken mit Zahlen, sodass ihr aus dem Verhältnis $\frac{5}{9}=\frac{2{,}5}{4{,}5}$ abgeleitete Verhältnisse mit denselben Gliedern erhaltet:

a) $\frac{\cdots}{9}=\frac{2{,}5}{\ldots}$; **b)** $\frac{5}{\cdots}=\frac{\cdots}{4{,}5}$; **c)** $\frac{9}{\ldots}=\frac{4{,}5}{\ldots}$.

6. Schreibt ab und ergänzt die Lücken mit Zahlen, sodass ihr abgeleitete Verhältnisse mit veränderten Gliedern erhaltet, ausgehend von dem Verhältnis $\frac{5}{9}=\frac{2{,}5}{4{,}5}$.

a) $\frac{5}{...}=\frac{2{,}5}{...}$; b) $\frac{...}{9}=\frac{...}{4{,}5}$; c) $\frac{5}{9}=\frac{...}{...}$; d) $\frac{30}{9}=\frac{...}{4{,}5}$; e) $\frac{5}{9}=\frac{10}{...}$.

7. Bestimmt die natürliche Zahl $\overline{ab}$, wenn bekannt ist, dass 4; 12; 13 und $\overline{ab}$ die Glieder einer Verhältnisgleichung sind.

8. Bestimmt das unbekannte Glied bzw. die unbekannten Glieder aus den Verhältnisgleichungen:

a) $\frac{3}{7}=\frac{x}{35}$; b) $\frac{y}{2}=\frac{9}{4{,}5}$; c) $\frac{0{,}3}{y}=\frac{0{,}9}{21}$; d) $\frac{x}{4}=\frac{25}{x}$.

9. Das Verhältnis zwischen dem Preis eines Füllers und dem Preis eines Kugelschreibers ist $\frac{22}{3}$. Berechnet den Preis des Füllers, wenn der Preis des Kugelschreibers 7,50 Lei beträgt.

10. Eine Verhältnisgleichung hat die Außenglieder $2 \cdot n + 7$ und 10 und die Innenglieder 6 und 25. Berechnet die Zahl n.

11. Schreibt ab und füllt die Lücken so aus, dass ihr wahre Aussagen erhaltet:

a) Wenn $\frac{a}{3}=\frac{5}{b}$, dann $a \cdot b =$ ..., und $30-\frac{150}{a \cdot b}=$ ...;

b) Wenn $\frac{a}{4}=\frac{8}{b}$ und $\frac{2}{c}=\frac{d}{16}$, dann $a \cdot b - c \cdot d =$ ... .

12. Das Verhältnis zweier Zahlen ist $\frac{2}{9}$.

a) Berechnet die Summe dieser Zahlen, wenn die kleinere Zahl 10 ist;

b) Berechnet das Produkt dieser Zahlen, wenn die größere Zahl 4,5 ist.

13. Wenn $\frac{x}{y}=\frac{3}{10}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, berechnet:

a) $\frac{x+y}{y}$; b) $\frac{x}{y-x}$; c) $\frac{x}{10 \cdot y}$; d) $\frac{10 \cdot x + 3 \cdot y}{9 \cdot y}$.

14. Das Verhältnis zweier Zahlen ist 0,1.

a) Bestimmt die Zahlen, wenn deren Summe 44 beträgt.

b) Bestimmt die Zahlen, wenn deren Differenz 27 beträgt.

Minitest

Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

20 Pkte. **1.** Von den Verhältnispaaren **a)** $\frac{1}{4}$ und $\frac{6}{20}$; **b)** $\frac{7}{3}$ und $\frac{21}{9}$; **c)** $\frac{5}{2}$ und $\frac{15}{8}$; **d)** $\frac{9}{10}$ und $\frac{27}{40}$ bilden eine Verhältnisgleichung:

A. Paar a); **B.** Paar b); **C.** Paar c); **D.** Paar d).

20 Pkte. **2.** Wenn $\frac{a}{6}=\frac{0{,}5}{b}$, dann ist das Produkt $a \cdot b$ gleich:

A. 1; **B.** 2; **C.** 3; **D.** 4.

20 Pkte. **3.** Die Zahl x in der Verhältnisgleichung $\frac{12}{5}=\frac{36}{x}$ ist:

A. 15; **B.** 18; **C.** 6; **D.** 9.

30 Pkte. **4.** Wenn $\frac{a}{12}=\frac{3}{a}$, beträgt die natürliche Zahl a:

A. 15; **B.** 6; **C.** 36; **D.** 4.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L3 Verhältnisreihe

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Drei oder mehr Verhältnisse $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, mit $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, b_3 \neq 0, \ldots, b_n \neq 0$, die den gleichen Wert haben, bilden eine *Verhältnisreihe*.

Wir schreiben $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Beispiele

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{100}{200}$;

$\frac{0,5}{2} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{6}{24} = \frac{3}{12}$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Aufgabe 1

Sonja liest ein 98-seitiges Buch, je 14 Seiten pro Tag. Delia liest ein 147-seitiges Buch, je 21 Seiten pro Tag. Irina liest ein 84-seitiges Buch, je 12 Seiten pro Tag. Beweist, dass die drei Freundinnen die Lektüre ihrer Bücher in der gleichen Anzahl von Tagen beenden.

Viktor, Irinas Vater, hat sich vorgenommen, alle drei Bücher zu lesen und jeden Tag so viele Seiten zu lesen, wie die drei Mädchen zusammen an einem Tag lesen. Zeigt, dass Viktor das Lesen in der gleichen Anzahl von Tagen beenden wird wie seine Tochter.

Lösung: Die Anzahl der Tage, an denen eine Person ein Buch zu Ende liest, ist das Verhältnis zwischen der Gesamtzahl der gelesenen Seiten und der Anzahl der an einem Tag gelesenen Seiten.

	Sonja	Delia	Irina	Viktor
Anzahl der Seiten	98	147	84	$98 + 147 + 84 = 329$
Anzahl der Seiten/Tag	14	21	12	$14 + 21 + 12 = 47$
Anzahl der Tage bis zum Beenden der Lektüre	$\frac{98}{14} = 7$	$\frac{147}{21} = 7$	$\frac{84}{12} = 7$	$\frac{329}{47} = 7$

Die obige Tabelle enthält folgende Verhältnisreihe: $\frac{98}{14} = \frac{147}{21} = \frac{84}{12} = \frac{329}{47}$, deren Wert jeweils 7 beträgt.

Da $329 = 98 + 147 + 84$ und $47 = 14 + 21 + 12$ ist, kann die Verhältnisreihe wie folgt geschrieben werden: $\frac{98}{14} = \frac{147}{21} = \frac{84}{12} = \frac{98+147+84}{14+21+12}$.

Aufgabe 1 beweist anhand eines Beispiels folgende Eigenschaft der Verhältnisreihe.

Wenn $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, \ldots b_n \neq 0$, und $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \neq 0$, dann $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$.

Aufgabe 2. Bestimmt die Zahlen *x*, *y* und *z* mit der Eigenschaft $\frac{x}{2} = \frac{y}{12} = \frac{z}{6}$, wobei $x + y + z = 220$ ist.

Unter Verwendung der Eigenschaft $\frac{x}{2} = \frac{y}{12} = \frac{z}{6} = \frac{x+y+z}{2+12+6}$ folgt, dass $\frac{x}{2} = \frac{y}{12} = \frac{z}{6} = \frac{220}{20} = 11$.

Dann gilt: $\frac{x}{2} = 11$, $\frac{y}{12} = 11$, $\frac{z}{6} = 11$, also $x = 22$, $y = 132$, $z = 66$.

Aufgabe 3. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 20. Bestimmt die Zahlen, wenn bekannt ist, dass sie zu 4 bzw. 9 direkt proportional sind.

Lösung

Seien *a*, *b* die beiden Zahlen. Aus der Aufgabenstellung folgt $\frac{a}{4} = \frac{b}{9} = k$. Aus $\frac{a}{4} = k$ und $\frac{b}{9} = k$ folgt $a = 4 \cdot k$ bzw. $b = 9 \cdot k$. Wir haben $b > a$, also $b - a = 20$, also $9 \cdot k - 4 \cdot k = 20 \Rightarrow 5 \cdot k = 20$, woraus folgt, dass $k = 4$. Die Zahlen sind $a = 4 \cdot 4$ und $b = 9 \cdot 4$, also $a = 16$ und $b = 36$.

Übungen und Aufgaben

1. Von den Verhältnissen $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{6}{10}, \frac{10}{15}, \frac{9}{15}, \frac{2}{12}, \frac{21}{35}$ schreibt auf:

a) eine aus drei Verhältnissen gebildete Verhältnisreihe;

b) eine Verhältnisreihe von möglichst vielen Verhältnissen.

2. **a)** Schreibt eine Verhältnisreihe von vier Verhältnissen, die dem Verhältnis $\frac{3}{2}$ gleich sind.

b) Schreibt eine Verhältnisreihe von fünf Verhältnissen, die dem Verhältnis $\frac{1}{3}$ gleich sind.

3. Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

a) Es sei die Verhältnisreihe $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{5}$. Von den Zahlen *a, b, c* und *d* ist die größte:

A. *a*; **B.** *b*; **C.** *c*; **D.** *d*.

b) Wenn $\frac{a}{5}=\frac{b}{6}=\frac{1}{2}$, dann ist die Summe der Zahlen *a* und *b*:

A. 1; **B.** 1,5; **C.** 5; **D.** 5,5.

c) Wenn $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}=\frac{1}{3}$, ist $\frac{a+b+c}{m+n+p}$ gleich:

A. $\frac{1}{3}$; **B.** $\frac{2}{3}$; **C.** $\frac{3}{3}$; **D.** $3\frac{1}{3}$.

4. Berechnet die unbekannten Glieder in der Verhältnisreihe: $\frac{1}{5}=\frac{x}{10}=\frac{3}{y}=\frac{4}{z}$.

5. Die Summe der Zahlen *a, b* und *c* ist 72. Berechnet *a, b* und *c*, wobei $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{10}$.

6. Die Differenz der Zahlen *a* und *b* ist 12. Berechnet *a* und *b*, wobei $\frac{7}{a}=\frac{3}{b}$.

7. Ionel kauft einen Laptop, eine Audioanlange und eine Projektionsleinwand für 5600 Lei.
Findet den Preis jedes Artikels heraus, wenn bekannt ist, dass ein Achtel des Preises des Laptops ein Viertel des Preises der Audioanlage und die Hälfte des Preises der Projektionsleinwand ist. Löst die Aufgabe, indem ihr Verhältnisreihen verwendet.

8. Sei $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, sodass $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$.

a) Beweist, dass $a^2+b^2=c^2$.

b) Bestimmt die Tripel der natürlichen Zahlen (a, b, c) die zusätzlich die Bedingung $a+b+c<77$ erfüllen.

Minitest

1. Übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken so aus, dass ihr wahre Aussagen erhaltet.

20 Pkte. **a)** Ein zu den Verhältnissen $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}$ gleiches Verhältnis ist … .

20 Pkte. **b)** Wenn $\frac{4}{3}=\frac{a}{6}=\frac{8}{b}$, dann $a+b=\ldots$.

20 Pkte. **c)** Wenn $\frac{1}{5}=\frac{c}{10}=\frac{4}{d-3}$, dann $d-c=\ldots$.

30 Pkte. **2.** Bestimmt die Zahlen *x, y* und *z*, die die Gleichungen $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6}$ und $x+y=49$ überprüfen.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L4 Direkt proportionale Größen. Umgekehrt proportionale Größen

Wir lösen und beobachten

Aufgabe

240 kg Äpfel werden in Kisten gelagert. Die im Lager verfügbaren Kisten fassen jeweils 4 kg, 8 kg, 12 kg bzw. 24 kg.

a) Bestimmt, ob die gesamte Menge gelagert werden kann, wenn 5 Kisten von jeder Sorte verwendet werden.

b) Vergleicht die Menge der Äpfel, die in den vier Kistentypen gelagert werden, und beobachtet, was mit der gelagerten Menge geschieht, wenn die Menge der Äpfel in jeder Kiste sich um einen bestimmten Faktor vervielfacht oder vermindert.

c) Bestimmt die Anzahl der für die Lagerung verwendeten Kisten, wenn Kisten der gleichen Art verwendet werden.

d) Beobachtet, was mit der Anzahl der verwendeten Kisten passiert, wenn die Menge der Äpfel in jeder Kiste sich um einen bestimmten Faktor vervielfacht oder vermindert.

Lösung

a) Die Menge der in 5 Kisten einer bestimmten Sorte gelagerten Äpfel ist das Produkt der in einer Kiste dieser Sorte gelagerten Menge und der Anzahl der verwendeten Kisten, d. h. der Zahl 5.

Menge der Äpfel in einer Kiste	4 kg	8 kg	12 kg	24 kg
In 5 Kisten gelagerte Menge	$4 \cdot 5 = 20$ (kg)	$8 \cdot 5 = 40$ (kg)	$12 \cdot 5 = 60$ (kg)	$24 \cdot 5 = 120$ (kg)

Die Menge, die in je 5 Kisten der gleichen Art gelagert werden kann, beträgt $20 + 40 + 60 + 120 = 240$ (kg), d. h. die gesamte Menge.

b) Die Daten in der Tabelle zeigen: Wenn sich die Menge der Äpfel in einer Kiste um einen bestimmten Faktor vervielfacht, steigt auch die Menge der gelagerten Äpfel bei gleichbleibender Anzahl der verwendeten Kisten in demselben Verhältnis.

8 kg = 4 kg · 2 und 40 kg = 20 kg · 2;
12 kg = 4 kg · 3 und 60 kg = 20 kg · 3;
24 kg = 4 kg · 6 und 120 kg = 20 kg · 6.

Die obigen Beziehungen können auch durch *die Verhältnisreihe* umgeschrieben werden: $\frac{4}{20} = \frac{8}{40} = \frac{12}{60} = \frac{24}{120}$.

Wir sagen, dass die beiden Mengen (die Obstmenge in einer Kiste und die Obstmenge, die in einer konstanten Anzahl von Kisten gelagert wird) *direkt proportional sind*.

c) Die Anzahl der verwendeten Kisten ist das Verhältnis zwischen der Gesamtmenge der Äpfel und der Menge der Äpfel in einer Kiste und ergibt sich aus folgender Tabelle:

Menge der Äpfel in einer Kiste	4 kg	8 kg	12 kg	24 kg
Anzahl der verwendeten Kisten	$\frac{240}{4} = 60$	$\frac{240}{8} = 30$	$\frac{240}{12} = 20$	$\frac{240}{24} = 10$

d) Die Daten in der Tabelle zeigen: Wenn die Menge der Äpfel in einer Kiste *sich vergrößert, verkleinert sich* die Anzahl der Kisten, die für die gleiche Menge Obst verwendet werden, um denselben Faktor. D. h.:

Wir bemerken, dass die Menge der Äpfel in 8-kg-Kisten *doppelt so groß* ist wie in 4-kg-Kisten, und dass die *Anzahl der Kisten*, *die* für die gleiche Menge Äpfel *benötigt wird, halb so groß ist.* Mit ähnlichen Überlegungen für die anderen Kistenpaare gelangen wir zu folgender Schlussfolgerung: Wenn wir die Menge der Äpfel in einer Kiste vergrößern (vervielfachen), wird sich die Anzahl der benötigten Kisten um den gleichen Faktor verkleinern.

Begründet wird diese Tatsache auch durch die aus der Tabelle in c) entnommenen Beziehungen: 8 kg = 4 kg· 2 und 30 Kisten = 60 Kisten : 2; 12 kg = 4 kg · 3 und 20 Kisten = 60 Kisten : 3; 24 kg = 4 kg · 6 und 10 Kisten = 60 Kisten : 6.

Diese Beziehungen können auch *als Folge gleicher Produkte* umgeschrieben werden: $4 \cdot 60 = 8 \cdot 30 = 12 \cdot 20 = 24 \cdot 10$.

Wir sagen, dass die beiden Größen (die Menge der Früchte in einer Kiste und die Anzahl der verwendeten Kisten bei konstanter Lagermenge *umgekehrt proportional* sind.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Zwei Größen, die gleichzeitig mit demselben Faktor multipliziert oder durch denselben Faktor geteilt werden (also im gleichen Verhältnis steigen oder sinken), heißen *direkt proportionale Größen*.	*Beispiel:* Die *Geschwindigkeit*, mit der ein Fahrzeug fährt, und die in einer bestimmten Zeit zurückgelegte *Strecke*.
Die endlichen, geordneten Zahlenmengen $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ und $\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$ sind direkt proportional, wenn die Verhältnisreihe $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ gebildet werden kann.	Die Mengen $\{5; 7{,}5; 12\}$ und $\{10; 15; 24\}$ sind *direkt proportional*, weil $\frac{5}{10} = \frac{7{,}5}{15} = \frac{12}{24}$.
Der gemeinsame, von null verschiedene Wert der Verhältnisse wird *Proportionalitätsverhältnis* oder *Proportionalitätskoeffizient (Proportionalitätsfaktor)* genannt und wird mit k bezeichnet.	*Das Proportionalitätsverhältnis* der oben genannten geordneten Mengen ist $k = 0{,}5$.
Zwei Größen heißen *umgekehrt proportional*, wenn eine Größe mit einem bestimmten Faktor multipliziert wird (sich vergrößert), und die andere Größe durch denselben Faktor geteilt wird (sich verkleinert).	*Beispiel:* Die *Geschwindigkeit*, mit der ein Fahrzeug fährt, und die *Zeit*, die es braucht, um eine bestimmte Strecke zurückzulegen.
Die endlichen, geordneten Zahlenmengen $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ und $\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$ sind *umgekehrt proportional*, wenn die Folge gleicher Produkte $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \ldots = a_n \cdot b_n$ gebildet werden kann.	Die Mengen $\{3, 6, 15\}$ und $\{10, 5, 2\}$ sind *umgekehrt proportional*, weil $3 \cdot 10 = 6 \cdot 5 = 15 \cdot 2$.

Beim Lösen vieler arithmetischer Aufgaben ist die Information, dass zwei Größen direkt proportional oder umgekehrt proportional sind, von wesentlicher Bedeutung.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Gelöste Aufgabe

Die natürlichen Zahlen a und b sind direkt proportional zu 2 und 3, und die Zahlen b und c sind umgekehrt proportional zu 2 und 3.

a) Beweist, dass $a = c$.
b) Findet die drei Zahlen, wenn $a + 2 \cdot b + 3 \cdot c = 140$.

Lösung

a) $\{a, b\}$ und $\{2, 3\}$ sind direkt proportional, also $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot a = 2 \cdot b$. (1)

$\{b, c\}$ und $\{2, 3\}$ sind umgekehrt proportional, also $2 \cdot b = 3 \cdot c$. (2)

Aus (1) und (2) ergibt sich $3 \cdot a = 3 \cdot c$, d. h. $a = c$.

b) Aus $a + 2 \cdot b + 3 \cdot c = 140$ und $a = c$ folgt unter Verwendung von (1) $a + 3 \cdot a + 3 \cdot a = 140$, d. h. $7 \cdot a = 140$, und wir erhalten $a = 20$, $c = 20$, dann $2b = 60$, also $b = 30$.

Übungen und Aufgaben

1. In jeder der folgenden Tabellen sind die Werte der Größen A und B angegeben. Gebt an, ob es sich um direkt proportionale Größen handelt und begründet eure Antwort.

a)

A	1	3	6	10	12,5
B	2	6	12	20	25

b)

A	2	4	5	15	20
B	6	12	15	40	60

2. Bogdan kauft 24 Mathe-Hefte der gleichen Art, für die er 180 Lei bezahlt.

a) Berechnet:

a_1) den Preis eines Mathe-Heftes;

a_2) die Geldsumme, die Bogdan bezahlt hätte, wenn er sechs Mathe-Hefte derselben Art gekauft hätte.

b) Schreibt die Tabelle ab und füllt sie aus, wobei *n* die Anzahl der von Bogdan gekauften Hefte und *s* die für die *n* Hefte gezahlte Geldsumme in Lei ist.

s				
n	1	2	6	24
$\frac{s}{n}$				

3. Die Zahlen *x* und *y* sind direkt proportional zu 2 und 3.

a) Beweist, dass $x < y$.

b) Berechnet die Zahl *x*, wenn $y = 9$.

4. Bestimmt drei Zahlen, die direkt proportional zu 3, 7 und 5 sind, wobei die kleinste 21 ist.

5. Marius, Dan, Vlad und Radu nehmen an einem Schießwettbewerb teil. Die von den drei Kindern am Ende des Schießens erzielten Ergebnisse sind Zahlen, die direkt proportional zu 1,5; 2,5; 1,75 bzw. 2 sind.

a) Schreibt die Teilnehmer am Ende des Wettbewerbs in steigender Reihenfolge ihrer Punktzahl auf.

b) Findet heraus, wie viele Punkte jeder Teilnehmer erzielt hat, wenn sie zusammen 620 Punkte erreicht haben.

6. Ein Personenzug legt 240 km zurück.
Berechnet die Durchschnittsgeschwindigkeit, mit der der Zug fahren muss, um die Strecke in 2 Stunden, 3 Stunden, 4 Stunden bzw. 6 Stunden zurückzulegen.
Übertragt in eure Hefte und füllt die folgende Tabelle aus, wobei *t* die für die Strecke benötigte Zeit und *v* die Geschwindigkeit des Zuges in km/h ist.

t	2 h	3 h	4 h	6 h
v				
$t \cdot v$				

7. In jeder der folgenden Tabellen sind die Größen *A* und *B* angegeben.

a)

A	1	3	4	10	18
B	24	8	6	2,4	1,5

b)

A	2	3	4	5	60
B	15	10	7,5	6	0,5

Gebt an, ob sie umgekehrt proportionale Größen sind. Begründet eure Antwort.

8. Die Zahlen *x* und *y* sind umgekehrt proportional zu 7 und 10.

a) Zeigt, dass $x > y$.

b) Findet die Zahl *y*, wenn $x = 20$.

9. Bestimmt drei Zahlen, die umgekehrt proportional zu 4, 15 und 9 sind, wobei die größte von ihnen 45 ist.

10. Die Zahlen *a* und *b* sind umgekehrt proportional zu den Zahlen 0,5 und 2,4. Bestimmt die Zahlen, wenn deren Summe 58 ist.

Minitest

1. Füllt die Lücken so aus, dass ihr wahre Aussagen erhaltet.

15 Pkte. **a)** Wenn $\frac{a}{4} = \frac{b}{7}$, dann sind *a* und *b* direkt proportional zu den Zahlen … .

15 Pkte. **b)** Wenn $c \cdot 3 = d \cdot 5$, dann sind *c* und *d* umgekehrt proportional zu den Zahlen … .

20 Pkte. **c)** Wenn die Seite des Quadrats Q_2 das Dreifache der Seite des Quadrats Q_1 beträgt, dann ist der Umfang des Quadrats Q_1 das …-fache des Umfangs des Quadrats Q_2.

40 Pkte. **2.** Der Umfang eines Dreiecks beträgt 80 cm. Berechnet die Seitenlängen des Dreiecks, wenn bekannt ist, dass diese direkt proportional zu den Zahlen 4, 5 und 7 sind.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L5 Die Dreisatzregel

Wir lösen und beobachten

Aufgabe 1. Peter kauft 2 kg Pfirsiche für 16 Lei. Findet heraus, wie viel 15 kg Pfirsiche der gleichen Sorte kosten würden.

Variante I

Der Preis für ein Kilogramm Pfirsiche ist der Wert des Verhältnisses $\frac{16}{2}$, d. h. 8 (Lei/kg).

Dann kosten 15 kg Pfirsiche 15-mal so viel, also $15 \cdot 8 = 120$ (Lei).

Variante II

Wir bezeichnen mit x die Kosten für 15 kg Pfirsiche.

Die gekaufte Menge und die Kosten sind direkt proportional zueinander, sodass wir die Verhältnisgleichung $\frac{2}{16} = \frac{15}{x}$ schreiben können.

Das unbekannte Glied der Verhältnisgleichung ist $x = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$.

15 kg Pfirsiche kosten also 120 Lei.

Aufgabe 2. Mihnea legt eine Strecke in 4 Stunden mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h zurück. Findet heraus, wie lange Mihnea brauchen würde, um die gleiche Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h zurückzulegen.

Variante I

Die von Mihnea zurückgelegte Strecke ist $d = v \cdot t$, wobei $v = 60$ km/h und $t = 4$ h. Wir erhalten $d = 240$ km. Wenn er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h unterwegs wäre, würde die Zeit $t = \frac{d}{v}$ betragen, wobei $d = 240$ km und $v = 80$ km/h, also $t = \frac{240}{80} = 3$ (h).

Variante II

Mit x bezeichnen wir die Zeit, die benötigt wird, um die Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h zurückzulegen. Die Fahrgeschwindigkeit und die Zeit, die für eine bestimmte Strecke benötigt wird, sind umgekehrt proportional, sodass man folgende Gleichung aufstellen kann: $60 \cdot 4 = 80 \cdot x$, also $x = \frac{60 \cdot 4}{80} = 3$.

D. h., er würde die Strecke in 3 Stunden zurücklegen.

Für die beiden oben gelösten Aufgaben zeigt die zweite Lösungsvariante die Möglichkeit, den Wert einer Größe durch eine einfache Berechnung auf der Grundlage der direkten oder umgekehrten Proportionalitätsbeziehung zu einer anderen Größe zu bestimmen.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Der einfache Dreisatz ist eine Technik zur Berechnung des Wertes einer physikalischen Größe, wenn man weiß, dass sie *direkt proportional* oder *umgekehrt proportional* zu einer anderen physikalischen Größe ist.

Zur Anwendung des einfachen Dreisatzes wird die Proportionalität der Werte der beiden Größen festgestellt. Anschließend wird anhand der bekannten Daten und unter Verwendung der aus der Proportionalität der Werte erhaltenen Beziehungen das unbekannte Glied bestimmt.

Die schematische Aufzeichnung der Daten der Aufgabe, die die Abhängigkeit der Größen und ihrer bekannten Werte hervorhebt, liefert alle Informationen, die zur Lösung der Aufgabe mithilfe des einfachen Dreisatzes erforderlich sind. Die Operationen, die durchgeführt werden müssen, um die Unbekannte zu finden, hängen davon ab, in welche der beiden Proportionalitätsarten die Aufgabe fällt.

Wenn die Werte der ersten Größe a_1 und a_2 und die Werte der anderen Größe b_1 und x sind, dann können die Daten der Aufgabe schematisch wie folgt geschrieben werden:

a_1 .... b_1
a_2 x

Um den unbekannten Wert zu bestimmen, müssen wir die folgenden zwei Situationen ermitteln:

1. Wenn die Größen direkt proportional sind, dann stehen die Mengen $\{a_1, a_2\}$ und $\{b_1, b_2\}$ in direkter Proportionalität, d. h., $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{x}$, wobei das unbekannte Glied $x = \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1}$ ist.

Schematisch ausgedrückt: Wenn die Größen direkt proportional sind, schreiben wir:

a_1 .... b_1

a_2 x

$$x = \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1}$$

2. Wenn die Größen umgekehrt proportional sind, dann stehen die Größen $\{a_1, a_2\}$ und $\{b_1, b_2\}$ in umgekehrter Proportionalität, d. h., $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot x$, wobei das unbekannte Glied $x = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2}$ ist.

Schematisch ausgedrückt: Wenn die Größen umgekehrt proportional sind, schreiben wir:

a_1 .... b_1

a_2 x

$$x = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2}$$

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Der einfache Dreisatz wird im Alltag, in der Chemie, der Physik, der Geografie und anderen Bereichen häufig angewendet.

Gelöste Aufgabe: Ein Becken könnte von drei Pumpen mit der gleichen Durchflussmenge in 45 Minuten gefüllt werden. Nachdem sie 30 Minuten lang zusammen gelaufen sind, werden zwei Pumpen abgeschaltet. Berechnet die Zeit, die die verbleibende Pumpe benötigt, um das Becken zu füllen.

Lösung: Die Pumpenlaufzeit und der Füllstand des Beckens sind *direkt proportionale Größen*. Daher können wir den einfachen Dreisatz anwenden, um herauszufinden, welcher Teil des Beckens sich in 30 Minuten füllt.

45 min .... 1 (ganzes Becken)

30 min .... x (Teil des Beckens)

Wir erhalten $\frac{45}{1} = \frac{30}{x}$, also $x = \frac{30 \cdot 1}{45} = \frac{2}{3}$.

Wir wissen, dass die 3 Pumpen zusammen das Becken in 45 Minuten füllen. Die Anzahl der verwendeten Pumpen und die Füllzeit sind *umgekehrt proportional*, daher können wir den Dreisatz anwenden, um zu berechnen, wie lange eine einzelne Pumpe zum Füllen des Beckens benötigen würde.

3 Pumpen .... 45 min

1 Pumpe .... y

Wir erhalten $3 \cdot 45 = 1 \cdot y$, also $y = \frac{3 \cdot 45}{1} = 135$ (min).

Wenn innerhalb von 30 Minuten zwei Drittel des Beckens gefüllt sind, sollte die verbleibende Pumpe *ein Drittel* des Beckens *allein* füllen.

Laufzeit und Füllstand sind *direkt proportional*. Wir verwenden den einfachen Dreisatz, um herauszufinden, wie lange es dauert, bis die verbleibende Pumpe ein Drittel des Beckens füllt.

1 Becken .... 135 min

$\frac{1}{3}$ Becken .... z

$\frac{1}{135} = \frac{\frac{1}{3}}{z}$, also $z = \frac{135 \cdot \frac{1}{3}}{1} = \frac{135}{3} = 45$ (min).

Folglich sollte die verbleibende Pumpe noch 45 Minuten lang laufen.

Übungen und Aufgaben

1. Aus 20 kg Aprikosen werden 12 kg Marmelade hergestellt. Berechnet die Menge Marmelade, die aus 25 kg Aprikosen erhalten wird.

2. Ein Team von 20 Arbeitern kann eine Arbeit in 15 Tagen erledigen. Berechnet:

a) In wie vielen Tagen können 15 Arbeiter die Arbeit beenden?

b) Wie viele Arbeiter werden benötigt, um die Arbeit in 10 Tagen zu beenden?

3. Ionels Familie unternimmt eine Reise mit dem Auto. Um 500 km zu fahren, würde das Auto 35 Liter Benzin verbrauchen.

a) Bestimmt die benötigte Benzinmenge, wenn Ionels Familie die zurückgelegte Strecke um 100 km verkürzen würde.

b) Berechnet die infolge von a) gesparte Geldsumme, wenn bekannt ist, dass ein Liter Benzin 7 Lei kostet.

4. Um ein 54-seitiges Dokument zu drucken, benötigt der Drucker 9 Minuten. Berechnet, wie viele Minuten derselbe Drucker braucht, um ein 270-seitiges Dokument auszudrucken.
5. Eine Handelsgesellschaft muss fünf neue Autos zum Preis von je 12 000 € kaufen. Bestimmt die Anzahl der Autos, die die Handelsgesellschaft kaufen könnte, wenn der Preis für ein Auto 15 000 Euro betragen würde.
6. Ein Bauernhof braucht Leute, um Trauben zu ernten. Wenn man weiß, dass 36 Personen die Trauben in 6 Tagen ernten können, findet heraus, wie viele Personen der Bauernhof benötigt, um die Trauben in höchstens 4 Tagen zu ernten.
7. Ein Schulprojekt erfordert 4 Schüler, die jeweils 5 Stunden arbeiten. Findet heraus, wie viel Zeit jeder Schüler für das Projekt arbeiten müsste, wenn zu den 4 Schülern noch 2 weitere Schüler hinzukommen würden.
8. Dan hilft beim Aufbau des Computerraums und arbeitet 6 Stunden, um die notwendige Ausrüstung zu transportieren. Sandu würde die gleiche Aufgabe in 10 Stunden erledigen. Findet heraus, wie lange die beiden Schüler brauchen würden, um die Ausrüstung zu transportieren, wenn sie zusammenarbeiten würden.
9. Ein Team von drei Druckern bereitet sich auf die Herstellung eines Flyers vor. Der erste und der zweite zusammen würden den Flyer in 6 Stunden fertigstellen, der zweite und der dritte zusammen in 12 Stunden und der erste und der dritte zusammen in 8 Stunden.
   a) Findet heraus, wie lange jeder Drucker allein für die Herstellung des Flyers benötigen würde.
   b) Findet heraus, wie lange die drei Drucker für die Herstellung des Flyers benötigen würden, wenn alle drei zusammenarbeiten würden.
10. In zwei Gläser der gleichen Sorte passen 800 g Marmelade. Berechnet die Anzahl der Gläser, die eine Hausfrau kaufen müsste, um 2 kg Marmelade zu haben.
11. Sara und Dora kaufen das gleiche Shampoo. Sara bezahlt 30 Lei für eine 800-ml-Packung, und Dora bezahlt 18 Lei für eine 500-ml-Packung. Entscheidet, welches der Mädchen das Shampoo günstiger gekauft hat. Begründet.
12. Berechnet die Anzahl der Kleider, die man aus 88 m^2 Stoff schneidern könnte, wenn bekannt ist, dass aus 33 m^2 Stoff 15 Kleider derselben Art hergestellt worden sind.
13. Ein Arbeiterteam würde ein Fünftel eines Gebäudes in 8 Tagen fertigstellen. Bestimmt:
   a) die Anzahl der Tage, in denen das Arbeiterteam ein Viertel des Gebäudes fertigstellen würde;
   b) die Anzahl der Tage, in denen das Arbeiterteam das ganze Gebäude fertigstellen würde.
14. Wenn ein Radfahrer mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 24 km/h fahren würde, würde er sein Ziel in 3 Stunden erreichen.
   a) Berechnet die Durchschnittsgeschwindigkeit, mit der der Radfahrer fahren muss, um sein Ziel in zweieinhalb Stunden zu erreichen.
   b) Findet heraus, wie lange der Radfahrer bis zum Ziel brauchen würde, wenn er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h unterwegs wäre.
15. Julian kauft 18 Fotoalben zu je 24 Lei. Berechnet die Anzahl der Alben, die Peter um die gleiche Geldsumme kaufen könnte, wenn ein Album 27 Lei kosten würde.

Minitest

1. Füllt die Lücken so aus, dass ihr wahre Aussagen erhaltet.

30 Pkte. **a)** Wenn 8 Hefte 60 Lei kosten, dann kosten 9 Hefte der gleichen Art … Lei.

30 Pkte. **b)** Wenn eine Arbeit von 15 Arbeitern in 20 Tagen erledigt wird, dann werden 40 Arbeiter die Arbeit in … Tagen erledigen.

30 Pkte. **2.** Ein Radfahrer erreicht sein Ziel in 2 Stunden, wenn er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h fährt. Bestimmt die Durchschnittsgeschwindigkeit, die der Radfahrer fahren müsste, um sein Ziel in eineinhalb Stunden zu erreichen.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L6 Prozente. Verhältnisse im Alltag

Zur Erinnerung

Ein Verhältnis der Form $\frac{p}{100}$ wird *Prozentverhältnis* genannt.
Ein Prozentverhältnis wird mit p % bezeichnet und lautet „p von hundert“ oder „p Prozent“.

$\frac{25}{100} \overset{Bez}{=} 25\ \%$

Jedes Verhältnis kann durch Erweiterungen oder Kürzungen als Prozentverhältnis ausgedrückt werden.

$^{25)}\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$

Daher ist p % von einer natürlichen Zahl a das Produkt $\frac{p}{100} \cdot a = \frac{p \cdot a}{100} = (p \cdot a)\ \%$, und p % eines Bruches $\frac{a}{n}$, $n \neq 0$, ist das Produkt $\frac{p}{100} \cdot \frac{a}{n} = \frac{p \cdot a}{100 \cdot n} = \frac{p \cdot a : n}{100} = (p \cdot a : n)\ \%$.

25 % von 500 ist $\frac{25}{100} \cdot 500 = \frac{12500}{100}^{(100} = 125$.

25 % von $\frac{2}{5}$ ist $\frac{25}{100} \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

Wenn die Zahl b p % der Zahl a ist, schreiben wir in Anwendungen $\frac{p}{100} \cdot a = b$ oder $\frac{p}{100} = \frac{b}{a}$.
Jede der Zahlen p, a, b in der obigen Verhältnisgleichung kann durch die anderen beiden wie folgt ausgedrückt werden: $p = \frac{b}{a} \cdot 100$; $a = \frac{b}{p} \cdot 100$; $b = \frac{p}{100} \cdot a$.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Aufgabe **1**
Flavius mischt 50 g Zucker mit 150 g Wasser und erhält eine *Lösung*.
a) Berechnet die Masse der erhaltenen Lösung.
b) Berechnet das Verhältnis zwischen der Masse des Zuckers und der Masse der Lösung. Gebt das ermittelte Verhältnis als Prozentverhältnis an.

Lösung: Wir bezeichnen mit m_L die Masse der Lösung, mit m_{Wasser} die Masse des Wassers und mit m_z die Masse des Zuckers.
a) Dann ist $m_L = m_z + m_{Wasser} = 50$ g + 150 g, also ist $m_L = 200$ g.
b) $\frac{m_z}{m_L} = \frac{50}{200} = \frac{25}{100}$, also $\frac{m_z}{m_L} = 25\ \%$.

Wir schreiben $c = 25$ % und sagen, dass die erhaltene Zucker-Wasser-Lösung eine Konzentration von 25 % hat.
Durch Auflösen einer Substanz in Wasser entsteht eine *wässrige Lösung*.

Die Konzentration einer Lösung ist die Menge der gelösten Substanz, die 100 g Lösung ergibt.

Wenn 500 g Lösung 30 g Salz enthalten, dann wird die Konzentration der Lösung durch die Dreisatzregel bestimmt oder durch das Verhältnis $\frac{30}{500}$.

Mathematisch gesehen ist die Konzentration einer Lösung das Verhältnis zwischen der Masse der Substanz und der Masse der Lösung.

500 g Lösung .... 30 g Salz
100 g Lösung .... x g Salz
$\Rightarrow x = \frac{100 \cdot 30}{500} = 6$.

Die Lösung hat also die Konzentration $c = \frac{6}{100}$ oder $c = 6$ %.

Die Konzentration einer Lösung wird in der Regel als Prozentverhältnis ausgedrückt.
In ähnlicher Weise entsteht durch das Zusammenschmelzen zweier Metalle eine Legierung. Viele Legierungen werden in verschiedenen Bereichen verwendet. Stahl wird zum Beispiel im Bauwesen verwendet und ist eine Legierung aus Eisen (Fe) und Kohlenstoff (C).

Edelmetalllegierungen werden häufig in der Medizin, der Elektronik, im Schmuckbereich usw. verwendet. Die Eigenschaften und der Wert der Legierung hängen von dem Feingehalt des Edelmetalls in der Legierung ab.

Der Feingehalt einer Legierung ist die Masse des hinzugefügten Metalls (Edelmetalls), um 100 g Legierung zu erhalten.

Mathematisch gesehen ist der Feingehalt einer Legierung das Verhältnis zwischen der *Masse des Edelmetalls* und der *Masse der Legierung*.

Der Feingehalt einer Legierung wird in der Regel als Prozentverhältnis ausgedrückt.

Wenn man 2 g Gold und 8 g Kupfer zusammenschmilzt, erhält man 10 g Legierung.
Es sei m_{Gold} die Masse des Goldes, m_{Ku} die Masse des Kupfers und m die Masse der Legierung. $m = m_{Gold} + m_{Ku}$. Der Feingehalt der Legierung wird entweder durch den einfachen Dreisatz für proportionale Größen bestimmt oder durch Berechnung des Verhältnisses $T = \frac{m_{Gold}}{m} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\ \%$.

Der Feingehalt beträgt $T = 20\ \%$, in 100 g Legierung sind 20 g Gold enthalten.

Karten sind aus dem Bedürfnis entstanden, sich in Räumen zu orientieren, die wir nicht kennen. Karten bewahren Details, indem sie die Abstände zwischen den Punkten proportional verkleinern. Nimmt man zwei beliebige Punkte A und B auf der Karte und ihre Entsprechungen A_1 und B_1 im Gelände, so ist das Verhältnis $\frac{AB}{A_1B_1}$ konstant. (Der Wert bleibt für jedwelches Punktepaar A und B derselbe) Das oben beschriebene Verhältnis, das in der Regel als Bruch mit dem Zähler 1 ausgedrückt wird, wird *Maßstab der Karte* genannt.

Der *Maßstab einer Karte* ist das Verhältnis zwischen der auf der Karte gemessenen Entfernung und der gleichen in Wirklichkeit gemessenen Entfernung mit derselben Maßeinheit.

Wenn die Entfernung zwischen den Orten A und B im Gelände 50 km = 5 000 000 cm beträgt und die Entfernung auf der Karte 5 cm, dann wurde die Karte in einem Maßstab von $\frac{5}{5000000} = \frac{1}{1000000}$ oder 1: 1 000 000 erstellt.

Bemerkungen: Der Maßstab einer Karte gibt an, wievielmal so groß die Entfernungen im Gelände im Verhältnis zu den Entfernungen auf der Karte sind.

Untersuchung: *Fibonacci und das Goldverhältnis*

Bildet drei Gruppen. Lest folgende Texte aufmerksam durch und schlagt im digitalen Lehrbuch (in rumänischer Sprache) nach, um die Aufgabenstellungen für jede Gruppe (als Text und animiert) zu erfahren.
Im Alltag begegnen wir überall Verhältnissen und Verhälnisgleichungen (Proportionen).

1. Ein berühmtes Verhältnis, das sogenannte *Goldverhältnis*, bestimmt alles, was uns umgibt: in der Natur, in der Kunst, in der Architektur, ja sogar in der menschlichen DNS. Der Wert des Goldverhältnisses wird mit φ bezeichnet und beträgt ungefähr 1,618.

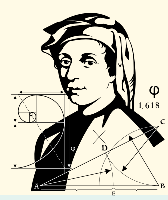
2. *Der goldene Schnitt* bezeichnet die Teilung einer Strecke im *Goldverhältnis*, also die Festlegung eines Punktes M auf der Strecke AB, sodass: $\frac{MB}{MA} = \frac{AB}{MB} = \varphi$.

$$\frac{AB}{MB} = \frac{MB}{MA} = \varphi \approx 1{,}618$$

A M B

Wenn $MA = a$ und $MB = b$, dann ist $AB = a + b$. Man schreibt $\frac{MB}{MA} = \frac{AB}{MB}$ als $\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$ und bezeichnet es als *goldene Proportion*.

3. Die Folge der natürlichen Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … heißt Fibonacci-Folge. Jedes Glied dieser Folge (beginnend mit dem dritten) ist die Summe der beiden vorangegangenen Glieder: $2 = 1 + 1$; $3 = 2 + 1$; $5 = 3 + 2$; $8 = 5 + 3$ …
Die Zahlen der Fibonacci-Folge sind in der Natur beobachtet worden und wurden schon seit jeher in der Tätigkeit der Menschen verwendet.



Portfolio-Aufgabe
1. Stellt die Ergebnisse eurer Untersuchung allen Mitschülern vor.
2. Erkennt Zusammenhänge zwischen den Ergebnissen eurer Gruppe und den Ergebnissen der anderen Gruppen und ergänzt euer persönliches Portfolio mit relevanten Daten

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Gelöste Aufgaben

1. Löst man Salz in Wasser auf, so erhält man eine Lösung der Konzentration 8 %. Berechnet die Menge des gelösten Salzes, um 500 g Lösung zu erhalten.

Lösung: Man bezeichnet mit m_s die Masse des gelösten Salzes und mit m die Masse der Lösung. $c = \frac{m_s}{m}$, also $\frac{8}{100} = \frac{m_s}{500}$, d. h. $m_s = \frac{8 \cdot 500}{100} = 40$ (g).

Antwort: 40 g Salz werden in 460 g Wasser aufgelöst.

2. 400 g einer Gold-Kupfer-Legierung haben einen Feingehalt von 0,825. Bestimmt die Goldmenge, die hinzugefügt werden muss, um eine Legierung mit einem Feingehalt von 0,875 zu erhalten.

Lösung: m_1 sei die Masse des für die erste Legierung verwendeten Goldes. Dann ist $\frac{m_1}{400} = 0{,}825$, also $m_1 = 400 \cdot 0{,}825 = 330$ (g).

Die neue Legierung wird durch Zugabe von x g Gold gebildet. Dann ist die Masse des Goldes in der neuen Legierung $330 + x$ und die Masse der Legierung $400 + x$. Da der Feingehalt 0,875 ist, ergibt sich die Verhältnisgleichung $\frac{330+x}{400+x} = \frac{875}{1000}^{(125}$, die äquivalent ist mit $\frac{330+x}{400+x} = \frac{7}{8}$. Mit abgeleiteten Verhältnisgleichungen erhalten wir $\frac{330+x}{70} = \frac{7}{1}$.

Aus der Haupteigenschaft der Verhältnisgleichung folgt, dass $330 + x = 490$, also $x = 490 - 330 = 160$ (g).

Antwort: Es werden 160 g Gold hinzufügt.

3. Der Maßstab einer Karte ist 1: 400 000.
Berechnet die Entfernung zwischen zwei Orten in Wirklichkeit, wenn bekannt ist, dass sie auf der Karte 16 cm beträgt.

I. Es ist offensichtlich, dass die Entfernung in Wirklichkeit und die Entfernung auf der Karte direkt proportional sind. Nach der Dreisatzregel ergibt sich Folgendes:
1 cm .... 400 000 cm
16 cm .... x cm
$x = 16 \cdot 400\,000 = 6\,400\,000$ (cm)

II. Unter Verwendung der Definition schreiben wir: $\frac{1}{400\,000} = \frac{16}{x}$.
Das unbekannte Glied der Verhältnisgleichung ist $x = 16 \cdot 400\,000 = 6\,400\,000$ (cm).

Antwort: $d = 6\,400\,000$ cm $= 64$ km.

Bemerkung: In vielen praktischen Situationen bietet der Dreisatz mehr Sicherheit in der Argumentation.

Übungen und Aufgaben

1. Drückt als Prozentverhältnis aus:
$\frac{27}{100}$; $\frac{71}{100}$; $\frac{13}{50}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{11}{10}$; 0,2; 1,75.

2. Schreibt als Verhältnisse, ausgedrückt durch unkürzbare gemeine Brüche: 50 %, 80 %, 17,5 %, 120 %.

3. Berechnet:
a) 20 % von 225 Lei;
b) 35 % von 440 Litern;
c) 12,5 % von 500 kg.

4. Bestimmt die Zahl, die um 25 % größer als 300 ist.

5. Ioana hat 300 Lei, von denen sie 20 % ausgibt.
a) Berechnet den von Ioana ausgegebenen Geldbetrag.
b) Gebt den Betrag, der Ioana verbleibt, als Prozentverhältnis an.

6. Nach dem Verkauf von 40 % der Karten für eine Theatervorstellung sind 120 Karten unverkauft geblieben. Bestimmt die Anzahl der Karten, die für diese Vorstellung verkauft worden sind.

7. Berechnet die Konzentration der erhaltenen Lösung, wenn:
a) 25 g Salz in 175 g Wasser aufgelöst werden;
b) 20 g Salz in 140 g Wasser aufgelöst weden.

8. Füllt die Lücken aus, um richtige Aussagen zu erhalten.
a) Durch Auflösen von 45 g Zucker in Wasser erhält man 450 g Lösung. Die Konzentration dieser Lösung beträgt … %.
b) 50 g Zucker löst man in 450 g Wasser auf. Die Konzentration der erhaltenen Lösung beträgt … %.

9. Füllt die Lücken so aus, dass ihr richtige Aussagen erhaltet.

a) Die Zahl 63 stellt … % von 90 dar.

b) Die Zahl 100 000 stellt … % von 9 250 000 dar.

c) Wenn 125 % einer Zahl die Zahl 1800 ist, dann ist die ursprüngliche Zahl … .

d) 2500 kg Obst werden an 3 Kantinen verteilt. Eine Kantine erhält 30 % der Menge und eine andere Kantine 24 % der restlichen Menge. Die Menge, die die dritte Kantine erhält, beträgt … kg Obst.

10. Man schmilzt 800 g einer Legierung von Silber und Aluminium mit dem Feingehalt von 0,35 und 200 g reines Silber zusammen.

a) Berechnet den Feingehalt der neuen Legierung.

b) Berechnet die Menge an reinem Silber, die in der neuen Legierung enthalten ist.

11. Berechnet den Feingehalt einer Kupfer-Gold-Legierung, wenn bekannt ist, dass sie:

a) 240 g Gold und 960 g Kupfer enthält.

b) durch das Zusammenschmelzen von 100 g Gold und 300 g Kupfer hergestellt wird.

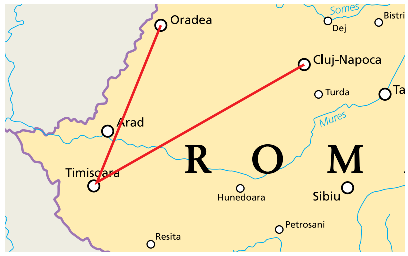
12. Bestimmt die Silbermenge, die in 1800 g einer Legierung mit dem Feingehalt 0,125 enthalten ist.

13. Auf einer Karte mit dem Mabstab 1 : 1 000 000 beträgt der Abstand zwischen zwei Städten 12 cm.

a) Berechnet die Entfernung zwischen den beiden Städten im Gelände.

b) Ermittelt auf der Karte die Entfernung zwischen denselben Städten, wenn die Karte im Maßstab 1:1 500 000 gezeichnet wäre.

14. Ioana verbindet die Punkte, die den Städten Timişoara und Oradea auf der Karte entsprechen, mit einer Strecke, die 3 cm lang ist.



a) Berechnet das Verhältnis, das den Maßstab der Karte ausdrückt, wenn bekannt ist, dass die Entfernung zwischen den beiden Städten im Gelände etwa 150 km beträgt.

b) Bestimmt die Entfernung zwischen Timişoara und Cluj-Napoca in Wirklichkeit, wenn bekannt ist, dass die beiden Städte auf derselben Karte durch eine 4,5 cm lange Strecke verbunden sind.

c) Berechnet auf zwei Arten die Entfernung zwischen Oradea und Timişoara auf einer Karte im Maßstab 1: 200 000.

Minitest

1. Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

15 Pkte. **a)** 50 % von 350 kg stellen … dar.

A. 125 kg; **B.** 225 kg; **C.** 175 kg; **D.** 225 kg.

15 Pkte. **b)** Ionel hat 35 % der 400 Lei, die er hatte, ausgegeben. Der verbleibende Geldbetrag ist:

A. 260 Lei; **B.** 140 Lei; **C.** 160 Lei; **D.** 240 Lei;

15 Pkte. **c)** Wenn die Zahl 18 25 % der Zahl *b* darstellt, dann ist die Zahl *b* gleich:

A. 36; **B.** 54; **C.** 63; **D.** 72.

15 Pkte. **d)** Die Berechnung von 27 % von 45 % von 24 000 ergibt:

A. 2196; **B.** 2691; **C.** 2916; **D.** 2961.

10 Pkte. **2.** Berechnet den Feingehalt einer Legierung, die 50 g Gold und 250 g Kupfer enthält.

20 Pkte. **3.** Eine Lösung aus Wasser und Salz hat eine Konzentration von 15 %. Berechnet die Salzmenge, die ihr zu 600 g Lösung hinzufügen müsst, um die Konzentration auf 25 % zu erhöhen.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

2.2 Elemente der Datenverarbeitung

L1 Grafische Darstellung von Daten unter Beachtung der Proportionalität. Darstellung von Daten mithilfe mathematischer Software

Zur Erinnerung

Eine statistische Untersuchung wird durchgeführt, um ein Phänomen zu verstehen, zu interpretieren, zu bewerten oder zu regeln.
Das untersuchte Phänomen wird durch *Merkmale* oder Variablen beschrieben. Eine Variable bezieht sich auf eine Anzahl von *Einzelobjekten* (Personen, Personengruppen, bestimmte Arten von Objekten), die zusammen eine *statistische Population* bilden. Die Anzahl aller Objekte einer statistischen Population nennen wir *Gesamtzahl* der Population.
Eine Variable kann durch Zahlen oder *Eigenschaften* ausgedrückt werden. Diese heißen *Werte der Variablen* (oder *Merkmalswerte*).

Wir lösen und beobachten

Schaut euch in den folgenden zwei Beispielen die drei Darstellungen genau an und formuliert dann eine begründete Antwort auf folgende Fragen:

1. Welche Darstellung ist intuitiver (leichter zu erkennen)?
2. In welcher der Darstellungen wählen wir am leichtesten den größten Wert? Aber den kleinsten Wert?
3. Können wir, ausgehend von einer der Darstellungen, die anderen beiden herstellen?

Beispiel 1: Über die Augenfarbe der Schüler der 6A-Klasse liegen folgende Informationen vor:

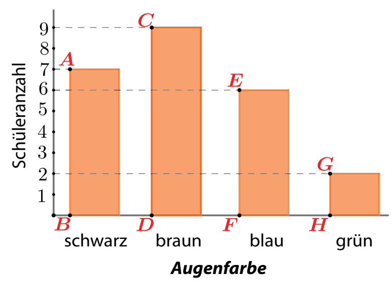
a) Die 24 Schüler der 6A-Klasse haben die Augenfarben: braun, schwarz, braun, blau, grün, schwarz, braun, schwarz, blau, blau, grün, braun, schwarz, schwarz, braun, braun, schwarz, blau, braun, blau, schwarz, blau, braun, braun.

b) Die Augenfarben der Schüler der 6A-Klasse sind:

Augenfarbe	*schwarz*	*braun*	*blau*	*grün*
Anzahl der Schüler	7	9	6	2

In allen Varianten stellen wir fest:
– Variable: Augenfarbe;
– Werte der Variablen: schwarz, braun, blau, grün;
– statistische Population: Schüler der 6A-Klasse;
– Gesamtzahl: 24.

c) Grafische Darstellung.



Beispiel 2: Über die Ergebnisse der 6B-Klasse im Mathematiktest weiß man:

a) Im Mathematiktest haben die Schüler der 6B-Klasse folgende Noten erhalten:

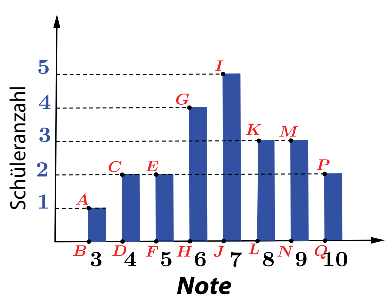
8, 9, 5, 3, 4, 7, 8, 7, 6, 6, 10, 5, 6, 7, 4, 9, 10, 9, 6, 7, 8, 7.

b) Im Mathematiktest haben die Schüler der 6B-Klasse folgende Ergebnisse erzielt:

Note	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Schüler	1	2	2	4	5	3	3	2

In allen gilt:
– Variable: *die Note im Test*;
– Werte der Variablen: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;
– statistische Population: Schüler der 6B-Klasse;
– Gesamtzahl: 22.

c) Testergebnisse der Schüler der 6B-Klasse



Lösung

1. In jedem der Beispiele ist die Darstellung als Schaubild intuitiver.

2. Wir können sehr leicht ermitteln, welches der größte bzw. der kleinste Wert ist, der anzeigt, wie oft ein Ereignis eintritt. Wenn man mit großen Werten zu tun hat, ist es vorteilhaft, mit Diagrammen zu arbeiten.

3. Die drei Varianten liefern die gleichen Informationen, sodass man je zwei von ihnen aufgrund der jeweils dritten herstellen kann.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Das Ergebnis des Vergleichs zwischen den drei Arten der Darstellung derselben Informationen rechtfertigt die Notwendigkeit der *Sortierung*, der Anordnung der statistischen Daten in *Datentabellen* und der Nützlichkeit der Darstellung in Form von *Diagrammen* oder *Grafiken*.

Definition. Die *absolute Häufigkeit* zeigt an, *wie oft* der Wert einer Variablen in der statistischen Population *vorkommt*.

Beispiele: In Beispiel 1 hat der Wert braun die Häufigkeit (Frequenz) 9, der Wert grün die Häufigkeit 2. In Beispiel 2 hat der Wert 7 die Häufigkeit 5.

In den Häufigkeitstabellen wird jeder Wert der Variablen mit seiner Häufigkeit verknüpft. Häufigkeitstabellen werden zur Erstellung von Säulen- und Balkendiagrammen (vertikal oder horizontal), Kreisdiagrammen, Grafiken (Schaubildern) und anderen Diagrammen verwendet.

Die Länge der dargestellten Säulen (Balken) und die absolute Häufigkeit der Merkmalswerte sind direkt proportionale Größen, d. h., *die Menge der Balkenlängen* ist direkt proportional zur *Menge der* entsprechenden *absoluten Häufigkeiten*.

Somit ergeben sich für Beispiel 2 folgende Gleichheiten: $\frac{AB}{1}=\frac{CD}{2}=\frac{EF}{2}=\frac{GH}{4}=\frac{IJ}{5}=\frac{KL}{3}=\frac{MN}{3}=\frac{QP}{2}$.

In Beispiel 1 finden die Gleichheiten $\frac{AB}{7}=\frac{CD}{9}=\frac{EF}{6}=\frac{GH}{2}$ statt.

Wir können nun zweifelsfrei feststellen, dass die von den meisten Schülern erhaltene Note diejenige ist, die dem längsten Balken (der längsten Säule) entspricht, d. h. 7, und dass die von den wenigsten Schülern erhaltene Note diejenige ist, die dem kürzesten Balken entspricht, d. h. 3.

Wenn wir uns die Diagrammdarstellung in Beispiel 2 ansehen, so kann man intuitiv schätzen, dass die Durchschnittsnote der Klasse bei etwa 7 liegt. Dies ist allerdings nur eine Schätzung. Das genaue Ergebnis erhält man, indem man das arithmetische Mittel aller erhaltenen Noten berechnet.

Anhand der Informationen in der Datentabelle „Testergebnis" lässt sich die Durchschnittsnote der Klasse für diesen Test berechnen, also der Mittelwert des numerischen Datensatzes.

Für den statistischen Datensatz „Testergebnis" ist der Mittelwert des Datensatzes die Zahl

$$m_a=\frac{3+4+4+5+5+6+6+6+6+7+7+7+7+7+8+8+8+9+9+9+10+10}{22}=$$

$$=\frac{3+4\cdot 2+5\cdot 2+6\cdot 4+7\cdot 5+8\cdot 3+9\cdot 3+10\cdot 2}{22}=6{,}8(63).$$

Auf *zwei Dezimalstellen genau* gerechnet erhalten wir $m_a=6{,}86$. Das heißt, dass die Schätzung sehr gut war.

Bemerkung: Es gibt auch Situationen, in denen es schwierig ist, Schätzungen vorzunehmen, die dem rechnerisch ermittelten Mittelwert so nahekommen.

Wir merken uns

Der Mittelwert eines numerischen Datensatzes ist das arithmetische Mittel aller Werte der betreffenden Variablen.

Dieser wird in der Regel auf *zwei Dezimalstellen* berechnet.

Bemerkung: Wenn die Variable nicht numerisch ist (ihre Werte werden als Eigenschaften ausgedrückt), dann gibt es *keinen Mittelwert* des entsprechenden Datensatzes.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung: In dem Erstbewertungstest haben die 24 Schüler der 6. Klasse folgende Noten erhalten: 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10.

a) Sortiert und ordnet die obigen Daten in der *Häufigkeitstabelle* ein.

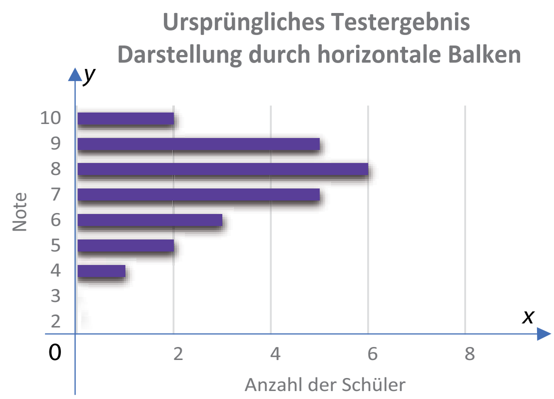
b) Stellt die Informationen mithilfe eines Balkendiagramms (mit horizontalen Balken/Streifen) dar.

Lösung

a)

Note	4	5	6	7	8	9	10
Häufigkeit/Anzahl der Schüler	1	2	3	5	6	5	2

b) Wir betrachten zwei Halbgeraden mit gemeinsamem Ursprung, eine in horizontaler Lage, mit *Ox* bezeichnet, und eine in vertikaler Lage, mit *Oy* bezeichnet.
Auf die *Oy-Achse* schreiben wir *die Werte* des *Merkmals* und auf die *Ox-Achse* die diesen Werten entsprechenden Häufigkeiten.
Anschließend werden horizontale *Balken* mit einem Ende auf der *Oy-Achse* an den Punkten aufgetragen, die den *Werten* der Variablen entsprechen, wobei die Länge proportional zur *Häufigkeit* dieses Wertes ist.
Die Länge der Balken und die absolute Häufigkeit (Frequenz) der Merkmale sind direkt proportionale Größen, d. h., *die Menge der Balkenlängen* ist direkt proportional zur *Menge der* entsprechenden *absoluten Häufigkeiten*.



In einigen Untersuchungen liefert die absolute Häufigkeit der Werte kein klares Bild des Phänomens. Dann ist es vorteilhaft, *die Gewichtung eines Wertes* im Verhältnis zur untersuchten *Gesamtzahl* zu kennen.

Das Verhältnis zwischen der *absoluten Häufigkeit* eines Wertes *und der Gesamtzahl der Population* heißt *relative Häufigkeit* dieses Wertes.

Beispiele

In „Note im Erstbewertungstest“ hat der Wert 6 die relative Häufigkeit $\frac{3}{24}=\frac{1}{8}=0{,}125$, und der Wert 8 die relative Häufigkeit $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}=0{,}25$.

Die relative Häufigkeit wird in der Regel als *Prozentverhältnis* ausgedrückt, was vergleichende Interpretationen des Verhaltens der Variablenwerte ermöglicht.

Beispiel: Die Note 4 hat die Häufigkeit 1 und die Anzahl der Schüler in der Klasse (Gesamtzahl) beträgt 24. Die relative Häufigkeit der Note 4 ist $\frac{1}{24}=4{,}1(6)\ \%$.

In ähnlicher Weise erhält man die Häufigkeiten der anderen Noten: 8,(3) %, 12,5 %, 20,8(3) %, 25 %, 8,(3) %.

Bei der Darstellung mithilfe von Diagrammen unter Verwendung der Prozentverhältnisse kann man Dezimalbrüche an ganze Zahlen annähern, wobei man darauf achtet, dass die Gesamtsumme hundert Prozent, also ein Ganzes, ist.

Note	4	5	6	7	8	9	10
Relative Häufigkeit ausgedrückt als Prozentverhältnis	4 %	8 %	13 %	21 %	25 %	21 %	8 %

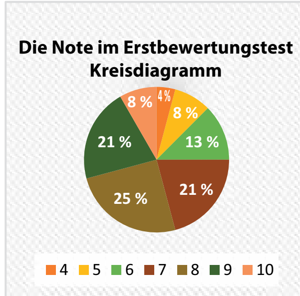
Das Kreisdiagramm ermöglicht es, die Häufigkeit der Werte in Prozent zu interpretieren.
Das *Kreisdiagramm* ist eine in Kreissektoren unterteilte Scheibe.

Die den Häufigkeiten entsprechenden *Bogenmaße* sind *direkt proportional zu* den *Häufigkeiten* und werden mithilfe des Dreisatzes bestimmt.

Wir wissen, dass das Maß des Kreises 360° ist, und die Summe der Maße der Bögen, die den Winkeln um einen Punkt entsprechen, ist gleich dem Maß des Kreises.
Beispiel: 6 von 24 Schülern haben die Note 8 im Test erhalten.

Also, 24 Schüler .... 360°
6 Schüler .... $x°$

Wir erhalten $x = \dfrac{6 \cdot 360^\circ}{24} = 90^\circ$, das sind 25 % von 360°, so wie 6 Schüler 25 % von 24 Schülern darstellen.



Moderne Techniken bieten die Möglichkeit, Diagramme und Grafiken mithilfe spezieller Software zu erstellen. Im *digitalen Lehrbuch (in rumänischer Sprache)* erfahrt ihr, wie man mit Excel oder Microsoft Word Diagramme und Grafiken erstellen kann

Übungen und Aufgaben

1. In einem Fremdsprachenzentrum haben sich 100 Jugendliche zu Sprachkursen eingeschrieben. Sie erlernen jeweils eine der folgenden Sprachen: Englisch, Französisch, Deutsch.
Übertragt die Tabelle in eure Hefte und ergänzt die Anzahl der Mädchen und der Jungen, die jede der Sprachen erlernen.

	Englisch	Französisch	Deutsch	Insgesamt
Anzahl Mädchen	32			53
Anzahl Jungen			8	47
Insgesamt	64		17	100

2. 30 Familien wohnen im Wohnblock Nr. 1 in der Bunăvoinței-Straße. Jede Familie hat höchstens 4 Kinder, wie aus der beigefügten Tabelle hervorgeht.

Kinderanzahl	0	1	2	3	4
Familienanzahl	5	9	8	6	2

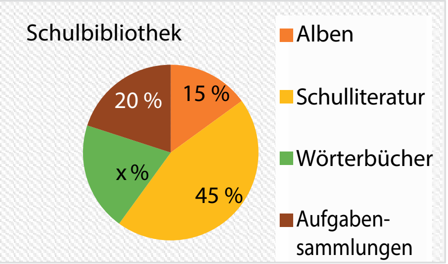
a) Gebt die Variable des Datensatzes und ihre Werte an.
b) Bestimmt die Anzahl der Kinder, die in diesem Wohnblock wohnen.
c) Bestimmt die Häufigkeit des Wertes 2 im Datensatz (Anzahl der Familien mit zwei Kindern).
d) Gebt den Wert mit der höchsten Häufigkeit und den Wert mit der niedrigsten Häufigkeit an.
e) Berechnet, wie viele Familien mindestens 2 Kinder haben. Gebt das Ergebnis als Prozentverhältnis an.
f) Berechnet, wie viele Familien höchstens ein Kind haben. Gebt das Ergebnis als Prozenterhältnis an.

3. Jedes Jahr besteht die rumänische Mannschaft bei der Internationalen Mathematik-Olympiade aus sechs Schülerinnen und Schülern, die je nach Punktzahl die Möglichkeit haben, eine Gold-, Silber- oder Bronzemedaille zu gewinnen.
Laut der offiziellen IMO-Website hat das rumänische Team in den letzten fünf Jahren Medaillen entsprechend der unten stehenden Tabelle gewonnen.

a) Bestimmt die Zahlen *x, y, z,* um die Tabelle zu vervollständigen.
b) Berechnet die Gesamtzahl der Medaillen jeder Art, die die rumänische Mannschaft in den letzten fünf Jahren gewonnen hat.
c) Gebt für jedes Jahr die Anzahl der Goldmedaillen im Verhältnis zur Gesamtzahl der in dem betreffenden Jahr gewonnenen Medaillen in Prozenten an.
d) Approximiert die Prozente an ganze Zahlen und erstellt dann mithilfe einer mathematischen Software ein Kreisdiagramm mit den in c) erhaltenen Ergebnissen.

Jahr	Gold	Silber	Bronze	Insgesamt
2022	2	4	0	6
2021	0	***x***	2	5
2020	***y***	2	3	6
2019	1	2	3	6
2018	1	1	***z***	4

4. Das folgende Diagramm zeigt die prozentuale Zusammensetzung der Bibliothek einer Schule. Es ist bekannt, dass die Anzahl der Aufgabensammlungen 240 ist.



a) Bestimmt den Prozentsatz, den die Wörterbücher in der Bibliothek darstellen.
b) Berechnet die Gesamtzahl der Bücher in der Bibliothek.
c) Berechnet anhand des Diagramms die Anzahl der Bücher jeder Art und vervollständigt dann folgende Tabelle.

Buchart	Aufgabensammlungen	Schulliteratur	Alben	Wörterbücher
Anzahl der Bücher				

d) Erstellt anhand der Daten in der Tabelle mithilfe von Excel oder Microsoft Word ein Säulendiagramm.

Minitest

Um den Gruppenleiter für eine Freiwilligenaktion zu nominieren, stimmen alle Gruppenmitglieder über die vier Kandidaten ab. Matei erhält 30 % der Stimmen, Rareș 25 %, Emil 20 % und Claudiu die restlichen 10 Stimmen. Gruppenleiter ist der Kandidat mit den meisten Stimmen.

25 Pkte. **a)** Berechnet den Prozentsatz der Stimmen, die Claudiu erhalten hat, wenn bekannt ist, dass es keine ungültigen Stimmen gegeben hat.

25 Pkte. **b)** Gebt an, wer zum Leiter der Gruppe ernannt wird. Begründet.

20 Pkte. **c)** Berechnet die Anzahl der Stimmen, die jeder Kandidat erhalten hat.

20 Pkte. **d)** Erstellt die Häufigkeitstabelle der statistischen Reihe „Gruppenleiter" aufgrund der in Unterpunkt b) erhaltenen Ergebnisse.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Wahrscheinlichkeitsrechnungen

Matei und Miruna haben mehrere Freunde zu sich eingeladen. Sie bereiten die Spiele vor, die sie gemeinsam spielen wollen.

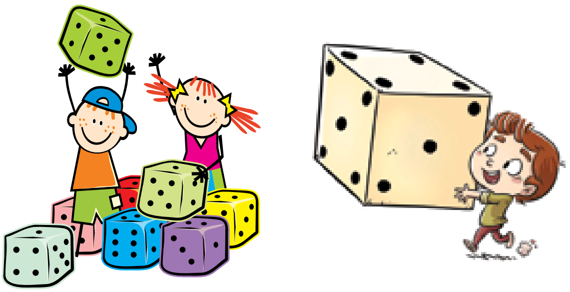
Miruna: „Wer beginnt das Spiel?"

Matei: „Derjenige, der die höchste Augenzahl würfelt."

Ihr jüngerer Bruder Mihnea kommt dazu und ruft: „Ich habe die höchste Augenzahl!".

Miruna und *Matei*: „Ha, Ha! Wie niedlich!"

Miruna: „So geht das nicht, man muss auf dem Tisch würfeln und mehr Punkte bekommen als die anderen Spieler."



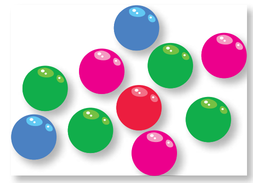
a) Entscheidet, ob jemand im Vorteil ist, wenn der Spieler mit der höchsten Augenzahl beginnt.
b) Beschreibt eine Situation, in der ihr eine Zufallsauswahl getroffen habt. Zum Beispiel: eine Münze werfen, eine Person oder einen Gegenstand mit geschlossenen Augen wählen, jemanden mithilfe eines Abzählreims bestimmen usw.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Wir betrachten folgende praktische Situationen:

1. Mit einem Würfel, dessen Flächen mit 1 bis 6 nummeriert sind, wird auf einer horizontalen Fläche gewürfelt. Der Wurf führt dazu, dass eine einzige Fläche in einer horizontalen Position erscheint und die auf dieser Fläche geschriebene Zahl sichtbar ist.

2. In einer Urne befinden sich 4 grüne Kugeln, 3 rosa Kugeln, 2 blaue Kugeln und 1 rote Kugel. Sie unterscheiden sich nur in der Farbe. Wenn man eine Kugel zieht, ohne sie anzuschauen, erhält man eine Kugel, die eine der 4 Farben hat.



3. Eine Münze hat zwei verschiedene Seiten. Wenn man die Münze auf eine horizontale Fläche wirft, wird genau eine der beiden Seiten angezeigt.

Jede der oben beschriebenen Situationen kann beliebig oft und unter den gleichen Bedingungen wiederholt werden.

Diese werden *Zufallsexperimente* genannt.

Jede Wiederholung des Experiments wird *Probe* genannt.

Im Zusammenhang mit einem Experiment können mehrere *Ereignisse* formuliert werden.

1. *Experiment*: Würfeln
Ereignisse: $\mathbf{A}_1$: Man erhält Fläche 1; $\mathbf{A}_2$: Man erhält Fläche 2;… $\mathbf{A}_6$: Man erhält Fläche 6. $\mathbf{B}_1$: Man erhält eine Fläche mit gerader Zahl; $\mathbf{B}_2$: Man erhält eine Fläche mit ungerader Zahl. $\mathbf{B}_3$: Man erhält eine Zahl, die kleiner ist als 7; $\mathbf{B}_4$: Man erhält die Zahl 7.

2. *Experiment*: Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit 4 grünen Kugeln, 3 rosa Kugeln, 2 blauen Kugeln und einer roten Kugel
Ereignisse: **A:** Man zieht eine rote Kugel; **B:** Man zieht eine rosa Kugel; **C:** Man zieht eine grüne oder eine rosa Kugel; **D:** Man zieht eine blaue Kugel.

Aus den obigen Beispielen geht hervor, dass einige Ereignisse *immer stattfinden* ($\mathbf{B}_3$), andere *nie* ($\mathbf{B}_4$) und wieder andere *vielleicht oder vielleicht auch nicht* ($\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{B}_2$, **A, B, C, D**).

Ein Ereignis, das bei jeder Wiederholung des Experiments eintritt, wird *sicheres Ereignis* genannt.	*Beispiel:* Wenn gewürfelt wird, erhält man eine natürliche Zahl, die mindestens 1 und höchstens 6 ist.
Ein Ereignis, das niemals eintritt, nennt man *unmögliches Ereignis*.	*Beispiel:* Der Würfelwurf ergibt ein natürliches Vielfaches der Zahl 7.
Ein Ereignis, das weder sicher noch unmöglich ist, nennt man *zufälliges Ereignis*. Sein Eintreten ist dem Zufall unterworfen.	*Beispiel:* 1. Der Würfelwurf ergibt die Augenzahl 4. 2. Das Ergebnis des Würfelwurfs ist eine ungerade Zahl.
Es wurde festgestellt, dass bei einer ausreichend großen Anzahl von Proben das Verhältnis zwischen der Anzahl der Auftritte eines Ereignisses und der Anzahl der Proben ungefähr gleich dem Verhältnis zwischen der Anzahl der *günstigen Fälle* und der Anzahl der *möglichen Fälle ist*.	*Beispiel:* Bei einem *Würfelwurf* sind 6 Situationen *möglich*: Fläche 1, Fläche 2, Fläche 3, Fläche 4, Fläche 5, Fläche 6. Dies sind die *möglichen Fälle* dieses Experiments. Die Flächen 1, 3 und 5 sind die *günstigen Fälle des* Ereignisses $\mathbf{B}_2$. Fläche 6 ist der einzige *günstige Fall* für das Ereignis $\mathbf{A}_6$.

Die Häufigkeit des Auftretens eines Ereignisses ist gekennzeichnet durch das *Verhältnis zwischen der Anzahl der günstigen Fälle des Ereignisses und der Anzahl der möglichen Fälle des Experiments (Ereignisses)*. Dieses Verhältnis heißt *Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des Ereignisses oder Wahrscheinlichkeit des Ereignisses*.

Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des Ereignisses M, bezeichnet als $W(M)$, ist das *Verhältnis zwischen der* Anzahl n_g der *günstigen Fälle* des Eintreffens des Ereignisses *M* und der Anzahl *n* der *möglichen Fälle des Experiments*.

$$W(M) = \frac{\text{Anzahl günstiger Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}}$$

$$W(M) = \frac{n_g}{n}.$$

Beispiel: In einer Schachtel befinden sich 10 weiße Kugeln und 5 schwarze Kugeln. Eine Kugel wird gezogen.
Wir betrachten die Ereignisse: **A:** Eine weiße Kugel wird gezogen; **B:** Eine schwarze Kugel wird gezogen; **C:** Eine weiße oder schwarze Kugel wird gezogen.
Die Anzahl der *möglichen Fälle* entspricht der Gesamtzahl der Kugeln in der Schachtel, also 15.
Es gibt 10 *günstige Fälle* (Kugeln) für das Ereignis A, 5 *günstige Fälle* für *das* Ereignis B und 15 *günstige Fälle* für das Ereignis C.
Folglich, $W(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0{,}(6)$, $W(B) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0{,}(3)$, $W(C) = \frac{15}{15} = 1$.

Es ist leicht zu sehen, dass in jedem Experiment die Zahl der möglichen Fälle eine natürliche Zahl ist, die höchstens der Zahl der günstigen Fälle eines Ereignisses des Experiments entspricht. $W(M) \geq 0$, $W(M) \leq 1$ für jedwelches Ereignis *M*.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Beispiel 1. Münzwurf

Ereignis	**A:** Die *Zahl* erscheint.	**B:** Der *Kopf* erscheint.	**C:** Die *Zahl* und der *Kopf* erscheinen gleichzeitig.	**F:** *Die Zahl* erscheint oder *der Kopf* erscheint.
Anzahl günstiger Fälle	1	1	0	2
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{0}{2} = 0$	$\frac{2}{2} = 1$

Beispiel 2. Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit 4 grünen Kugeln, 3 rosa Kugeln, 2 blauen Kugeln und 1 roten Kugel

Ereignis	**A:** Grüne Kugel wird gezogen.	**B:** Rosa Kugel wird gezogen.	**C:** Blaue Kugel wird gezogen.	**D:** Rote Kugel wird gezogen.	**E.** Weiße Kugel wird gezogen.	**F.** Grüne oder rote Kugel wird gezogen.
Anzahl günstiger Fälle	4	3	2	1	0	$4+1+5$
Wahrscheinlichkeit	$\frac{4}{10} = 0{,}4$	$\frac{3}{10} = 0{,}3$	$\frac{2}{10} = 0{,}2$	$\frac{1}{10} = 0{,}1$	$\frac{0}{10} = 0$	$\frac{5}{10} = 0{,}5$

Übungen und Aufgaben

1. Füllt die Lücken so aus, dass ihr wahre Ausagen erhaltet.
a) Die Wahrscheinlichkeit, dass beim Würfeln mit einem Würfel die Zahl 6 erscheint, ist … .
b) Die Wahrscheinlichkeit, dass mit einem Würfel eine Ziffer, die größer als 3 ist, gewürfelt wird, ist … .
c) Die Wahrscheinlichkeit, dass beim Würfeln mit zwei Würfeln die Summe der gewürfelten Zahlen größer als 9 ist, beträgt … .

2. Maria schreibt eine von null verschiedene natürliche Zahl, die kleiner als 30 ist, an die Tafel.
a) Berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass die geschriebene Zahl durch 3 teilbar ist.
b) Berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass die geschriebene Zahl durch 5 teilbar ist.

3. Aus einer Urne mit 12 weißen Kugeln, 15 roten Kugeln und 18 schwarzen Kugeln wird eine Kugel gezogen. Berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass folgende Ereignisse eintreffen:
a) die gezogene Kugel ist rot;
b) die gezogene Kugel ist nicht schwarz;
c) die gezogene Kugel ist weiß oder schwarz.

4. Eine Urne enthält Kugeln mit den Nummern 3, 6, 9, 12, … , 93. Berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass bei der zufälligen Ziehung einer Kugel eine Zahl auf der Kugel steht, die:

a) kleiner als 50 ist;
b) eine Quadratzahl ist;
c) gerade ist;
d) ungerade ist.

5. Auf Kärtchen stehen folgende Zahlen: 5^{10}, 8^5, 16^3, 64, 4^6, 15, 125. Berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Auswahl eines Kärtchens eine Zahl darauf steht, die:
a) gerade;
b) ungerade;
c) eine Quadratzahl;
d) eine Kubikzahl ist.

6. In einem Korb befinden sich 10 Äpfel, 15 Birnen und 3 Orangen. Die Mutter gibt Mihai eine Frucht aus diesem Korb. Berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass:
a) die angebotene Frucht ein Apfel ist;
b) die angebotene Frucht eine Birne ist;
c) die angebotene Frucht eine Orange ist.

ABSCHLIEẞENDE BEWERTUNG

I. *Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.*

5 Pkte. **1.** Das Verhältnis der Längen 0,4 dm und 12 cm ist:

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{1}{3}$; **C.** $\frac{1}{2}$; **D.** $\frac{1}{4}$.

5 Pkte. **2.** Wenn $\frac{x}{y} = 5$ und $y = 2$, dann ist x gleich:

A. 2,5; **B.** 7; **C.** 10; **D.** 3.

5 Pkte. **3.** Die Zahl x in der Verhältnisgleichung $\frac{7}{3} = \frac{x}{6}$ ist:

A. 14; **B.** 12; **C.** 18; **D.** 21.

5 Pkte. **4.** Durch Berechnung von 4 % von 40 erhält man:

A. 16; **B.** 8; **C.** 0,8; **D.** 1,6.

5 Pkte. **5.** Sechs Füller kosten 162 Lei. Die Anzahl der Füller der gleichen Art, die man für 54 Lei kaufen kann, ist.

A. 1; **B.** 2; **C.** 3; **D.** 4.

5 Pkte. **6.** Die Entfernung zwischen zwei Städten beträgt 650 km. Auf einer Karte im Maßstab 1: 2 000 000 beträgt die Entfernung zwischen den Städten:

A. 130 cm; **B.** 65 cm; **C.** 32,5 cm; **D.** 37,5 cm.

II. *Schreibt die vollständigen Lösungen auf.*

10 Pkte. **1. a)** Die Menge von 240 kg Mehl wird in Teile geteilt, die jeweils direkt proportional zu den Zahlen 5, 9 und 10 sind. Bestimmt die kleinste der erhaltenen Mengen.

10 Pkte. **b)** In einer Urne befinden sich Kugeln mit den Nummern 1 bis 20. Berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass durch zufälliges Ziehen einer Kugel ein Teiler von 30 auf der Kugel steht.

2. Der ursprüngliche Preis eines Gegenstandes beträgt 700 Lei. Nach einem Preisanstieg kostet er 784 Lei.

10 Pkte. **a)** Findet heraus, um wie viel Prozent sich der Preis des Gegenstandes erhöht hat.

10 Pkte. **b)** Gebt an, ob eine Senkung des neuen Preises um 12 % den Preis höher oder niedriger macht als den ursprünglichen Preis.

3. Die Zahlen a und b sind umgekehrt proportional zu $\frac{1}{2}$ bzw $\frac{1}{4}$.

10 Pkte. **a)** Zeigt, dass $b = 2 \cdot a$

10 Pkte. **b)** Wenn bekannt ist, dass $n = a + 2 \cdot b$ und $m = 3 \cdot a + b$, berechnet den Wert des Verhältnisses $\frac{n}{n+m}$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 50 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

Spezifische Kompetenzen: 1.3; 2.3; 3.3; 4.3; 5.3; 6.3

3. DIE MENGE DER GANZEN ZAHLEN

3.1 Die Menge der ganzen Zahlen. Darstellung auf der Zahlenachse. Vergleichen und Ordnen

L1 Die Menge der ganzen Zahlen. Darstellung der ganzen Zahlen auf der Zahlenachse

Zur Erinnerung

In vielen konkreten Situationen ist die Bewegungsrichtung der Werte einiger physikalischer Größen von einer Bezugsgröße ausgehend nicht unbedingt positiv, sodass diese Werte nicht durch natürliche Zahlen ausgedrückt werden können. Dies hat zur Entstehung von Zahlen geführt, die als *negative Zahlen* bezeichnet werden.

Interdisziplinäre Überlegungen

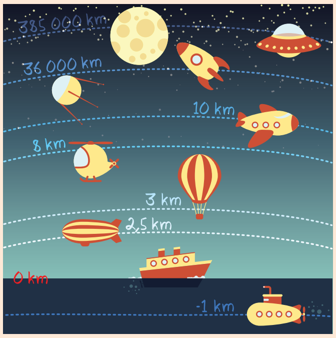
Die Temperatur ist eine physikalische Größe, die gemessen werden kann, indem man jedem Erwärmungszustand eines Körpers einen numerischen Wert zuordnet.
Die Umgebungstemperatur oder die Temperatur in einem bestimmten Umfeld zu kennen und zu regulieren, ist sehr wichtig für den Komfort oder für die Schaffung von Bedingungen, die für die ausgeübte Tätigkeit förderlich sind.

Ein *Thermometer* ist ein Gerät, mit dem wir die Lufttemperatur, die Wassertemperatur, die Körpertemperatur und die Temperatur anderer Medien messen können.
Die Maßeinheit, die wir normalerweise verwenden, ist Grad Celsius (°C).
Das Vorratsgefäß des Thermometers kann Quecksilber, Alkohol, Stickstoff oder Wasserstoff enthalten, die alle die Eigenschaft haben, ihr Volumen in direktem Verhältnis zur Temperatur zu verändern.

Der Wert 0 °C gibt den *Gefrierpunkt* des Wassers an, d. h. den Wert, bei dem die Quecksilbersäule endet, wenn das Wasser gefriert.
Der Wert 100 °C gibt den *Siedepunkt* des Wassers an, d. h. den Wert, den die Quecksilbersäule anzeigt, wenn reines Wasser kocht. Dieser Wert ist nur auf Thermometern zu finden, die in speziellen Labors verwendet werden.
Wenn die Quecksilbersäule unter 0 fällt, zeigt das Thermometer negative *Temperaturen* an: –1, –2, –3, … (minus 1, minus 2, minus 3, ...). Je tiefer die Quecksilbersäule sinkt, desto niedriger ist die Temperatur.

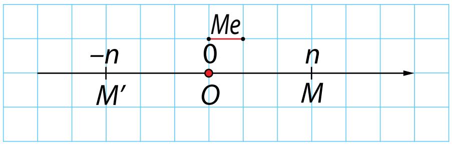
Wusstet ihr, dass …?

Wetter- und Kommunikationssatelliten befinden sich in geostationären Umlaufbahnen in einer Höhe von etwa 36000 km.
Es gibt Mini-U-Boote für den Tourismus, die bis zu einer Tiefe von 200 Metern abtauchen.
In den Meeren und Ozeanen gibt es Leben bis zu einer Tiefe von 2000 Metern.
Die geografische Höhe ist die Höhe eines Punktes auf der Erdoberfläche im Verhältnis zu einer Bezugsebene, in der Regel dem *Meeresspiegel*, der dem Wert 0 entspricht.
Der höchste Punkt auf rumänischem Gebiet ist der Moldoveanu-Gipfel (2544 m).
Der am niedrigsten gelegene Punkt der Erdoberfläche befindet sich im Pazifischen Ozean, im Marianengraben (–11022 m).



Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Betrachten wir die Zahlenachse mit dem Ursprung $O(0)$ und der Maßeinheit *Me*, auf der wir die positive Richtung von links nach rechts festgelegt haben.



Jede von null verschiedene natürliche Zahl n wird auf der Achse durch den Punkt $M(n)$ dargestellt, der genau n Einheiten vom Ursprung entfernt ist und sich rechts vom Ursprung befindet.
Die natürliche Zahl n wird mit $+n$ bezeichnet und heißt *positive ganze Zahl*.
Der Punkt M', der symmetrisch zum Punkt $M(n)$ in Bezug auf O liegt, ist genau n Einheiten vom Ursprung entfernt, aber links davon. Die Zahl, die dem Punkt M' entspricht, wird mit $-n$ bezeichnet und heißt *entgegengesetzte Zahl der Zahl n*. Die Zahl $-n$ ist eine negative ganze Zahl. Wir sagen, dass M' die Koordinate $-n$ hat, und schreiben $M'(-n)$.

Auf diese Weise wird die Menge der von null verschiedenen natürlichen Zahlen mit der Menge der positiven ganzen Zahlen identifiziert, die mit $\mathbb{Z}_+$ bezeichnet wird, und die Menge der entgegengesetzten Zahlen aller von null verschiedenen natürlichen Zahlen wird mit der *Menge der negativen ganzen Zahlen* identifiziert und mit $\mathbb{Z}_-$ bezeichnet.

Daher gilt: $\mathbb{Z}_+ = \{+1, +2, +3, \ldots, +n, +(n+1), \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots, n, (n+1), \ldots\} = \mathbb{N}^*$.
$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -(n+1), -n, \ldots, -3, -2, -1\}$.

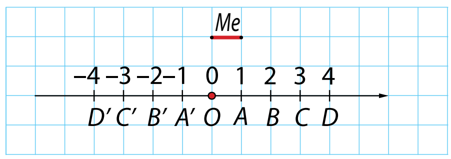
Die Menge aller *positiven ganzen Zahlen*, aller *negativen ganzen Zahlen* und der *Zahl* 0 heißt *Menge der ganzen Zahlen* und wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Folglich gilt:
$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- \cup \{0\} = \{\ldots, -(n+1), -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, (n+1), \ldots\}$

Bemerkung: Die Zahl 0 ist weder positiv noch negativ. Wir berücksichtigen: $+0 = -0 = 0$. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_+$.

In der Praxis werden positive Zahlen oft ohne Vorzeichen verwendet, d. h., + 1 wird als 1, + 2 als 2 usw. geschrieben. Wenn wir über eine ganze Zahl a sprechen, kann sie positiv sein, dann schreiben wir $a > 0$; sie kann negativ sein, dann schreiben wir $a < 0$; oder sie kann gleich 0 sein, dann schreiben wir $a = 0$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Beispiele
In der nebenstehenden Abbildung sind mehrere ganze Zahlen auf der Zahlenachse dargestellt.



Zwei Punkte auf der Achse, symmetrisch zu ihrem Ursprung, haben entgegengesetzte ganzzahlige Koordinaten.	Punkte, die symmetrisch zum Ursprung liegen: $A(1)$ und $A'(-1)$; $B(2)$ und $B'(-2)$; $C(3)$ und $C'(-3)$; $D(4)$ und $D'(-4)$.	Entgegengesetzte ganze Zahlen: 1 und –1; 2 und –2; 3 und –3; 4 und –4.
Wenn a eine von null verschiedene ganze Zahl ist, sind die ganzen Zahlen a und $-a$ einander entgegengesetzt. Die Zahl a ist die entgegengesetze Zahl der Zahl $-a$, und die Zahl $-a$ ist die entgegengesetzte Zahl der Zahl a.	–1 ist die entgegengesetzte Zahl von 1, und 1 ist die entgegengesetzte Zahl von –1; –2 ist die entgegengesetzte Zahl von 2, und 2 ist die entgegengesetzte Zahl von –2; –3 ist die entgegengesetzte Zahl von 3, und 3 ist die entgegengesetzte Zahl von –3; –4 ist die entgegengesetzte Zahl von 4, und 4 ist die entgegengesetzte Zahl von –4.	

Bemerkung: Die entgegengesetzte Zahl der ganzen Zahl 0 ist 0 selbst.
Die entgegengesetzte Zahl der ganzen Zahl a wird als $-a$ bezeichnet.
Wenn a positiv ist, dann ist $-a$ negativ, und wenn a negativ ist, dann ist $-a$ eine positive Zahl.

Übungen und Aufgaben

1. Tragt den Buchstaben ***W*** ein, wenn der Satz wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn der Satz falsch ist.

Satz	***W/F***
$-13 \in \mathbb{Z}$	
$7 \in \mathbb{Z}$	
$-6 \notin \mathbb{N}$	
$-24 \in \mathbb{Z}_-$	

Satz	***W/F***
$2{,}75 \in \mathbb{Z}$	
$\{-4; 0; 11\} \subset \mathbb{Z}$	
$\{-3; 1; +3\} \subset \mathbb{N}$	
$33 \notin \mathbb{Z}_+$	

2. Es sei die Menge
$$M = \left\{2; -4; \frac{3}{2}; 0; -25; +25; 6{,}(2); \frac{12}{4}\right\}.$$

a) Schreibt die Menge, die aus den negativen ganzen Zahlen der Menge M besteht.

b) Schreibt die Menge, die aus den positiven ganzen Zahlen der Menge M besteht.

c) Bestimmt die Menge $M \cap \mathbb{Z}$.

3. Füllt die leeren Felder in der folgenden Tabelle mit den entsprechenden ganzen Zahlen aus.

Die Zahl	5	–2		0	55			z	
Die entgegengesetzte Zahl			7			–10	+17		a

4. a) Stellt folgende Zahlen auf der Zahlenachse dar: –3; 1; 0; 4; –5; 3.
b) Wählt eine geeignete Maßeinheit und stellt auf der Zahlenachse dar: –10; +20; 0; +30; –20; –50.
c) Wählt eine geeignete Maßeinheit und stellt auf der Zahlenachse dar: –100; –200; +200; 0; +300; –400.

5. Es sei die Menge $A = \left\{-1; 1\frac{2}{3}; 0; +2; -3^2; 4,(7); \frac{39}{13}\right\}$.
Bestimmt die Mengen: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Z}_-$, $A \setminus \mathbb{Z}$.

6. a) Bestimmt die Anzahl der Punkte auf der Zahlenachse in einem Abstand von 4 Einheiten vom Ursprung der Achse. Schreibt die Abszissen dieser Punkte auf und tragt sie auf der Zahlenachse ein, indem ihr den Zentimeter als Maßeinheit verwendet.
b) Sei n eine natürliche Zahl. Bestimmt die Anzahl der Punkte auf der Zahlenachse im Abstand von n Einheiten vom Ursprung der Achse. Gebt die Koordinaten dieser Punkte an.

Minitest

1. Übertragt die Sätze in die Hefte und füllt die Lücken aus, um richtige Sätze zu erhalten.

10 Pkte. a) Die entgegengesetzte Zahl von –7 ist … .

10 Pkte. b) Der Abstand zwischen dem Ursprung der Zahlenachse und dem Darstellungspunkt der Zahl -2^3 ist … .

2.

40 Pkte. a) Stellt auf der Zahlenachse die Punkte A, B, C, D, O mit den Koordinaten: +3, –4, +2, –1, 0 dar.

30 Pkte. b) Füllt das freie Kästchen mit dem Buchstaben ***W*** aus, wenn der Satz wahr ist, und mit dem Buchstaben ***F***, wenn der Satz falsch ist.

Satz	***W/F***
S_1: Der Punkt C liegt auf der Strecke AD.	
S_2: Der Punkt B befindet sich auf der Halbgeraden CO.	
S_3: Die Strecken BD und AC haben keine gemeinsamen Punkte.	

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Der Betrag einer ganzen Zahl. Vergleichen und Ordnen ganzer Zahlen

Zur Erinnerung

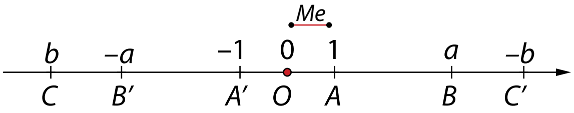
Für jede von null verschiedene natürliche Zahl n gibt es genau zwei Punkte auf der Zahlenachse im Abstand n vom Ursprung (symmetrisch zum Ursprung): den Punkt $A(-n)$ und den Punkt $B(n)$.
Jede positive ganze Zahl a wird auf der Zahlenachse rechts vom Ursprung dargestellt. Wir schreiben $a > 0$.
Jede negative ganze Zahl a wird auf der Zahlenachse links vom Ursprung dargestellt. Wir schreiben $a < 0$.
Die ganze Zahl 0 wird auf der Zahlenachse im Ursprung dargestellt.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Der *Betrag* der ganzen Zahl a oder ihr *absoluter Wert* ist der *Abstand* zwischen dem Ursprung der Zahlenachse und dem Punkt der Darstellung der Zahl a auf der Achse.

Der Betrag der ganzen Zahl a wird mit $|a|$ bezeichnet.

Auf der Zahlenachse stellen wir folgende Punkte dar: $O(0)$, $A(1)$, $A'(-1)$, $B(a)$, $B'(-a)$, wobei a eine positive ganze Zahl ist, und $C(b)$, $C'(-b)$, wo b eine negative ganze Zahl ist.



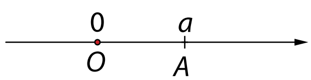
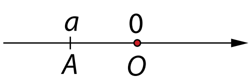
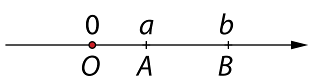
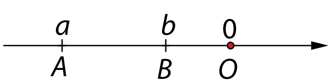
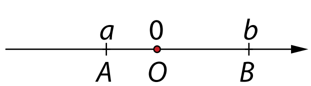
Dann: $|0| = 0$ (der Abstand von O zu sich selbst ist 0).
Da $OA' = OA = 1$, folgt $|-1| = |1| = OA = 1$;
Da $OB' = OB = a$, folgt $|-a| = |a| = OB = a$;
Da $OC = OC' = -b$, folgt $|-b| = |b| = OC' = -b$.

Bemerkungen
1. Die ganzen Zahlen a und $-a$ haben den gleichen Betrag, weil sie auf der Zahlenachse gleich weit vom Ursprung dargestellt werden.
2. Jede Entfernung wird durch eine positive Zahl ausgedrückt oder ist gleich 0. Folglich ist der Betrag jeder ganzen Zahl eine positive Zahl oder ist gleich 0.

Schlussfolgerungen
1. $|x| > 0$, unabhängig von $x \in \mathbb{Z}^*$, und $|x| = 0$, wenn und nur wenn $x = 0$.
2. $|x| = x$, wenn und nur wenn $x \geq 0$, und $|x| = -x$, wenn und nur wenn $x \leq 0$.
3. $|-x| = |x|$, unabhängig von $x \in \mathbb{Z}$.
Für zwei beliebige ganze Zahlen a und b gibt es nur eine der Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $a > b$.
Der Vergleich der ganzen Zahlen a und b besteht darin festzustellen, welche der drei oben genannten Beziehungen vorliegt.

Wenn $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ und wenn die Darstellung auf der Achse der Zahl a der Punkt A und die Darstellung der Zahl b der Punkt B ist, dann:
$a < b$, wenn und nur wenn der Punkt $A(a)$ links vom Punkt $B(b)$ liegt.
$a = b$, wenn und nur wenn die Punkte $A(a)$ und $B(b)$ zusammenfallen.
$a > b$, wenn und nur wenn der Punkt $A(a)$ rechts vom Punkt $B(b)$ liegt.

Für die von null verschiedenen Zahlen a und b, wobei $a < b$, sind folgende Situationen möglich:

Darstellung auf der Achse	*Beschreibung*	*Schlussfolgerung*
	$O(0)$ befindet sich links von $A(a)$, also 0 kleiner als a. Wir schreiben $0 < a$ oder $a > 0$.	$a \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z}$ und $a > 0$. $1; 2; 3; 10; 11 \in \mathbb{Z}_+$ $1 > 0; 2 > 0; 3 > 0; 10 > 0; 11 > 0$.
	$A(a)$ liegt links von $O(0)$, also ist a kleiner als 0. Wir schreiben $a < 0$, also $0 > a$.	$a \in \mathbb{Z}_- \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z}$ und $a < 0$. $-1; -2; -3; -10 \in \mathbb{Z}_-$ $-1 < 0; -2 < 0; -3 < 0; -10 < 0$.
	$a > 0, b > 0$. $OA < OB$, also $|a| < |b|$. $A(a)$ liegt links von $B(b)$, also $a < b$.	Wenn $a \in \mathbb{Z}_+$ und $b \in \mathbb{Z}_+$, dann: $a < b$, wenn und nur wenn $|a| < |b|$. $30 \in \mathbb{Z}_+$ und $47 \in \mathbb{Z}_+$ $30 < 47$ und $|30| < |47|$.
	$a < 0, b < 0$. $OA > OB$, also $|a| > |b|$. $A(a)$ ist links von $B(b)$, also $a < b$.	Wenn $a \in \mathbb{Z}_-$ und $b \in \mathbb{Z}_-$, dann: $a < b$, wenn und nur wenn $|a| > |b|$. $-30 \in \mathbb{Z}_-$ und $-47 \in \mathbb{Z}_-$ $-47 < -30$ und $|-47| > |-30|$.
	$a < 0, b > 0$. $A(a)$ ist links von $B(b)$, also $a < b$.	Wenn $a \in \mathbb{Z}_-$ und $b \in \mathbb{Z}_+$, dann $a < b$. Jede negative Zahl ist kleiner als jede positive Zahl. $-30 \in \mathbb{Z}_-$ und $47 \in \mathbb{Z}_+$ und $-30 < 47$ $-47 \in \mathbb{Z}_-$ und $30 \in \mathbb{Z}_+$ und $-47 < 30$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Zum Vergleichen und Ordnen ganzer Zahlen wird häufig eine der Beziehungen „<“ oder „>“ verwendet.
Für $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ ist $a \leq b$, wenn und nur wenn $a < b$ oder $a = b$.
Eigenschaften:

Eigenschaft	$a \leq a$ für jede ganze Zahl a.	Wenn $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq b$ und $b \leq a$, dann $a = b$.	Wenn $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq b$ und $b \leq c$, dann $a \leq c$.
Beispiele	$0 \leq 0$; $-1 \leq -1$; $2 \leq 2$;…	$3 \leq x$ und $x \leq 3$, folgt $x = 3$.	$-2 \leq 5$ und $5 \leq p$, $p \in \mathbb{Z}$, folgt $-2 \leq p$.

Bemerkung: Die Beziehungen „<“ und „>“ sind transitiv: Wenn $a < b$ und $b < c$ ist, dann ist $a < c$.
Wenn $a > b$ und $b > c$ ist, dann ist $a > c$.
Die Beziehungen $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ helfen uns, zwei oder mehr ganze Zahlen in steigender oder fallender Reihenfolge zu ordnen.

Zwei oder mehr ganze Zahlen *in steigender Reihenfolge zu ordnen*, bedeutet, sie so anzuordnen, dass jede kleiner oder gleich der nachfolgenden Zahl ist.	Die steigende Reihenfolge der ganzen Zahlen −32, 0, 20, −21, 5 ist: −32, −21, 0, 5, 20, weil $-32 \leq -21 \leq 0 \leq 5 \leq 20$.
Zwei oder mehr ganze Zahlen *in fallender Reihenfolge zu ordnen*, bedeutet, sie so anzuordnen, dass jede größer oder gleich der nachfolgenden ist.	Die fallende Reihenfolge der ganzen Zahlen −32, 0, 20, −21, 5 ist: 20, 5, 0, −21, −32, weil $20 \geq 5 \geq 0 \geq -21 \geq -32$.

Zur Erinnerung

Jede *positive* ganze Zahl *ist größer* als jede negative ganze Zahl und größer als 0.
Jede *negative* ganze Zahl *ist kleiner* als jede positive ganze Zahl und kleiner als 0.
Von zwei positiven ganzen Zahlen ist diejenige mit dem größeren Betrag größer.
Von zwei negativen ganzen Zahlen ist diejenige mit dem kleineren Betrag größer.

Übungen und Aufgaben

1. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und füllt die leeren Felder mit den entsprechenden ganzen Zahlen aus.

a	5	−2	8	0	55	−10
$\lvert a \rvert$						

2. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und füllt die leeren Felder mit den entsprechenden ganzen Zahlen aus.

$\lvert a \rvert$	5		2		8		0		55		10	
a												

3. Bestimmt die ganze Zahl k in jeder der Situationen:
a) $-k = -5$; **d)** $\lvert k \rvert = 77$ und $k \in \mathbb{Z}_+$;
b) $-k = +19$; **e)** $\lvert k \rvert = 0$;
c) $\lvert k \rvert = 10$ und $k \in \mathbb{Z}_-$; **f)** $\lvert k - 2 \rvert = 0$.

4. Es sei die Menge $M = \{-7; 4; -2; 0; -4; 100; 2; -9\}$. Schreibt die Teilmengen A, B, C der Menge M, wenn ihr wisst, dass:
a) alle Elemente der Menge A einen absoluten Wert haben, der höchstens gleich 3 ist;
b) $\lvert x \rvert = x$ für jedes x, das ein Element von B ist;
c) $\lvert x \rvert = -x$ für jedes x, das ein Element von C ist.

5. Schreibt folgende Zahlenpaare in eure Hefte und unterstreicht in jedem Paar die kleinere Zahl:
a) −7 und 4; **c)** 6 und −16;
b) −3, und −1; **d)** 0 und −10.

6. Schreibt folgende Zahlenpaare in eure Hefte und unterstreicht in jedem Paar die größere Zahl:
a) −4 und −6; **c)** −72 und 70;
b) 304 und −403; **d)** −410 und 0.

7. Schreibt:
a) drei ganze Zahlen, die kleiner sind als −7;
b) vier ganze Zahlen, die größer sind als −2;
c) fünf ganze Zahlen zwischen −14 und −4.

8. Füllt die Lücken mit ganzen Zahlen aus, sodass ihr wahre Sätze erhaltet:

a) $-6 < \ldots$;
b) $\ldots > -1$;
c) $-10 \leq \ldots$;
d) $\ldots \geq 3$;
e) $\ldots \leq 0$;
f) $-10 \geq \ldots$;
g) $-8 > \ldots$;
h $-40 < \ldots$.

9. Füllt die Lücken mit einem der Symbole <, =, > aus, um wahre Sätze zu erhalten:

a) $-3 \ldots\ -9$;
b) $-23 \ldots -17$;
c) $-8 \ldots\ -2^3$;
d) $-40 \ldots\ 3$;
e) $7 \ldots\ -7$;
f) $109 \ldots\ 111$;
g) $0 \ldots -2023$;
h) Wenn $x \in \mathbb{Z}_-$, dann $x \ldots 2$.

10. Stellt auf der Zahlenachse dar:

a) vier aufeinanderfolgende ganze Zahlen, wobei die kleinste -10 ist;

b) fünf aufeinanderfolgende ganze Zahlen, von denen die größte 1 ist;

c) sechs aufeinanderfolgende ganze Zahlen, von denen zwei positiv sind.

11. Sei die Menge
$A = \{-12; 6; -10; 0; -3; 11; -2; 33; -9; 3\}$.

a) Bestimmt die Werte der Zahl x, wobei bekannt ist, dass $x \in A$ und $x < -4$.

b) Bestimmt die Werte der Zahl y, wobei bekannt ist, dass $y \in A$ und $y > -1$.

c) Bestimmt die Werte der Zahl z, wobei bekannt ist, dass $z \in A$ und $-3 \leq z \leq 4$.

12. **a)** Ordnet die Zahlen in steigender Reihenfolge: $-5; 7; -11; 0; -6; 11; -4; 13; -8; 1$.

b) Ordnet die Zahlen in fallender Reihenfolge: $4; -1; -21; 8; -7; |37|; -23; 103; -18; 2$.

13. Bestimmt die Paare von ganzen Zahlen (x, y), wenn man weiß, dass die Zahlen $-15; -13; x; -11; y; -7$ in steigender Reihenfolge angeordnet sind.

14. In der folgenden Tabelle sind die Mindest- und Höchsttemperaturen aufgeführt, die an einem Tag in mehreren europäischen Hauptstädten gemessen wurden.

Stadt	Mindest-temperatur	Höchst-temperatur
Athen	3 °C	10 °C
Bukarest	0 °C	8 °C
Kopenhagen	−2 °C	5 °C
Helsinki	−7 °C	−1 °C
London	−3 °C	+1 °C
Madrid	4 °C	11 °C
Paris	1 °C	6 °C

Gebt die Stadt an, in der:

a) die höchste Temperatur gemessen wurde;

b) die niedrigste Temperatur gemessen wurde;

c) nur negative Temperaturen aufgezeichnet wurden;

d) nur positive Temperaturen aufgezeichnet wurden.

Minitest

1. Übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken aus, um wahre Sätze zu erhalten.

10 Pkte. **a)** Von den Zahlen -15 und 14 ist die Zahl … die größere.

10 Pkte. **b)** Von den Zahlen 0 und -7 ist die Zahl … die größere.

15 Pkte. **c)** Die steigende Reihenfolge der Zahlen $5, -9, 13, -10, -3, 0, -15$ ist: … .

10 Pkte. **d)** Die kleinste ganze Zahl x, für die $|x| \leq 3$, ist … .

2. Bestimmt:

15 Pkte. **a)** die ganze Zahl a, für die $|a| = 6$ und $a > 3$;

15 Pkte. **b)** die ganzen Zahlen b und c, für die $|b| = 5$, $|c| = 4$ und $b < c$;

15 Pkte. **c)** die Ziffer x, für die $-\overline{2x7} < -\overline{27x}$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

3.2 Operationen mit ganzen Zahlen

L1 Addition und Subtraktion ganzer Zahlen. Eigenschaften

Ausgehend von der Addition der natürlichen Zahlen und der Darstellung der ganzen Zahlen auf der Zahlenachse definieren wir die *Addition der ganzen Zahlen*.

Wir lösen und beobachten

***Aufgabe* 1.** Radu verbringt einen Teil seiner Ferien in den Bergen bei seinen Großeltern. Es ist sehr schön, egal zu welcher Jahreszeit. Radu beobachtet die Temperatur, die das Thermometer morgens und abends anzeigt, und macht sich einige Notizen. Berechnet aufgrund von Radus Beobachtungen die Temperatur, die an jedem der Abende von Montag bis Freitag gemessen wird.

Beobachtungen zur Temperaturentwicklung

1. Am Montagmorgen zeigt das Thermometer 3 °C an. Montagabend ist es um 2 °C wärmer.
2. Dienstagmorgen zeigt das Thermometer –3 °C an. Dienstagabend ist es kälter, das Thermometer zeigt um 2 °C weniger an.
3. Am Mittwochmorgen zeigt das Thermometer –6 °C an, aber bis zum Abend steigt die Temperatur um 7 °C.
4. Donnerstagmorgen zeigt das Thermometer 4 °C an. Bis zum Abend sinkt die Temperatur um 4 °C.
5. Wenn man zur Temperatur von Mittwochabend –12 °C addiert, erhält man die Temperatur von Freitagabend.

Lösung

1. Intuitiv erhält man +5 °C, wenn man zu +3 °C noch +2 °C hinzufügt. Wir schreiben: **+3 + (+2) = +5** oder 3 + 2 = 5.
2. Intuitiv erhält man –5 °C, wenn man zu –3 °C noch –2 °C addiert. Wir schreiben: **–3 + (–2) = –5**.
3. Intuitiv ergibt die Addition von +7 °C zu –6 °C das Ergebnis +1 °C. Wir schreiben: –6 + (+7) = +1.
4. Wenn die Temperatur um 4 °C gesunken ist, dann wird sie 0 °C. Wir schreiben: **+4 + (–4) = 0** oder +4 – (+4) = 0.
5. Wenn wir –12 °C zu 1 °C addieren, erhalten wir –11 °C. Wir schreiben: **+1 + (–12) = –11**.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

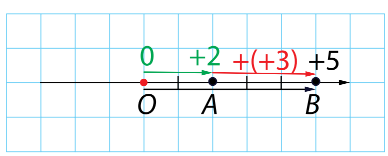
Für zwei beliebige ganze Zahlen a und b definieren wir die einzige ganze Zahl, die als $a + b$ bezeichnet wird und die Summe der Zahlen a und b ist.

Die Operation, durch die jedes Zahlenpaar a und b mit ihrer Summe verbunden wird, wird als Addition bezeichnet, und die Zahlen a und b werden als Glieder der Addition bezeichnet.

Wenn $a \geq 0$ und $b \geq 0$, dann $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ und wir wenden die Eigenschaften an, die wir aus den vorherigen Klassen kennen.
Um die Technik, mit der die Addition ganzer Zahlen durchgeführt wird, leicht zu verstehen, stellen wir uns eine *Wanderung* auf der Zahlenachse in positiver Richtung vor, wenn wir eine positive Zahl addieren, und in negativer Richtung, wenn wir eine negative Zahl addieren.

1. Jedes positive Glied einer Summe bedeutet, dass man sich auf der Zahlenachse nach rechts (in positiver Richtung) bewegt, und zwar um so viele Einheiten, wie der Betrag der Zahl angibt.

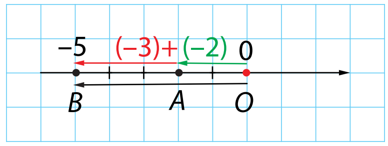
Um (+2) + (+3) zu berechnen, gehen wir vom Ursprung der Achse aus und bewegen uns zunächst 2 Einheiten nach rechts, dann, von dem Punkt aus, an dem wir angekommen sind, weitere 3 Einheiten nach rechts. Insgesamt bewegen wir uns also 5 Einheiten nach rechts.



$+2 + (+3) = +5$;
$|+2| + |+3| = +2 + 3 = +5$
$\mathbf{+2 + (+3) = |+2| + |+3|}$

2. Jedes negative Glied einer Summe bedeutet, dass man sich auf der Zahlenachse um so viele Einheiten nach links (in negativer Richtung) bewegt, wie der Betrag der Zahl angibt.

Um $(-2) + (-3)$ zu berechnen, bewegen wir uns vom Ursprung der Achse nach links, zunächst um 2 Einheiten, dann von dem Punkt aus, an dem wir angekommen sind, um weitere 3 Einheiten. Insgesamt bewegen wir uns also um 5 Einheiten nach links.

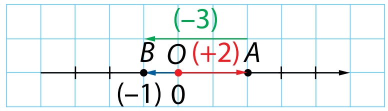


$(-2) + (-3) = -5;$
$|-2| + |-3| = 2 + 3 = 5$
$\mathbf{(-2) + (-3) = -(|-2| + |-3|)}$

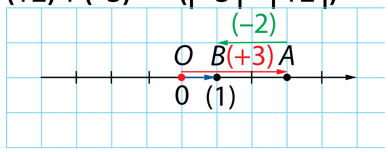
3. Wenn die Summe sowohl positive als auch negative Glieder enthält, kann die Summe eine positive oder eine negative Zahl sein, je nachdem, in welche Richtung wir mehr Einheiten verschieben, d. h., welche Zahl den größeren Betrag hat.

Um $+2 + (-3)$ zu berechnen, bewegt man sich vom Ursprung der Achse aus 2 Einheiten nach rechts, um den Punkt zu erreichen, der der Zahl +2 entspricht. Von diesem Punkt aus bewegt man sich 3 Einheiten nach links und erreicht den Punkt, der der ganzen Zahl −1 entspricht.

Das Vorzeichen der Summe ist das gleiche wie das Vorzeichen des Gliedes mit dem größeren Betrag.

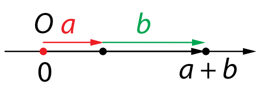
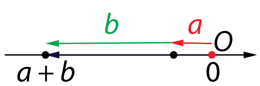
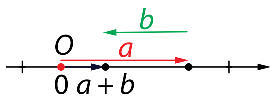
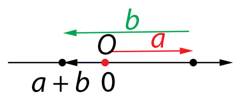


$(+2) + (-3) = -1; |-3| > |+2|$
$|-3| - |+2| = 3 - 2 = 1$
$\mathbf{(+2) + (-3) = -(|-3| - |+2|)}$



$(+3) + (-2) = +1; |+3| > |-2|$
$|+3| - |-2| = 3 - 2 = 1$
$\mathbf{(+3) + (-2) = |+3| - |-2|.}$

Zusammenfassung

Fall	$a \geq 0$ und $b \geq 0$	$a \leq 0$ und $b \leq 0$	$a > 0, b < 0$ und $|a| > |b|$	$a > 0$ und $b < 0$ und $|a| < |b|$
Berechnungsweise	$a + b \geq 0$ und $a + b = |a| + |b|$	$a + b \leq 0$ und $a + b = -(|a| + |b|)$	$a + b > 0$ und $a + b = |a| - |b|$	$a + b < 0$ und $a + b = -(|b| - |a|)$.
Geometrische Interpretation				

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Bei der Addition ganzer Zahlen werden die *Eigenschaften der Addition* natürlicher Zahlen beibehalten.

Die Addition ist *assoziativ*: $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle ganzen Zahlen a, b, c.	$[(+1) + (-2)] + (+3) = (-1) + (+3) = +2;$ $(+1) + [(-2) + (+3)] = (+1) + (+1) = +2$, also $(+1) + [(-2) + (+3)] = [(+1) + (-2)] + (+3)$.
Die Addition ist *kommutativ*: $a + b = b + a$ für alle ganzen Zahlen a und b.	$(-5) + (-1) = -6$ und $(-1) + (-5) = -6$, also $(-5) + (-1) = (-1) + (-5)$.
Die Zahl 0 ist das *neutrale Element* der Addition. $a + 0 = 0 + a = a$ für jede ganze Zahl a.	$(+7) + 0 = 0 + (+7) = +7.$ $(-9) + 0 = 0 + (-9) = -9.$
Außerdem gibt es für jede ganze Zahl a die ganze Zahl $-a$ (die entgegengesetzte Zahl), sodass $a + (-a) = (-a) + a = 0$.	$(+7) + (-7) = (-7) + (+7) = 0.$

Wir wissen aus den vergangenen Schuljahren, dass, wenn a und b natürliche Zahlen sind, $a \geq b$, dann ist ihre Differenz $a - b$ eine natürliche Zahl.

In der Menge $\mathbb{Z}$ definieren wir die Differenz $a - b$ von zwei beliebigen ganzen Zahlen als ganze Zahl.

Für zwei beliebige ganze Zahlen a und b ist die Differenz $a - b$ die Summe der Zahl a und der entgegengesetzten Zahl von b.

In mathematischer Sprache: $a - b = a + (-b)$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

$+3 - (+7) = +3 + (-7) = -4$;
$-3 - (+7) = -3 + (-7) = -10$;
$+3 - (-7) = +3 + (+7) = +10$;
$-3 - (-7) = -3 + (+7) = +4$.

Übungen und Aufgaben

1. Übertragt die Tabellen in eure Hefte und füllt die entsprechenden Felder mit ganzen Zahlen aus.

a)	x	+3	–4	–5	+12	–10	+27	–35
	$x + (+5)$							
b)	y	–1	–12	+5	+9	– 10	+36	–41
	$y + (-9)$							

2. Führt die Additionen durch:
a) $-2 + (-8)$;
b) $-16 + (-9)$;
c) $42 + (+18)$;
d) $(-1) + (-2) + (-3)$;
e) $-31 + (+13)$;
f) $26 + (-19)$;
g) $-100 + (+200)$;
h) $-50 + (+25) + (-45)$.

3. Wählt die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort stimmt.
a) Das Ergebnis der Rechnung $(-35) + (-65)$ ist:
A. 100; **B.** –100; **C.** –30; **D.** 30.
b) Die Summe der Zahlen –97 und 86 ist:
A. 183; **B.** –183; **C.** 11; **D.** –11.
c) Die Summe der kleinsten zweistelligen ganzen Zahl und der Zahl 100 ist:
A. 1; **B.** –1; **C.** –109; **D.** –199.
d) Wenn man alle ganzen Zahlen addiert, deren Betrag höchstens gleich 3 ist, erhält man:
A. 6; **B.** 0; **C.** –6; **D.** –12.

4. Schreibt:
a) die Zahl –10 als Summe zweier negativer ganzer Zahlen;
b) die Zahl –20 als Summe zweier ganzer Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen;
c) die Zahl 0 als Summe zweier ganzer Zahlen.

5. Ordnet jedem Buchstaben, der eine Summe angibt, in Spalte A die Zahl zu, die der richtigen Antwort in Spalte B entspricht.

A	B
	1. 58
a. $-20 + (+74)$	**2.** –55
b. $+39 + (-93)$	**3.** –54
c. $-22 + (-33)$	**4.** 55
d. $+19 + (+36)$	**5.** +54
e. $-12 + (-34) + (+104)$	**6.** –59
	7. +59

6. Berechnet die Zahlen a, b und $a + b$, wenn bekannt ist, dass $a = -1 + (-11) + (-111)$ und $b = -102 + (+203) + (-302) + (+201)$.

7. Berechnet, unter Verwendung der Eigenschaften der Addition:
a) $-44 + (-38) + (38)$;
b) $(-3) + (-25) + (-17) + (-75)$;
c) $1 + (-2) + (+99) + (-88)$;
d) $(-103) + (+205) + (-2023) + (-205) + (+103)$.

8. Schreibt folgende Zahlen in steigender Reihenfolge:
$n = |-35| + (-72) + |41 - 19|$,
$m = |-100 + (+67)| + (-68) + |1 + (-19)|$,
$p = (-5) + (-4) + (-3) + \ldots + (+2) + (+3)$.

9. Führt die Additionen durch und gebt an, ob die Zahl $S = (-1) + (+2) + (-3) + (+4) + \ldots + (-19) + (+20) + + (-21)$ positiv, negativ oder null ist.

10. Übertragt die Tabellen in eure Hefte und füllt die entsprechenden Felder mit ganzen Zahlen aus.

a)	x	+4	–3	–12	+20	–32	+41	–92
	$x - (+8)$							
b)	y	–7	–4	+7	+19	–38	+46	–94
	$y - (-6)$							

11. Führt die Subtraktionen durch:
a) $-7 - (-3)$;
b) $-14 - (-4)$;
c) $+32 - (+15)$;
d) $-71 - (-71)$;
e) $0 - (+13)$;
f) $0 - (-29)$;
g) $-300 - (+300)$;
h) $-25 - (+50) - (-75)$.

12. Wählt die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort stimmt.
a) Das Ergebnis der Rechnung $(-15) - (-45)$ beträgt:
A. 100; **B.** –100; **C.** –30; **D.** 30.
b) Die Differenz zwischen der Zahl –79 und 44 beträgt:
A. 123; **B.** –123; **C.** 35; **D.** –35.
c) Subtrahiert man von der größten zweistelligen ganzen Zahl die Zahl 1000, so erhält man:
A. 901; **B.** –901; **C.** –1010; **D.** 1010.

13. Berechnet:

a) $41-(-27)-(-18)$;
b) $-7-(-77)-(-777)$;
c) $+22-(35)-(-48)$;
d) $-10-(-20)-(-30)+(-40)$;
e) $1-(-102)-[-20+(+78)]$;
f) $-1-(-11)-(-111)$.

14. Füllt die Lücken mit ganzen Zahlen aus, sodass ihr Gleichheiten erhaltet.

a) $-10-\ldots=-20$; **c)** $\ldots-(-20)=-8$;
b) $+25-\ldots=-2$; **d)** $-203-\ldots=-203$.

15. Wenn $|b-c|=404$, berechnet $20^2-(b-c)$.

16. **a)** Wenn $x=-13-(-35)-(+57)-(-79)$ und $y=-24+(-46)-(-68)+(-80)$, berechnet $x-y$.

b) Wenn $z=-11-(-33)-(+55)$ und $t=-77+(-999)$, berechnet $-13579-z-t$.

17. Berechnet:

a) $64+(-45)-(-27)$; **d)** $52-[47-(-85)]$;
b) $-38-(+63)-(-100)$; **e)** $-1-[-2-(-3)+(-4)]$;
c) $-50-(+43)+(-72)$; **f)** $7-\{-8+[-9-(+10)]\}$.

Minitest

8 × 5 Pkte. **1.** Führt durch:

a) $(-33)+(+22)$;
b) $(+57)+(-100)+(+23)$;
c) $|-64|+|+46|+(-101)$;
d) $17+(-71)+(+39)$;
e) $(-5)-(-3)$;
f) $18-(-12)$;
g) $|-37|-|-29|-(+13)$;
h) $-17-(-27)-(+37)$.

2. Berechnet:

15 Pkte. **a)** die Summe der ganzen Zahlen, die einen Betrag von höchstens +2 haben.

15 Pkte. **b)** die Summe der größten negativen ganzen Zahl mit zwei verschiedenen Ziffern und der entgegengesetzten Zahl der kleinsten natürlichen Zahl mit drei verschiedenen Ziffern.

20 Pkte. **3.** Die Zahlen a und b sind ganze Zahlen mit $|a|=5$ und $|b|=8$.
Bestimmt die kleinstmögliche Summe $a+b$ und die kleinstmögliche Differenz $a-b$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Multiplikation ganzer Zahlen. Eigenschaften

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Wir wollen die Operation der Multiplikation ganzer Zahlen verstehen. *Wir wissen bereits, wie man natürliche Zahlen multipliziert, also wissen wir auch, wie man nichtnegative ganze Zahlen multipliziert*. Daher behält die Multiplikationsoperation für nichtnegative *ganze* Zahlen die Technik und die Eigenschaften bei, die wir für natürliche Zahlen gelernt haben.

Worterklärung

Nichtnegative Zahl = Zahl, die nicht negativ ist; positive Zahl oder null; Zahl größer oder gleich 0.

Wenn $a>0$ und $b>0$, dann $a\cdot b>0$ und $a\cdot b=\underbrace{b+b+\ldots+b}_{a\text{-mal die Zahl } b}=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\text{-mal die Zahl } a}=b\cdot a.$	$+2=2$; $+3=3$; $+6=6$; $+1=1$; $+7=7$; also $(+2)\cdot(+3)=2\cdot3=3+3=6$; $(+3)\cdot(+2)=3\cdot2=2+2+2=6$; $(+1)\cdot(+7)=1\cdot7=7\cdot1=7$.
$0\cdot a=a\cdot0=0$ für jede nichtnegative Zahl a.	$0\cdot(+3)=(+3)\cdot0=0$.

Wir analysieren getrennt die Multiplikation der ganzen Zahlen für den Fall, dass *eine der Zahlen negativ ist*, bzw. für den Fall, dass *beide Zahlen negativ sind*.

Wir lösen und beobachten

1. Betrachtet man die Multiplikation als wiederholte Addition eines der Faktoren (wie bei den natürlichen Zahlen), schreibt man, um das Produkt von $(+2) \cdot (-3)$ zu berechnen, $(+2) \cdot (-3) = (-3) + (-3) = -6$. Aber -6 ist die entgegengesetzte Zahl von 6, und $6 = 2 \cdot 3$, d. h., $\mathbf{(+2) \cdot (-3) = -(2 \cdot 3) = -(|+2| \cdot |-3|)}$.
Analog dazu: $(+3) \cdot (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$ und $|(+3) \cdot (-2)| = +6$, also $\mathbf{(+3) \cdot (-2) = -(|+3| \cdot |-2|)}$.
Für das Produkt $(-3) \cdot (+2)$, ergibt sich unter Wahrung der Kommutativität der Multiplikation $(-3) \cdot (+2) = (+2) \cdot (-3) = -6$. Ähnlich verhält es sich mit $(-2) \cdot (+3) = (+3) \cdot (-2) = -6$.

Wenn einer der Faktoren negativ und der andere positiv ist, ist *das Produkt eine negative Zahl*.

2. Wir wollen das Produkt zweier negativer Zahlen berechnen, zum Beispiel $(-2) \cdot (-3)$.
Im Zusammenhang mit den obigen Überlegungen kann jede ganze Zahl $-a$ als $-a = (-1) \cdot a$ oder $-a = a \cdot (-1)$ geschrieben werden. Wir erhalten $(-2) \cdot (-3) = (-2) \cdot (+3) \cdot (-1) = ((-2) \cdot (+3)) \cdot (-1) = (-6) \cdot (-1) = +6$.
Dann ist $(-2) \cdot (-3) = |-2| \cdot |-3| = +6$.

Wenn beide Faktoren negativ sind, ist das *Produkt eine positive Zahl*.

Wenn $a > 0$ und $b < 0$, dann ist $a \cdot b < 0$, $a \cdot b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a\text{–mal die Zahl } b} = \underbrace{(-a) + (-a) + \ldots + (-a)}_{-b\text{–mal die Zahl } -a} = (-b) \cdot (-a)$ und $a \cdot b = -(\lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert)$.	$(-12) \cdot (+2) = -(\lvert -12 \rvert \cdot \lvert +2 \rvert) = -(12 \cdot 2) = -24$. $(+12) \cdot (-2) = -(\lvert +12 \rvert \cdot \lvert -2 \rvert) = -(12 \cdot 2) = -24$.
$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ für jede ganze Zahl a.	$0 \cdot (+3) = 0$; $0 \cdot (-3) = 0$.
Wenn $a < 0$ und $b < 0$, dann ist $a \cdot b > 0$, $a \cdot b = -[(-a) \cdot b] = -[a \cdot (-b)] = (-a) \cdot (-b)$ und $a \cdot b = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$.	$(-4) \cdot (-7) = +(\lvert -4 \rvert \cdot \lvert -7 \rvert) = +(4 \cdot 7) = 28$. $(-11) \cdot (-2) = +(\lvert -11 \rvert \cdot \lvert -2 \rvert) = +(11 \cdot 2) = 22$.

Wir merken uns

Vorzeichenregel bei der Multiplikation

1. Das Produkt zweier positiver Zahlen ist eine positive Zahl. Das Produkt zweier negativer Zahlen ist eine positive Zahl.

2. Das Produkt einer positiven und einer negativen Zahl ist eine negative Zahl.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Bei der Multiplikation der ganzen Zahlen bleiben alle Eigenschaften der Multiplikation der natürlichen Zahlen erhalten.

Eigenschaft	*In mathematischer Sprache*	*Beispiele*
Die Multiplikation ganzer Zahlen ist assoziativ.	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$.	$[(-2) \cdot (+7)] \cdot (-3) = (-14) \cdot (-3) = +(14 \cdot 3) = +42$. $(-2) \cdot [(+7) \cdot (-3)] = (-2) \cdot (-21) = +(2 \cdot 21) = +42$.
Die Multiplikation ganzer Zahlen ist kommutativ.	$a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.	$(-2) \cdot (+7) = -14$ und $(+7) \cdot (-2) = -14$.

Die Zahl 1 ist das neutrale Element der Multiplikation ganzer Zahlen.	$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.	$1 \cdot (+7) = (+7) \cdot 1 = +7$; $1 \cdot (-7) = (-7) \cdot 1 = -7$.
Die Multiplikation ganzer Zahlen ist distributiv in Bezug auf Addition und Subtraktion.	Für alle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.	$(-2) \cdot [(+7) + (-3)] = (-2) \cdot (+4) = -(2 \cdot 4) = -8$; $(-2) \cdot (+7) + (-2) \cdot (-3) = (-14) + (+6) = -8$. $(-2) \cdot [(+7) - (-3)] = (-2) \cdot (+10) = -(2 \cdot 10) = -20$; $(-2) \cdot (+7) - (-2) \cdot (-3) = (-14) - (+6) = -20$.

Übungen und Aufgaben

1. Schreibt folgende Operationen in eure Hefte. Unterstreicht, ohne zu multiplizieren, die Buchstaben, die Multiplikationen mit einem negativen ganzzahligen Ergebnis bezeichnen. Überprüft die Richtigkeit eurer Antwort, indem ihr die Berechnungen durchführt.

a) $-2 \cdot (-8)$; **b)** $-6 \cdot (-9)$; **c)** $+4 \cdot (+7)$; **d)** $(+10) \cdot 5$; **e)** $-3 \cdot (+5)$; **f)** $12 \cdot (-1)$; **g)** $-100 \cdot (3)$; **h)** $+9 \cdot (-2)$.

2. Schreibt folgende Operationen in eure Hefte. Unterstreicht, ohne zu multiplizieren, die Buchstaben, die Multiplikationen mit einem positiven ganzzahligen Ergebnis bezeichnen. Überprüft die Richtigkeit eurer Antwort, indem ihr die Berechnungen durchführt.

a) $-3 \cdot (-7)$; **b)** $-4 \cdot (-5)$; **c)** $6 \cdot (+8)$; **d)** $(1) \cdot 5$; **e)** $-4 \cdot (+9)$; **f)** $12 \cdot (-1)$; **g)** $-100 \cdot (+2)$; **h)** $9 \cdot (-3)$.

3. Führt die Multiplikationen durch:

a) $-4 \cdot (-8)$; **b)** $-3 \cdot (-9)$; **c)** $+2 \cdot (+10)$; **d)** $(-5) \cdot 7$; **e)** $-6 \cdot (+11)$; **f)** $4 \cdot (-12)$; **g)** $-25 \cdot (+2)$; **h)** $-50 \cdot 0$.

4. Gebt an:

a) zwei ganze Zahlen, deren Produkt eine positive ganze Zahl ist;
b) zwei ganze Zahlen, deren Produkt eine negative ganze Zahl ist;
c) zwei ganze Zahlen, deren Produkt die Zahl 0 ist;
d) drei ganze Zahlen, deren Produkt -17 ist.

5. Schreibt die Zahl -65 als Produkt von vier verschiedenen ganzen Zahlen. Untersucht alle Möglichkeiten.

6. Benutzt die Assoziativität und die Kommutativität der Multiplikation und führt aus.

A	B
a. $-20 \cdot (+3)$	**1.** +65
b. $-13 \cdot (-5)$	**2.** −63
c. $7 \cdot (-9)$	**3.** −60
d. $\lvert -2 \rvert \cdot (-4) \cdot (-8)$	**4.** 64
	5. −63
	6. +64

7. Benutzt die Assoziativität und die Kommutativität der Multiplikation und führt aus:

a) $-7 \cdot (-5) \cdot (-2)$; **b)** $-4 \cdot (+3) \cdot (-25)$; **c)** $50 \cdot (-6) \cdot (-2)$; **d)** $-8 \cdot (+9) \cdot (-5) \cdot (-1)$; **e)** $-2 \cdot (+19) \cdot (-500)$; **f)** $4 \cdot (-3) \cdot (-25) \cdot 0$.

8. Benutzt die Distributivität der Multiplikation in Bezug auf die Addition und die Subtraktion und führt aus:

a) $-5 \cdot [(-10) + (-100)]$;
b) $+8 \cdot [(+6) - (-9)]$;
c) $-3 \cdot [+17 + (-12)]$;
d) $-9 \cdot [(-8) + (-7)]$.

9. Seien a und b zwei ganze Zahlen.

a) Wenn $a \cdot b = -15$, berechnet $-a \cdot b$.
b) Wenn $a \cdot b = -20$, berechnet $a \cdot (-3) \cdot (-33) \cdot b$.
c) Wenn $a + b = -25$, berechnet $(-4) \cdot a + (-4) \cdot b$.
d) Wenn $a - b = -30$, berechnet $(-5) \cdot a - (-5) \cdot b$.

10. Die Menge M besteht aus allen ganzen Zahlen x mit der Eigenschaft $-10 < x \leq 10$. Schreibt alle Teilmengen der Menge M auf, bei denen das Produkt der Elemente gleich -10 ist.

11. Berechnet die Summe der ganzen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}$, wenn bekannt ist, dass ihr Produkt -1 ist und es um drei negative Zahlen mehr gibt als positive.

Minitest

1. Führt die Multiplikationen durch:

10 Pkte. **a)** $-7 \cdot (-12)$;

10 Pkte. **b)** $13 \cdot (-9)$;

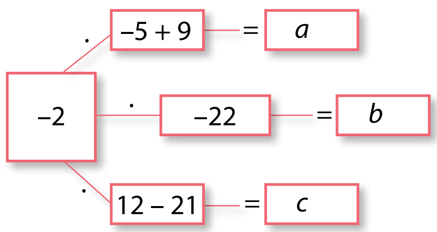
10 Pkte. **c)** $(-8+5) \cdot (-2-16)$.

2. Berechnet:

15 Pkte. **a)** $x \cdot y + x \cdot z$, wenn $x = -12$ und $y + z = -3$.

15 Pkte. **b)** $x \cdot (y - z)$, wenn $x \cdot y = -25$ und $x \cdot z = -41$.

30 Pkte. 3. Bestimmt die Zahlen *a, b, c* anhand folgender Darstellung und führt dann das Produkt $a \cdot b \cdot c$ aus.



Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L3 Division ganzer Zahlen, wenn der Dividend ein Vielfaches des Teilers ist

Zur Erinnerung

Die natürliche Zahl *b* ist ein Teiler der natürlichen Zahl *a*, wenn es eine natürliche Zahl *c* gibt, sodass $a = b \cdot c$.

Wenn *a*, *b*, *c* von null verschiedene natürliche Zahlen sind, dann treten die Gleichheiten $a = b \cdot c$, $b = a : c$ und $c = a : b$ gleichzeitig auf, d. h., wenn eine auftritt, dann treten auch die anderen beiden auf. Wir sagen, dass die drei Beziehungen äquivalent sind, und schreiben: Wenn $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, dann $a = b \cdot c \Leftrightarrow b = a : c \Leftrightarrow c = a : b$.

Wenn $b = a : c$ oder $c = a : b$, dann ist *b* der Quotient der Division der Zahl *a* durch die von null verschiedene Zahl *c*, und *c* ist der Quotient der Division der Zahl *a* durch die von null verschiedene Zahl *b*.

Wir lösen und beobachten

Bestimmt die ganzen Zahlen *a* und *b*, für die $15 = (-3) \cdot a$ bzw. $-15 = b \cdot (-5)$ gilt.

Lösung: $15 = 3 \cdot 5 = (-3) \cdot (-5)$, also $a = -5$. Auch $-15 = 3 \cdot (-5)$, d. h., $b = 3$. Wir schreiben $15 : (-3) = -5$; $-15 : (-5) = +3$.

Auf ähnliche Weise erhalten wir: $15 : (-5) = -3$; $-15 : (-3) = +5$; $-15 : (+5) = -3$; $-15 : (+3) = -5$.

Wir stellen fest: Wenn $|b|$ Teiler der von null verschiedenen natürlichen Zahl $|a|$ ist, dann kann die ganze Zahl *a* durch die von null verschiedene ganze Zahl *b* geteilt werden, und der Quotient dieser Teilung ist die ganze Zahl *c*, für die $a = b \cdot c$.

Wenn *a und b* beide positiv oder beide negativ sind, dann ist $a : b$ eine positive Zahl. Ist eine der Zahlen positiv und die andere negativ, so ist $a : b$ eine negative Zahl.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Aus den obigen Beispielen und der Vorzeichenregel für die Multiplikation ganzer Zahlen leiten wir die folgenden Ergebnisse ab.

Wenn a, b, c von null verschiedene ganze Zahlen sind und b und c Teiler von a sind, dann gelten die Beziehungen: $a = b \cdot c \Leftrightarrow b = a : c \Leftrightarrow c = a : b$.	
$0 : a = 0$; $a : 1 = a$; $a : (-1) = -a$; $a : a = 1$; $a : (-a) = -1$ für jede von null verschiedene Zahl a.	
Teilen durch 0 hat keinen Sinn!	
Wenn $a > 0$, $b > 0$ und $b \mid a$, dann $a : b \in \mathbb{Z}_+$ und $a : b = \lvert a \rvert : \lvert b \rvert$.	$(+24) : (+3) = 24 : 3 = 8$
Wenn $a < 0$, $b < 0$ und $\lvert b \rvert$ teilt $\lvert a \rvert$, dann $a : b \in \mathbb{Z}_+$ und $a : b = \lvert a \rvert : \lvert b \rvert$.	$(-9) : (-3) = \lvert -9 \rvert : \lvert -3 \rvert = 9 : 3 = 3$
Wenn $a > 0$, $b < 0$ und $\lvert b \rvert$ teilt $\lvert a \rvert$, dann $a : b \in \mathbb{Z}_-$ und $a : b = -(\lvert a \rvert : \lvert b \rvert)$.	$(+21) : (-7) = -(\lvert +21 \rvert : \lvert -3 \rvert) = -(21 : 3) = -7$
Wenn $a < 0$, $b > 0$ und $\lvert b \rvert$ teilt $\lvert a \rvert$, dann $a : b \in \mathbb{Z}_-$ und $a : b = -(\lvert a \rvert : \lvert b \rvert)$.	$(-42) : (+2) = -(\lvert -42 \rvert : \lvert +2 \rvert) = -(42 : 2) = -21$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

a) Bestimmt für die ganzen Zahlen $a = 9$ und $b = -21$ die ganze Zahl c mit der Eigenschaft, dass $\lvert c \rvert$ der gemeinsame Teiler der Zahlen $\lvert a \rvert$ und $\lvert b \rvert$ ist.

b) Berechnet für jede in Unterpunkt a) identifizierte ganze Zahl $a : c$; $b : c$; $a : b + a : c$; $a + b$; $(a + b) : c$.

c) Beweist für die in a) angegebenen Werte von c die Gleichheit $(a + b) : c = a : c + b : c$, die wir aus der Division der natürlichen Zahlen kennen.

Lösung: **a)** $\lvert a \rvert = 9$ und $D_9 = \{1, 3, 9\}$; $\lvert b \rvert = 21$ und $D_{21} = \{1, 3, 7, 21\}$. Die gemeinsamen Teiler der Zahlen 9 und 21 sind 1 und 3, also ist $\lvert c \rvert \in \{1, 3\}$, d. h., $c \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

b)

c	$9 : c$	$-21 : c$	$9 : c + (-21 : c)$	$9 + (-21)$	$[9 + (-21)] : c$
-3	-3	$+7$	$(-3) + (7) = \mathbf{+4}$	-12	$(-12) : (-3) = \mathbf{+4}$
-1	-9	$+21$	$(-9) + (21) = \mathbf{+12}$	-12	$(-12) : (-1) = \mathbf{+12}$
$+1$	$+9$	-21	$(+9) + (-21) = \mathbf{-12}$	-12	$(-12) : (+1) = \mathbf{-12}$
$+3$	$+3$	-7	$(+3) + (-7) = \mathbf{-4}$	-12	$(-12) : (+3) = \mathbf{-4}$

c) Aus der Tabelle folgt, dass für alle ganzen Zahlen c, für die $a : c$ und $b : c$ ganze Zahlen sind, die Gleichheit $(a + b) : c = a : c + b : c$ gilt.

Zur Erinnerung

Wenn $a, b, c, c \neq 0$, ganze Zahlen sind, sodass $a : c$ und $b : c$ ganze Zahlen sind, und $a = b$, dann $a : c = b : c$.

Wenn $a, b, c, c \neq 0$, ganze Zahlen sind, sodass $a : c$ und $b : c$ ganze Zahlen sind, dann $(a + b) : c = a : c + b : c$ und $(a - b) : c = a : c - b : c$.

Wenn $a, b, c, d, c \neq 0$ und $d \neq 0$, ganze Zahlen sind, sodass $a : c$ und $b : d$ ganze Zahlen sind, dann $(a \cdot b) : (c \cdot d) = (a : c) \cdot (b : d)$.

Übungen und Aufgaben

1. Schreibt *die Buchstaben* für Divisionen, die eine negative ganze Zahl ergeben, in eure Hefte und führt danach die Divisionen durch.
   a) $-32 : (-8)$; **b)** $-27 : (9)$; **c)** $24 : (-3)$; **d)** $(44) : 4$; **e)** $-30 : (5)$; **f)** $12 : (-1)$; **g)** $-18 : (-6)$; **h)** $72 : (-12)$.

2. Schreibt folgende Operationen in eure Hefte. Unterstreicht *die Buchstaben*, die Divisionen bezeichnen, die eine positive ganze Zahl ergeben, und führt dann die Divisionen durch.
   a) $-49 : (7)$; **b)** $-42 : (-6)$; **c)** $18 : 9$; **d)** $200 : (-4)$; **e)** $0 : (-10)$; **f)** $-56 : (-8)$; **g)** $88 : (-11)$; **h)** $-25 : (-1) : (-5)$.

3. Führt die Berechnungen durch:
   a) $-48 : (-8)$; **b)** $-63 : (+9)$; **c)** $144 : (-12)$; **d)** $(200) : (-25)$; **e)** $-120 : (+5)$; **f)** $156 : (-13)$; **g)** $-108 : (-9) : (-2)$; **h)** $400 : |-4| : (-2)$.

4. Berechnet den Quotienten der Division:
   a) der Zahl -1000 durch die entgegengesetzte Zahl des größten Teilers der Zahl 25;
   b) der entgegengesetzten Zahl der Zahl $(-22 + 99)$ durch die Zahl $(-11 - 22)$;
   c) der von null verschiedenen ganzen Zahl n durch ihre entgegengesetzte Zahl.

5. Ordnet jedem Buchstaben der Rechnung in der ersten Spalte die Zahl zu, die das richtige Ergebnis in der zweiten Spalte darstellt:

	1. 63
a. $-512 : 8$	**2.** 60
b. $240 : (-4)$	**3.** -60
c. $-900 : 15 : (-1)$	**4.** -64
d. $-189 : (-1 - 2)$	**5.** -63
	6. $+64$

6. Bestimmt:
   a) die ganze Zahl m, wenn bekannt ist, dass $12 \cdot m = -84$;
   b) die ganze Zahl n, wenn bekannt ist, dass $-5 \cdot (n + 17) = +85$;
   c) die ganze Zahl p, wenn bekannt ist, dass $(p - 9) \cdot (-3 + 5) = -86$.

7. Berechnet:
   a) $-500 : (-19 + 3^2)$;
   b) $108 : [-6 - (-29) - 5]$;
   c) $[+47 + (-175)] : (-3 \cdot 4 - 4 \cdot 5)$.

8. Bestimmt:
   a) die ganze Zahl a, wenn $a \cdot b + a \cdot c = -225$ und $b + c = -15$;
   b) die ganze Zahl b, wenn $a \cdot b - b \cdot c = -342$ und $a - c = -19$;
   c) die ganze Zahl c, wenn $a \cdot c + b \cdot c + c = -441$ und $|a + b| = 8$.

Minitest

1. Führt die Divisionen durch:
   5 Pkte. **a)** $-60 : (-5)$;
   5 Pkte. **b)** $100 : (-4)$;
   5 Pkte. **c)** $(-432) : (-6) : (-9)$;
   5 Pkte. **d)** $(-23 + 58) : (-2 - 5)$.

30 Pkte. 2. Wählt die Zahlenpaare, Elemente der Menge $\{9; -1; +1; 7; -72; 96; 8; -56\}$, deren Quotient -8 ist.

3.
   20 Pkte. **a)** Wenn $a \cdot x + a \cdot y = -108$ und $a = -18$, berechnet $x + y$.
   20 Pkte. **b)** Wenn $b \cdot x - b \cdot y = -11$ und $x - y = -1$, berechnet b.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L4 Potenz einer ganzen Zahl mit natürlichem Exponenten. Rechenregeln mit Potenzen

Zur Erinnerung

Für beliebige natürliche Zahlen a und n, wobei $n \geq 2$, wird das Produkt $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal die Zahl } a}$ mit a^n bezeichnet und heißt n-te Potenz der natürlichen Zahl a.

Beispiele: Die zweite Potenz der Zahl 2 ist $2^2 = 2 \cdot 2$.
Die dritte Potenz der Zahl 2 ist $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$.
Die n-te Potenz der Zahl 1 ist $1^n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n\text{-mal die Ziffer } 1}$.

$a^1 = a$ für jede natürliche Zahl a; $a^0 = 1$ für jede von null verschiedene natürliche Zahl a.

Achtung! 0^0 hat keinen Sinn!

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Es sei $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Das Produkt $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal die Zahl } a}$ wird mit a^n bezeichnet und heißt n-te *Potenz* der ganzen Zahl a.

In der obigen Beschreibung wird die Zahl a als Basis der Potenz und die Zahl n als Exponent der Potenz bezeichnet.
In der folgenden Tabelle werden die obigen Informationen detailliert dargestellt.

Produkt	$(-2) \cdot (-2)$	$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$	$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal die Zahl } a}$
Wir schreiben	$(-2)^2$	$(-1)^3$	a^n
Wir lesen	−2 hoch zwei	−1 hoch drei	a hoch n
Bedeutung	zweite Potenz der Zahl −2	dritte Potenz der Zahl −1	n-te Potenz der Zahl a
Basis	−2	−1	a
Exponent	2	3	n

Für ganze Zahlen gelten die gleichen Konventionen wie für die natürlichen Zahlen:

$a^1 = a$ für jede ganze Zahl a. $a^0 = 1$ für jede *von null verschiedene* ganze Zahl a.
$0^n = 0$ für jede *von null verschiedene* ganze Zahl n.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

In der 5. Klasse haben wir Regeln gefunden, nach denen wir bestimmte Rechnungen mit Potenzen durchführen können. Alle diese Regeln gelten auch für ganze Zahlen.

Regel	Anwendung
Produkt zweier Potenzen mit der gleichen Basis	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für jedes $a \in \mathbb{Z}^*$ und für alle $m, n \in \mathbb{N}$.
Quotient zweier Potenzen mit der gleichen Basis	$a^m : a^n = a^{m-n}$ für jedes $a \in \mathbb{Z}^*$ und für alle $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$.
Potenz einer Potenz	$(a^m)^n = a^{mn}$ für jedes $a \in \mathbb{Z}^*$ und für alle $m, n \in \mathbb{N}$.
Potenz eines Produkts	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}^*$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$.
Potenz eines Quotienten	$(a : b)^m = a^m : b^m$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}^*$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Zur Erinnerung: 0^0 hat keinen Sinn.

Gelöste Aufgabe 1

a) Schreibt die Zahl $(-3)^{10} : [(-3)^2 \cdot (-3)^2]^2$ als einzige Potenz mit der Basis -3.

b) Berechnet $[(-2)^{12} \cdot 5^{10}] : [(-2)^9 \cdot 5^7]$ und schreibt das Ergebnis als eine Potenz mit einem Exponenten, der größer ist als 1.

c) Betrachtet die ganzen Zahlen $x = (-2)^{11} \cdot 8^{10}$ und $y = 3^{41} : (-3)^{27}$.

Bestimmt die natürlichen Zahlen a und b, wenn $(x \cdot y) : (2^a \cdot 3^b) = 2^5 \cdot 3^3$.

Lösung

a) $(-3)^{10} : [(-3)^2 \cdot (-3)^2]^2 = (-3)^{10} : [(-3)^{2+2}]^2 =$
$= (-3)^{10} : [(-3)^4]^2 = (-3)^{10} : (-3)^{4 \cdot 2} = (-3)^{10} : (-3)^8 = (-3)^2$.

b) $[(-2)^{12} \cdot 5^{10}] : [(-2)^9 \cdot 5^7] = [(-2)^{12} : (-2)^9] \cdot (5^{10} : 5^7) =$
$= (-2)^{12-9} \cdot 5^{10-7} = (-2)^3 \cdot 5^3 = [(-2) \cdot 5]^3 = (-10)^3$.

c) $x = (-2)^{11} \cdot 8^{10} = (-2)^{11} \cdot (2^3)^{10} = -2^{11} \cdot 2^{3 \cdot 10} =$
$= -(2^{11} \cdot 2^{30}) = -2^{11+30} = -2^{41}$;
$y = 3^{41} : (-3)^{27} = 3^{41} : (-3^{27}) = -3^{41-27} = -3^{14}$.

Dann ist $(x \cdot y) : (2^a \cdot 3^b) = ((-2^{41}) \cdot (-3^{14})) : (2^a \cdot 3^b) =$
$= (2^{41} \cdot 3^{14}) : (2^a \cdot 3^b)$. Für $a \le 41$ und $b \le 14$ wird die Gleichheit in der Aussage zu: $2^{41-a} \cdot 3^{14-b} = 2^5 \cdot 3^3$.

Daraus ergibt sich $41 - a = 5$ und $14 - b = 3$, d. h., $a = 36$ und $b = 11$.

Der *Vergleich* zweier ganzer Zahlen x und y besteht darin festzustellen, welche der Beziehungen $x < y$, $x = y$, $x > y$ gilt.
Wir nehmen uns vor, zwei ganze Zahlen zu vergleichen, die als Potenzen geschrieben sind.
Man kann leicht ableiten, dass zwei Potenzen mit der *gleichen Basis* und dem *gleichen Exponenten* zwei *gleiche Zahlen* sind.
Um die Potenzen zweier ganzer Zahlen zu vergleichen, sollte man das Vorzeichen jeder Potenz bestimmen. Wenn die beiden Potenzen das gleiche Vorzeichen haben, vergleicht man zunächst ihre Beträge.
Wenn die Zahlen als zwei Potenzen mit demselben Exponenten oder als zwei Potenzen mit derselben Basis geschrieben werden können, erhält man unter Anwendung der Techniken zum Vergleich der Potenzen natürlicher Zahlen und unter Verwendung der korrekten Vorzeichen der verglichenen ganzen Zahlen folgende Ergebnisse:

Wenn $a \in \mathbb{Z}$, $a \ge 2$, $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$, dann $a^n < a^m \Leftrightarrow n < m$.	$2^3 < 2^5$; $7^{100} < 7^{101}$
Wenn $a \in \mathbb{Z}_+$, $b \in \mathbb{Z}_+$ und $n \in \mathbb{N}$, dann $a^n < b^n \Leftrightarrow a < b$.	$2^3 < 3^3$; $7^{100} < 8^{100}$
Wenn $a \in \mathbb{Z}_-$, $b \in \mathbb{Z}_-$ und $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl ist, dann ist $a^n < b^n \Leftrightarrow a > b$.	$(-2)^4 < (-3)^4$ und $-2 > -3$
Wenn $a \in \mathbb{Z}_-$, $b \in \mathbb{Z}_-$ und $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl ist, dann ist $a^n < b^n \Leftrightarrow a < b$.	$(-7)^5 < (-3)^5$ und $-7 < -3$
Wenn $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ und n ungerade ist, dann ist $a^n < b^n \Leftrightarrow a < b$.	$(-2)^3 < 3^3$ und $-2 < 3$

Gelöste Aufgabe 2

a) Ergänzt die Potenzen der Zahlen -1, 1, -2, 2 in der nebenstehenden Tabelle.

b) Bestimmt bei negativem a das Vorzeichen der Potenzen mit ungeradem Exponenten.

c) Leitet den Zusammenhang zwischen $(-a)^n$ und $-a^n$, $a \in \mathbb{Z}^*$, ab.

a	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$
$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
-2	$+1$	-2	$+4$	-8	$+16$	-32	$+64$
$+2$	$+1$	$+2$	$+4$	$+8$	$+16$	$+32$	$+64$

Lösung: **b)** Wir bemerken anhand der Tabelle, dass alle Potenzen negativer Zahlen mit ungeraden Exponenten ebenfalls negative Zahlen sind. Außerdem stellen wir fest, dass

$(-1)^1 = (-1)^3 = (-1)^5 = -1 < 0$; $(-1)^0 = (-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^6 = +1 > 0$.

c) $(-a)^n = [(-1) \cdot a]^n = (-1)^n \cdot a^n$. Wenn n eine gerade Zahl ist, dann ist $(-a)^n = (+1) \cdot a^n = a^n$, und wenn n ungerade ist, dann ist $(-a)^n = (-1) \cdot a^n = -a^n$.

Zur Erinnerung

$1^n = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$; $(-1)^n = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, n gerade; $(-1)^n = -1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, n ungerade.
Wenn n eine gerade natürliche Zahl ist, $n \neq 0$, dann ist $(-a)^n = a^n$ für jedes $a \in \mathbb{Z}$.
Wenn n eine ungerade natürliche Zahl ist, dann ist $(-a)^n = -a^n$ für jedes $a \in \mathbb{Z}$.

Übungen und Aufgaben

1. Schreibe als Potenz mit natürlichem Exponenten:
a) $-3 \cdot (-3)$; **b)** $5 \cdot 5 \cdot 5$; **c)** -10; **d)** $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$; **e)** $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$; **f)** $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$.

2. Berechnet die Potenzen:
a) $(-2)^3$; **b)** $(-5)^4$; **c)** $(-1)^7$; **d)** $(-8)^1$; **e)** $(10)^2$; **f)** $(-3)^5$.

3. Übertragt die Tabelle in eure Hefte, führt die notwendigen Berechnungen durch und ergänzt die Ergebnisse:

$(-7)^2 = \dots$	$(-5)^3 = \dots$	$(-3)^4 = \dots$
$(+7)^2 = \dots$	$(+5)^3 = \dots$	$(+3)^4 = \dots$
$(-1)^5 = \dots$	$(-10)^6 = \dots$	$(-2)^7 = \dots$
$(+1)^5 = \dots$	$10^6 = \dots$	$(+2)^7 = \dots$

4. Betrachtet folgende Reihe von Potenzen: $(-1)^3$, 1^7, $(-2)^4$, 0^9, $(-3)^5$, 2^3, $(-5)^1$, $(-4)^0$, $(-6)^2$, $(-7)^3$, -8^2.
a) Schreibt die Menge der positiven Glieder der Reihe.
b) Schreibt die Menge der negativen Glieder der Reihe.
c) Bestimmt, ob der Satz „Die gegebene Reihe enthält ganze Zahlen, die weder negativ noch positiv sind“ wahr ist. Begründet.

5. Berechnet: $(-15)^1$, $(-3)^3$, -2^4, $(-13)^2$, -1^7, $(-4)^0$, 2023^1.

6. **a)** Schreibt als Potenzen mit der Basis -2 die Zahlen: $-2, 4, -8, 16, -128$.
b) Schreibt als Potenzen mit der Basis -10 die Zahlen $1, -10, +100, -1000, -10\,000\,000$.
c) Schreibt als Potenzen mit dem Exponenten 3 die Zahlen $1, -1, -27, -125, 1000$.

7. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und füllt die Lücken mit einer Potenz aus, sodass ihr Gleichheiten erhaltet:

$2^3 \cdot 2^4 = \dots$	$(-3)^2 \cdot (-3)^4 = \dots$
$4^5 : 4^2 = \dots$	$(-2)^8 : (-2)^3 = \dots$
$[(-2)^2]^3 = \dots$	$[(-1)^4]^5 = \dots$
$(-10)^3 : (-10) = \dots$	$(-7)^9 : (-7)^3 : (-7)^2 = \dots$
$[(-9)^6]^0 = \dots$	$[(-2)^2 \cdot 2^3]^4 = \dots$

8. Führt unter Anwendung der Rechenregeln mit Potenzen aus:
a) $(2 \cdot 3^2)^3$; **b)** $[2^3 \cdot (-3)^2]^4$; **c)** $[(-4)^2 \cdot 5^3]^5$; **d)** $[(-6)^4 \cdot (-7)^2]^6$.

9. Führt die Berechnungen durch:
a) $(-2)^6 \cdot 2^4$; **b)** $81 \cdot (-3)^7 : (-3)^{10}$; **c)** $5 \cdot (-5^2) : (-125)$; **d)** $[(-3)^3]^4 : (-3)^9$; **e)** $(-4)^{14} : (-4)^{12} \cdot (-4)$; **f)** $(-2)^2 \cdot (-2)^6 : (-2)^7$.

10. Beweist die Gleichheiten:
a) $6^6 = 2^6 \cdot 3^6$;
b) $(-30)^5 = (-2)^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-5)^5$;
c) $(-10)^{11} = (-2)^{11} \cdot 5^{11} = 2^{11} \cdot (-5)^{11}$.

Minitest

1. Berechnet:
4 × 5 Pkte. **a)** $2^3 - (-3)^2$; **b)** $(-1)^{21} - (-1)^{12}$; **c)** $(-2)^2 \cdot (-2)^3$; **d)** $(-5)^7 : (-5)^5$.
30 Pkte. **2.** Bestimmt die Zahl n, wenn: $[(-7)^2]^4 : (-7)^n = (-7)^3$.
40 Pkte. **3.** Vergleicht die Zahlen $a = (-8+1)^7 : (-6-1)^4$ und $b = (-2)^9$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L5 Additionen und Subtraktionen unter Verwendung der Eigenschaften der Operationen in $\mathbb{Z}$

Wir lösen und beobachten

Wir betrachten die ganzen Zahlen a und b und versuchen, die entgegengesetzte Zahl ihrer Summe zu erraten.
Zu diesem Zweck vervollständigen und betrachten wir die nebenstehende Tabelle.
In allen vier Fällen ist die entgegengesetzte Zahl der Summe der Zahlen a und b gleich der Summe der entgegengesetzten Zahlen dieser Zahlen.

a	b	$a+b$	$-a$	$-b$	$-(a+b)$	$-a+(-b)$
+2	+1	+3	−2	−1	−3	−3
−2	+1	−1	+2	−1	+1	+1
+2	−1	+1	−2	+1	−1	−1
−2	−1	−3	+2	+1	+3	+3

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Die Richtigkeit des Ergebnisses jeder ganzzahligen Berechnung hängt von der strikten Einhaltung der Eigenschaften der auszuführenden Operationen ab.
Mithilfe der Definition der Differenz, der Eigenschaften der Addition und der Distributivität der Multiplikation in Bezug auf die Addition *begründen wir die obige Schlussfolgerung* und leiten neue Eigenschaften ab, die bei der Durchführung von Berechnungen nützlich sind.

Eigenschaft	*Begründung*	*Verwendete Eigenschaften*
1. $-(a+b) = (-a) + (-b) = -a - b$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.	$-(a+b) = (-1) \cdot (a+b) =$ $= (-1) \cdot a + (-1) \cdot b =$ $= (-a) + (-b) = -a - b$.	Die entgegengesetzte Zahl einer Zahl ist das Produkt von –1 und dieser Zahl. Die Multiplikation ist distributiv in Bezug auf die Addition.
Die entgegengesetzte Zahl einer Summe ist gleich der Summe der entgegengesetzten Zahlen der Glieder.		
2. $a - (b+c) = a - b - c$ für alle ganzen Zahlen a, b, c.	$a - (b+c) = a + [-(b+c)] =$ $= a + (-b-c) = a + [(-b) + (-c)] =$ $= a + (-b) + (-c) = a - b - c$.	Die entgegengesetzte Zahl einer Summe ist gleich der Summe der entgegengesetzten Zahlen der Glieder. Assoziativität der Addition der ganzen Zahlen.
Das „–“-Zeichen vor der Klammer ändert die Vorzeichen aller Glieder in der Klammer.		

Übungen und Aufgaben

1. Löst die Klammern auf und berechnet:
   a) $35 + (-37) - (+28)$;
   b) $-27 - (+52) - (-68) - (+44)$;
   c) $-17 - (-71) + (-62)$;
   d) $307 - (+82) - (-134) - (+89)$.

2. Es seien die Zahlen
   $a = -10 + 20 - (-30 + 40 - 50) + (-60)$ und
   $b = -78 + 90 + (-55 - 77 + 121)$.
   Übertragt die Tabelle in eure Hefte und bestimmt den Wahrheitswert der Aussagen.

Aussage	*W/F*
Die Zahl a ist eine negative ganze Zahl.	
Die Zahl b ist eine positive ganze Zahl.	
Die Zahl $-a - (-b)$ ist eine natürliche Zahl.	
$a - (-102) > b - (-201)$	

3. Führt aus:
   a) $-53 + 42 - 67 + 81$;
   b) $123 - 87 + 59 - 72 - 23$;
   c) $-7 - (-51 + 46 - 32) - (-48 + 27)$;
   d) $-321 - [-93 + (-136 + 204) - (-64)]$.

4. Berechnet die Summen
   a) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 89 - 90$;
   b) $(2 + 4 + 6 + \ldots + 100) + (-1 - 3 - 5 - \ldots - 99)$.

5. Berechnet und ordnet die Zahlen in steigender Reihenfolge:
   $a = 100 + [-105 + (-35 + 79 - 4) - (-35) + 127]$,
   $b = [-39 + (-23 + 9 + 20) - (-31 + 16 - 87) + 32] - (-71 - 2)$,
   $c = [(-17 + 29) + (-14 + 32 - 18)] - (-104 + 120)$.

6. Findet die Zahl $-x + (-y) - (-z) - 2024$, wenn:
   $|x + (-23)| = 0$, $|32 - y| = 23 - x$ und $z - 3^3 = -(-207)$.

Minitest

1. Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.
   20 Pkte. **a)** Wenn man die Klammern in der Rechnung $x - (y + z)$ auflöst, erhält man:
   A. $x - y - z$; **B.** $x - y + z$; **C.** $x + y + z$; **D.** $x + y - z$.
   20 Pkte. **b)** Wenn man die Klammern in der Rechnung $x + (-y + z)$ auflöst, erhält man:
   A. $x + y - z$; **B.** $x - y + z$; **C.** $x + y + z$; **D.** $x - y - z$.
   20 Pkte. **c)** Die Zahl $4 - (17 - 25)$ ist gleich:
   A. 8; **B.** –8; **C.** –12; **D.** 12.

15 Pkte. 2. Berechnet $a = 25 - [-13 + (-5 + 11 - 17) + (-15)]$ und gebt an, ob die Zahl positiv, negativ oder null ist.

15 Pkte. 3. Berechnet $-(-b + c)$, wenn $b = -[-(-5)]$ und $c = -\{+ [-(+7)]\}$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L6 Reihenfolge der Rechenoperationen und Verwendung von Klammern

Zur Erinnerung

1. Wenn die Aufgabe *nur Operationen derselben Ordnung* enthält, werden sie in der Reihenfolge ausgeführt, in der sie geschrieben sind, von links nach rechts.

2. Wenn die Aufgabe Operationen *unterschiedlicher Ordnungen* enthält, aber *keine Klammern*, dann führt man zuerst die Operationen der dritten Ordnung, dann der zweiten Ordnung und schließlich der ersten Ordnung aus, in der Reihenfolge von **1**, d. h.:

Schritt 1. Führt die Operationen mit Potenzen und Potenzierungen aus.
Schritt 2. Führt die Multiplikationen und die Divisionen durch, indem ihr die Ergebnisse des vorherigen Schritts verwendet und die Reihenfolge von **1** beachtet.
Schritt 3. Führt die Additionen und Subtraktionen durch, indem ihr die Ergebnisse des vorhergehenden Schritts verwendet und die Reihenfolge von **1** einhaltet.

> *Bemerkung:* Operationen mit Potenzen können im vorbereitenden Schritt oder *während des Lösens* durchgeführt werden, wenn wir einige Zahlen in einer Form schreiben wollen, die die Berechnungen vereinfacht.

3. Wenn die Aufgabe auch Klammern enthält, dann:
Schritt 1. Führt die Berechnungen in den runden Klammern in der unter **2** beschriebenen Reihenfolge durch.
Schritt 2. Verwandelt die eckigen Klammern in runde Klammern und die geschweiften Klammern in eckige Klammern.
Schritt 3. Führt die Rechnungen in den neuen runden Klammern in der unter **2** beschriebenen Reihenfolge aus.
Schritt 4. Fahrt auf diese Weise fort, bis alle Klammern entfernt sind, und führt dann die Berechnungen ohne Klammern durch.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Die Reihenfolge der Operationen mit ganzen Zahlen ist die gleiche wie bei den Operationen mit natürlichen Zahlen. Die Besonderheit liegt in der Durchführung von Operationen mit negativen Zahlen.

Übung **1.** Berechnet: $3 \cdot [5 - 6 \cdot (4 - 68 : 4 + 17)]$.

	Schritt	*Rechnung*	*Schreibweise*
Lösung	***Schritt 1.*** Wir führen die Multiplikationen und Divisionen in den runden Klammern durch.	$4 - 68 : 4 + 17 = 4 - 17 + 17$ $3 \cdot [5 - 6 \cdot (4 - 17 + 17)]$	Die Lösung der Aufgabe wird wie folgt geschrieben: $3 \cdot [5 - 6 \cdot (4 - 68 : 4 + 17)] =$ $= 3 \cdot [5 - 6 \cdot (4 - 17 + 17)] =$ $= 3 \cdot (5 - 6 \cdot 4) =$ $= 3 \cdot (5 - 24) =$ $= 3 \cdot (-19) =$ $= -57.$
	Schritt 2. Wir addieren und subtrahieren in den runden Klammern.	$4 - 17 + 17 = 4$ $3 \cdot [5 - 6 \cdot (+4)]$	
	Schritt 2'. Wir wandeln die eckigen Klammern in runde Klammern um. $[\ldots] \rightarrow (\ldots)$	$3 \cdot (5 - 6 \cdot 4)$	
	Schritt 3. Wir führen die Rechnungen in den neuen runden Klammern durch.	$5 - 6 \cdot 4 = 5 - 24 = -19$ $3 \cdot (-19)$	
	Schritt 4. Wir rechnen aus.	$3 \cdot (-19) = -57.$	

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Übung **2.** Berechnet: $3 \cdot 5^3 - 4^2 - 51^1 \cdot 20$.

	Schritt	*Rechnung*	*Schreibweise*
Lösung	***Schritt 1.*** Wir führen Operationen mit Potenzen durch.	$5^3 = 125;\ 4^2 = 16;\ 51^1 = 51.$	$3 \cdot 5^3 - 4^2 - 51^1 \cdot 20 =$ $= 3 \cdot 125 - 16 - 51 \cdot 20 =$ $= 375 - 16 - 1020 =$ $= 359 - 1020 =$ $= -661.$
	Schritt 2. Wir multiplizieren und dividieren, dann addieren und subtrahieren wir, indem wir die Ergebnisse von Schritt 1 verwenden.	$3 \cdot 125 - 16 - 51 \cdot 20 =$ $= 375 - 16 - 1020 =$ $= 359 - 1020 = -661.$	

Operationen mit Potenzen können in der Vorbereitungsphase oder *während des Lösens* durchgeführt werden, wenn wir einige Zahlen in einer Form schreiben wollen, die die Berechnungen vereinfacht.	*Beispiel* $[(-4)^6 : 2^{11} - 2]^8 - 37^2 + 31 \cdot 37 = (2^{12} : 2^{11} - 2)^8 - 37^2 + 31 \cdot 37 =$ $= (2-2)^8 - 37^2 + 31 \cdot 37 = 37 \cdot (-37 + 31) = 37 \cdot (-6) = -222.$

Übungen und Aufgaben

1. Wählt die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort stimmt.

a) Die Summe von -100 und dem Produkt von -3 und -33 ist:

A. 1; **B.** -1; **C.** -3; **D.** 3.

b) Die Differenz zwischen dem Quotienten der Division $196 : (-7)$ und -30 ist:

A. 3; **B.** -3; **C.** 2; **D.** -2.

c) Die Summe zwischen der kleinsten ganzen Zahl der Form $-\overline{ab}$ und dem Kubus der Zahl 5 ist:

A. 26; **B.** -27; **C.** 27; **D.** -26.

2. Berechnet:

a) $-29 + (15 - 36 + 79) - 144$;

b) $-32 - [-60 + (-35 + 77) - 83]$;

c) $45 - |-7 + 5| + |-16 + 33 - 25|$.

3. Führt die Rechnungen durch:

a) $1 + 2 \cdot (-3)$;

b) $-4 - 5 \cdot (-6)$;

c) $7 + 8 \cdot (-9) + (-10)^2$;

d) $-350 : (-14) + 5 \cdot (-3)$;

e) $-4 \cdot [-10 + (-3)^2] - (-23 + 2^5)$;

f) $512 : (-4)^3 - (-7^1 - 1^7) \cdot (-1)^6$.

4. Formuliert je eine Aufgabe, deren Ergebnis -10 ist und die Folgendes enthält:

a) eine Addition;

b) eine Addition und eine Subtraktion;

c) eine Addition, eine Subtraktion, eine Multiplikation und eine Division.

5. Es sei $a = 2 \cdot \{-1 + [(-2)^3 - (-2)^3 : (-2)^2] : (-3) \cdot (-1)\} + 3$.

a) Berechnet a.

b) Bestimmt die ganzen Zahlen b, für die $b^3 < a < b$.

6. Für $a = -4$ und $b = |-2|$ berechnet $A = (-a)^3 + b^2 - a^2 \cdot (-b)^3$.

7. Betrachtet die Zahlen:

$m = |-888 : (-4) - 84| : (-23)$,

$n = -14 + 3 \cdot [-2 \cdot (19 - 23) - 10]$,

$p = 17 - (-4) \cdot (-6) - (-3)^3$.

Übertragt die Tabelle in eure Hefte, führt die Rechnungen durch und ergänzt die Tabelle mit dem Buchstaben ***W***, wenn der Satz wahr ist, und mit dem Buchstaben ***F***, wenn der Satz falsch ist.

Satz	***W/F***
Die Zahl m ist eine negative ganze Zahl.	
Die Zahl n ist eine nichtnegative ganze Zahl.	
Die Zahl p ist die entgegengesetzte Zahl der Zahl n.	
Das Ergebnis der Rechnung $m \cdot (n + p + 1)$ ist 6.	

8. Führt die Rechnungen durch:

a) $(-11) \cdot [(-3)^3 + (-2)^4 + (-4032) : (-84)]$;

b) $(-2)^{73} : (-2)^{69} - 3 \cdot \{-2 - 2 \cdot [(-3)^7 : (-3)^5 - 14)]\}$;

c) $[(-7)^7]^2 : [(-7)^7 \cdot (-7)^4] + (2^7 \cdot 7^2) : (-2^6 \cdot 7)$;

d) $-4 - 4 \cdot [(-3)^5 : 81 - 2] + (-8)^1 : (-8)^0$;

e) $(-1)^4 \cdot (-5)^2 \cdot (-2)^3 - (-3)^5 \cdot (2)^5 : (-6)^3$.

9. Beweist, dass die Zahl $x = (-3)^2 \cdot 9^3 : (-3)^7 - (-5) \cdot (-5)^4 : (-125) + 1$ der Kubus einer ganzen Zahl ist.

10. Es seien die Zahlen $a = -1 + (-1)^2 + (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^5$, $b = -2^2 + (-2)^9 : 64 - (-5)^0$ und $c = [(-2)^3 \cdot (-3)^4] : [(-2)^2 \cdot (-3)^3] + (-7)^4 : (-49)$.

a) Schreibt die drei Zahlen in steigender Reihenfolge.

b) Gebt an, ob der Satz p: „$a^3 + b^2 + c < 0$" wahr oder falsch ist.

Minitest

Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

20 Pkte. **1.** Das Ergebnis der Rechnung $5 \cdot (-2) + 4 : (-1) + 3$ ist:

A. 11; **B.** -11; **C.** 18; **D.** -18.

30 Pkte. **2.** Die Zahl, die um 14 größer ist als $(-132) : [2^3 + (-7) \cdot 4 - (3 - 11)]$, ist:

A. 19; **B.** 20; **C.** 100; **D.** 25.

40 Pkte. **3.** Nachdem wir $(-18 + 21)^3 \cdot [-63 : (-9) - (-2)^4]^2 : (-243)$ berechnen, erhalten wir:

A. 8; **B.** -8; **C.** -9; **D.** 12.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

3.3 Gleichungen, Ungleichungen. Aufgaben, die mithilfe von Gleichungen/Ungleichungen in $\mathbb{Z}$ gelöst werden

L1 Gleichungen in der Menge der ganzen Zahlen

Zur Erinnerung

Zwei ganze Zahlen x und y sind dann und nur dann gleich, wenn sie auf der Zahlenachse an identischen Stellen dargestellt werden. Wir schreiben dann $x = y$.
Die Gleichheitsbeziehung in der Menge der ganzen Zahlen hat folgende Eigenschaften:

a) Sie ist *reflexiv*: Jede ganze Zahl ist gleich sich selbst, d. h. $x = x$ für jede ganze Zahl x.
b) Sie ist *symmetrisch*: Wenn $x = y$ ist, dann ist $y = x$.
c) Sie ist *transitiv*: Wenn $x = y$ und $y = z$, dann $x = z$.

In der *Algebra* wird die *Gleichheitsbeziehung* verwendet, um Aussagen mit einer oder mehreren Variablen zu formulieren oder um Gleichungen zu schreiben.
Bei einer *Gleichung* wird der Ausdruck, der auf der linken Seite des „="-Zeichens steht, als *linker Term (linke Seite) der Gleichung*, und der Ausdruck, der auf der rechten Seite des „="-Zeichens steht, als *rechter Term (rechte Seite)* der Gleichung bezeichnet.

Wir lösen und beobachten

Einige alltägliche Probleme lassen sich gut in allgemeine mathematische Muster einpassen.

Aussage	*Interpretation*
***Aufgabe* 1.** Felix ist um zwei Jahre jünger als seine Schwester und um 5 Jahre älter als sein Bruder. Zusammen sind die drei Geschwister 21 Jahre alt. Bestimmt das Alter von Felix.	Der Inhalt der Aufgabe kann wie folgt interpretiert werden: Wir bezeichnen das Alter von Felix mit x. Dann ist seine Schwester $x + 2$ Jahre alt und sein Bruder ist $x - 5$ Jahre alt. Zusammen sind sie also $x + (x + 2) + (x - 5)$ Jahre alt.

Ausgehend von der obigen Interpretation müssen wir *die ganzen Zahlen x bestimmen*, für die $x + (x + 2) + (x - 5) = 21$ ist.

Diese Aufgabe kann wie folgt umformuliert werden:

Löst *die Gleichung* $x + (x + 2) + (x - 5) = 21$ in der Menge der ganzen Zahlen.

Lösen der Gleichung und Deutung der Lösung

Mithilfe der Eigenschaften der Addition und der *Methode der Rückwärtsbewegung* wird die Gleichung zu:

$$x + x + 2 + x - 5 = 21 \Leftrightarrow 3x - 3 = 21 \quad | +3$$
$$3x = 24 \quad | :3$$
$$x = 8.$$

Kehren wir zur ursprünglichen Aufgabe zurück, so stellen wir fest, dass Felix 8 Jahre alt ist.
Wenn Felix 8 Jahre alt ist, dann ist seine Schwester $8 + 2 = 10$ (Jahre alt), sein Bruder ist $8 - 5 = 3$ (Jahre alt), und zusammen sind sie $8 + 10 + 3 = 21$ (Jahre alt).

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Die Aufgabe, Zahlen $x \in D$ zu bestimmen, die eine gegebene *Gleichheit* erfüllen, nennt man eine *Gleichung* mit der Unbekannten x aus der Menge D. Die Menge D wird auch der *Definitionsbereich* der Gleichung genannt.

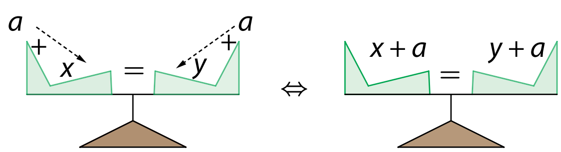
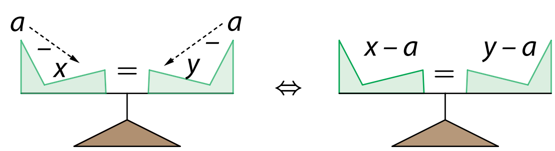
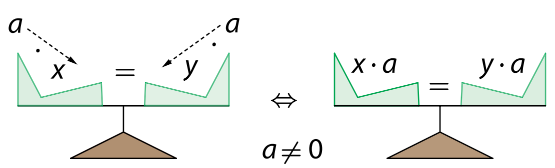
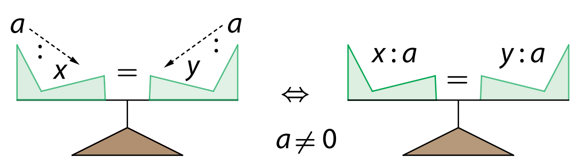
Aufgabe
Bestimmt die ganzen Zahlen in der Menge $D = \{-5, 0, 2, 5\}$ mit der Eigenschaft $x^3 = 25 \cdot x$.

Umformulierung
Löst in der Menge $D = \{-5, 0, 2, 5\}$ die Gleichung $x^3 = 25 \cdot x$ oder
Löst die Gleichung $x^3 = 25 \cdot x$, $x \in \{-5, 0, 2, 5\}$.

Jede Zahl $x \in D$, die die Gleichung (die gegebene Gleichheit) erfüllt, ist eine Lösung der Gleichung. Eine *Gleichung lösen,* bedeutet die Menge aller Lösungen zu bestimmen, die gewöhnlich mit L bezeichnet wird.	Für jedes Element von D wird geprüft, ob es eine Lösung der Gleichung ist. Setzt man $x = -5$ in die Gleichung ein, erhält man $-125 = -125$, was wahr ist. Setzt man in die Gleichung $x = 0$ ein, so erhält man $0 = 0$, was wahr ist. Setzt man in die Gleichung $x = 2$ ein, erhält man $8 = 50$, eine falsche Aussage. Das Einsetzen in die Gleichung von $x = 5$ ergibt $125 = 125$, wahr. Daraus folgt, dass die Zahlen -5, 0, $+5$ die Lösungen der Gleichung sind. Wir schreiben: $L = \{-5, 0, +5\}$.
Zwei Gleichungen sind *äquivalent*, wenn sie denselben *Definitionsbereich* und *dieselben Lösungen* haben.	Die Gleichungen $2 \cdot x = -4, x \in \mathbb{Z}$, und $-4 \cdot x - 8 = 0, x \in \mathbb{Z}$, sind äquivalent, weil sie beide Unbekannte aus der Menge $\mathbb{Z}$, und die gleiche Lösungsmenge haben: $L = \{-2\}$. $\begin{aligned} 2 \cdot x &= -4 \quad \vert :2, \\ x &= -4 : 2 \\ x &= -2. \end{aligned}$ $\qquad$ $\begin{aligned} -4 \cdot x - 8 &= 0 \quad \vert +8 \\ -4 \cdot x &= 8 \quad \vert :(-4) \\ x &= -2. \end{aligned}$ In $\mathbb{Z}$ haben beide Gleichungen die Lösung $x = -2$.

Bemerkung: Die Lösungsmenge einer Gleichung ist eine Teilmenge des Definitionsbereichs der Gleichung.

Ausgehend von einer Gleichung lassen sich äquivalente Gleichheiten durch folgende Umwandlungen erhalten:

Umwandlung	*In mathematischer Sprache*
Man addiert oder subtrahiert die gleiche ganze Zahl von beiden Gliedern der Gleichung.	$x = y \Leftrightarrow x + a = y + a$ für jedes $a \in \mathbb{Z}$; $x = y \Leftrightarrow x - a = y - a$ für jedes $a \in \mathbb{Z}$.
 Wenn $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, dann $x = y \Leftrightarrow x + 7 = y + 7$.	 Wenn $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, dann $x = y \Leftrightarrow x - 7 = y - 7$.
Man multipliziert oder teilt beide Glieder der Gleichheit mit der gleichen von null verschiedenen ganzen Zahl.	$x = y \Leftrightarrow x \cdot a = y \cdot a$ für jedes $a \in \mathbb{Z}^*$; $x = y \Leftrightarrow x : a = y : a$ für jedes $a \in \mathbb{Z}^*$.
 Wenn $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, dann $x = y \Leftrightarrow x \cdot 2 = y \cdot 2$.	 Wenn $\vert x \vert \vdots 2$ und $\vert y \vert \vdots 2$, dann $x = y \Leftrightarrow x : 2 = y : 2$.
Wenn die beiden Glieder der Gleichung *nichtnegative Zahlen* sind, dann kann man auch äquivalente Gleichungen erhalten, wenn beide Glieder der Gleichung eine Potenz von n, einer nichtnegativen natürlichen Zahl, sind.	Wenn $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, $x \geq 0$ und $y \geq 0$, dann $x = y \Leftrightarrow x^n = y^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}^*$.

Beispiele für die Schreibweise der äquivalenten Umwandlungen einer Gleichheit.

a)
$$\begin{aligned} x &= y \quad \vert \cdot 3 \\ 3x &= 3y \quad \vert -1 \\ 3x - 1 &= 3y - 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x &= y \quad \vert \cdot (-2) \\ -2x &= -2y \quad \vert +7 \\ 7 - 2x &= 7 - 2y \end{aligned}$$

c) Für $x \geq 0$, $y \geq 0$
$$\begin{aligned} x &= y \quad \vert (\ )^2 \\ x^2 &= y^2 \quad \vert \cdot 5 \\ 5x^2 &= 5y^2 \quad \vert \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} -3x - 4 &= 3y - 4 \quad \vert +4 \\ -3x &= 3y \quad \vert :(-3) \\ x &= -y \end{aligned}$$

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

1. Löst die Gleichung $(x-1)(2x-3)(2x+8)=0$ in den Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Lösung: Beim Lösen der Gleichung verwenden wir folgendes mathematisches Ergebnis:

Wenn das Produkt von zwei oder mehr ganzen Zahlen gleich 0 ist, dann ist mindestens einer der Faktoren 0.	Wenn a und b ganze Zahlen sind und $a \cdot b = 0$, dann $a = 0$ oder $b = 0$.

Dann: $(x-1)(2x-3)(x+4)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ oder $2x-3=0$ oder $2x+8=0$.

$x-1=0 \mid +1$
$x=1$
$1 \in \mathbb{N}$ und $1 \in \mathbb{Z}$
$x=1$ ist die Lösung sowohl in $\mathbb{N}$ als auch in $\mathbb{Z}$.

$2x-3=0 \mid +3$
$2x=3$ und $3 \not\vdots\, 2$
Die Gleichung hat weder in $\mathbb{N}$ noch in $\mathbb{Z}$ eine Lösung.

$2x+8=0 \mid -8$
$2x=-8 \mid :2$
$x=-4$
$-4 \notin \mathbb{N}$, aber $-4 \in \mathbb{Z}$
$x=-4$ ist die Lösung nur in $\mathbb{Z}$.

Schlussfolgerung: In $\mathbb{N}$ ist die Lösungsmenge $L=\{1\}$ und in $\mathbb{Z}$ ist die Lösungsmenge $L=\{1, -4\}$.
Wir folgern daraus, dass sich die Lösungsmenge einer Gleichung ändern kann, wenn sich der *Definitionsbereich* einer Gleichung ändert.
Die Gleichungen, die am einfachsten zu lösen sind, haben die Form $ax=b$ oder lassen sich (durch äquivalente Umformungen) auf Gleichungen dieser Form zurückführen, wobei a eine von null verschiedene ganze Zahl ist und b eine ganze Zahl ist.
Offensichtlich hat die Gleichung nur dann eine Lösung in $\mathbb{Z}$, wenn $|b| \vdots |a|$, und die Menge der Lösungen ist in diesem Fall $L=\{b:a\}$.

2. Löst die Gleichung $|3x|=12$, $x \in \mathbb{Z}$.

Lösung: Aus der Definition des Betrags wissen wir, dass es zwei ganze Zahlen gibt, die den Betrag 12 haben, nämlich diejenigen, die auf der Zahlenachse im Abstand 12 vom Ursprung dargestellt werden. Dann ist $3x=12$ oder $3x=-12$. Da $12 \vdots 3$ ist, erhalten wir die Lösungen $x_1=12:3=4$ und $x_2=(-12):3=-4$, und die Lösungsmenge ist $L=\{-4, +4\}$.

Übungen und Aufgaben

1. Schreibt die Rechnungen ab und füllt die Lücken mit ganzen Zahlen aus, sodass ihr Gleichheiten erhaltet.
a) $-8+\ldots=-3$; **d)** $48:\ldots=-12$;
b) $-10-\ldots=-4$; **e)** $\ldots:9=-108$;
c) $-4\cdot\ldots=56$; **f)** $(\ldots)^3=-27$.

2. Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.
a) Die Zahl -4 ist Lösung der Gleichung:
A. $x+1=5$; **C.** $3-x=7$;
B. $x+1=-5$; **D.** $3+x=-7$.
b) Die Zahl 3 ist die gemeinsame Lösung der Gleichungen:
A. $x+3=0$ und $x-6=-2$;
B. $x-3=0$ und $5-x=2$;
C. $3-x=0$ und $x+8=12$;
D. $-3+x=-6$ und $-30:x=-10$.
c) Die Gleichung, die Lösungen in der Menge der ganzen Zahlen hat, ist:
A. $2\cdot x+1=22$; **C.** $13-2\cdot x=4$;
B. $3\cdot x-4=16$; **D.** $4\cdot x-1=-5$.

3. Löst folgende Gleichungen in der Menge der ganzen Zahlen:
a) $-6+x=-2$; **d)** $-124:x=-31$;
b) $x-5=-8$; **e)** $x:(1-9)=-72$;
c) $-12\cdot x=156$; **f)** $x^2=100$.

4. Löst folgende Gleichungen in der Menge der ganzen Zahlen:
a) $3\cdot x-6=3$; **d)** $-11\cdot x+22=-33$;
b) $2\cdot x+24=0$; **e)** $x+(-2)^3=-13$;
c) $50-2\cdot x=10$; **f)** $100:(-5)+4\cdot x=12$.

5. Löst folgende Gleichungen in der Menge der ganzen Zahlen:
a) $9\cdot(x-7)=-63$;
b) $(x+4):(-2)^2=-207:23$;
c) $3\cdot x+11=x-4$;
d) $-4\cdot x+6=x+1$;
e) $-52-7\cdot x=4$;
f) $10-(8-x)=13$;
g) $-(-6-x)+5=(-2)^3$;
h) $1-2\cdot[-3-(4-x)]=5$.

6. Bestimmt die ganzen Zahlen x, für die:
a) $|x|=5$; **d)** $|2-x|=1$;
b) $|-x|=7$; **e)** $6+|x-4|=2$;
c) $|x-3|=0$; **f)** $|-4\cdot x|+1=9$.

Minitest

1. Füllt die Lücken so aus, dass ihr wahre Sätze erhaltet.

10 Pkte. **a)** Die Lösung der Gleichung $3 \cdot x + 4 = 43$ ist die Zahl … .

15 Pkte. **b)** Die Lösungsmenge der Gleichung $|1 - 2 \cdot x| = 7$ ist $\{\ldots\}$.

2. Löst die Gleichungen in der Menge der ganzen Zahlen:

15 Pkte. **a)** $2 \cdot x + 7 = 28 - x$;

15 Pkte. **b)** $5 \cdot (x + 4) = 2 \cdot (x + 1) - 11$;

15 Pkte. **c)** $(4 \cdot x - 6) : (-2) + 9 = -8 \cdot x$;

20 Pkte. **d)** $[-24 + 24 : (-8) + 25] \cdot (-10)^2 - 3 \cdot x = -101$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Ungleichungen in der Menge der ganzen Zahlen

Zur Erinnerung

Um zwei ganze Zahlen *a* und *b* zu vergleichen, verwenden wir ihre Darstellung auf der Zahlenachse und die Eigenschaften der Gleichheits- und Ungleichheitsbeziehungen $\leq, \geq, <, >$.

In der Menge der ganzen Zahlen hat die Beziehung $\leq$ die Eigenschaften:

$a \leq a$ für jedes $a \in \mathbb{Z}$	Wenn $a \leq b$ und $b \leq a$, dann $a = b$.	Wenn $a \leq b$ und $b \leq c$, dann $a \leq c$.

Die Eigenschaften der Beziehung „ $\leq$ " gelten auch für die Beziehung „ $\geq$ ".

In der Menge der ganzen Zahlen sind die Beziehungen $<$ und $>$ transitiv.	Wenn $a < b$ und $b < c$, dann $a < c$.	Wenn $a > b$ und $b > c$, dann $a > c$.

Für zwei beliebige ganze Zahlen *a* und *b* gibt es nur eine der folgenden Beziehungen: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

Jede positive ganze Zahl ist größer als jede negative ganze Zahl und größer als 0.	Wenn $a \in \mathbb{Z}_+$ und $b \in \mathbb{Z}_-$, dann $a > b$ und $a > 0$.
Jede negative ganze Zahl ist kleiner als jede positive ganze Zahl und kleiner als 0.	Wenn $a \in \mathbb{Z}_-$ und $b \in \mathbb{Z}_+$, dann $a < b$ und $a < 0$.
Von zwei positiven ganzen Zahlen ist diejenige mit dem kleineren Betrag kleiner.	Für $a \in \mathbb{Z}_+$ und $b \in \mathbb{Z}_+$: Wenn $a < b$, dann $\lvert a \rvert < \lvert b \rvert$. Wenn $\lvert a \rvert < \lvert b \rvert$, dann $a < b$.
Positive ganze Zahlen werden vom Ursprung der Achse nach rechts in steigender Reihenfolge aufgetragen.	$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < \ldots$
Von zwei negativen ganzen Zahlen ist diejenige mit dem größeren Betrag kleiner.	Für $a \in \mathbb{Z}_-$ und $b \in \mathbb{Z}_-$: Wenn $a < b$, dann $\lvert a \rvert > \lvert b \rvert$. Wenn $\lvert a \rvert > \lvert b \rvert$, dann $a < b$.
Negative ganze Zahlen werden vom Ursprung der Achse aus nach links in fallender Reihenfolge aufgetragen.	$0 > -1 > -2 > -3 > -4 > -5 > -6 > \ldots$
Das Produkt zweier ganzer Zahlen mit entgegengesetztem Vorzeichen (eine Zahl ist positiv und die andere negativ) ist eine negative ganze Zahl.	Wenn $a > 0$ und $b < 0$ oder $a < 0$ und $b > 0$, dann $a \cdot b < 0$ und $a \cdot b = -(\lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert)$.
Das Produkt zweier ganzer Zahlen mit demselben Vorzeichen (beide sind positiv oder beide sind negativ) ist eine positive ganze Zahl.	Wenn $a < 0$ und $b < 0$ oder $a > 0$ und $b > 0$, dann $a \cdot b > 0$ und $a \cdot b = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$.

Wir lösen und beobachten

<table>
<tr><th>Aufgabe 1</th><th colspan="2">Interpretation</th></tr>
<tr><td colspan="2">Zum Doppelten der ganzen Zahl x wird -12 addiert. Man erhält eine negative ganze Zahl. Bestimmt x.</td><td>Bestimmt die ganze Zahl x, für die
$2 \cdot x + (-12) < 0$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Das Problem der Bestimmung der ganzen Zahl x, für die $2 \cdot x + (-12) < 0$ ist, wird wie folgt umformuliert:
„Löst in $\mathbb{Z}$ die Ungleichung $2 \cdot x + (-12) < 0$." oder „Löst die Ungleichung $2 \cdot x + (-12) < 0, x \in \mathbb{Z}$."</td></tr>
<tr><td>Wir lösen
die Ungleichung:</td><td>$2 \cdot x + (-12) < 0 \Leftrightarrow$ $2 \cdot x - 12 < 0 \mid +12$
$2 \cdot x < +12 \quad \mid : 2 \text{ und } 2 > 0$
$x < 6$.</td><td>1. Wir addieren 12 zu beiden Gliedern.
2. Wir teilen beide Glieder durch $2 > 0$.
3. Wir finden die Lösungen der Ungleichung.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Die Lösungen der Ungleichung sind alle ganzen Zahlen kleiner als 6, also $L = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.</td></tr>
</table>

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

<table>
<tr><td>Die Bestimmung von Zahlen $x \in D$, die eine gegebene Ungleichheit erfüllen, nennt man Ungleichung mit der Unbekannten x aus der Menge D.</td><td>Aufgabe: Bestimmt die ganzen Zahlen in der Menge $D = \{-5, 0, 2, 5\}$ mit der Eigenschaft $x^2 \geq 20$.

Umformulierung
„Löst in der Menge $D = \{-5, 0, 2, 6\}$ die Ungleichung $x^2 \geq 20$" oder
„Löst die Ungleichung $x^2 \geq 25, x \in \{-5, 0, 2, 6\}$".</td></tr>
<tr><td>Jede Zahl $x \in D$, die die Ungleichung erfüllt, ist eine Lösung der Ungleichung. Die Ungleichung lösen bedeutet, die Menge aller Lösungen zu bestimmen, die gewöhnlich mit L bezeichnet wird.</td><td>Man prüft für jedes Element von D, ob es eine Lösung der Ungleichung ist.
Setzt man $x = -5$ in die Gleichung ein, erhält man $25 \geq 20$, was wahr ist.
Setzt man $x = 0$ in die Gleichung ein, erhält man $0 \geq 20$, was falsch ist.
Setzt man $x = 2$ in die Gleichung ein, erhält man $4 \geq 20$, falsch.
Setzt man $x = 6$ in die Gleichung ein, erhält man $36 \geq 20$, wahr.
Daraus folgt, dass die Zahlen -5 und $+6$ die Lösungen der Ungleichung sind, und wir schreiben $L = \{-5, +6\}$.</td></tr>
<tr><td>Zwei Ungleichungen sind äquivalent, wenn sie denselben Bereich und dieselben Lösungen haben.</td><td>Die Ungleichungen $2 \cdot x \geq -4, x \in \mathbb{Z}$, und $-4 \cdot x - 8 \leq 0, x \in \mathbb{Z}$, sind äquivalent, weil sie beide Unbekannte aus der Menge $\mathbb{Z}$ und dieselbe Lösungsmenge haben; die Menge aller ganzen Zahlen größer oder gleich -2.
$2 \cdot x \geq -4 \quad \mid : 2 \text{ und } 2 > 0$ $-4 \cdot x - 8 \leq 0 \quad \mid +8$
$x \geq -4 : 2$ $-4 \cdot x \leq 8 \quad \mid : (-4), -4 < 0$
$x \geq -2$. $x \geq -2$.
Die Lösungen der Ungleichung sind alle ganzen Zahlen kleiner oder gleich -2.</td></tr>
</table>

Beim Lösen von Ungleichungen ist es nützlich, sie so umzuformen, dass einfachere Ungleichungen entstehen, mit deren Hilfe die Lösungen der ursprünglichen Ungleichung gefunden werden können.

Man addiert oder subtrahiert die gleiche ganze Zahl von beiden Gliedern der Ungleichung.	Wenn a und b ganze Zahlen sind und $a \leq b$, dann $a + c \leq b + c$ und $a - c \leq b - c$ für jedes $c \in \mathbb{Z}$.
Man addiert zwei Ungleichungen der gleichen Art Glied für Glied.	Wenn a, b, c und d ganze Zahlen sind, $a \leq b$ und $c \leq d$, dann gilt $a + c \leq b + d$.
Man multipliziert beide Glieder der Ungleichung mit der gleichen positiven ganzen Zahl oder teilt sie durch die gleiche positive Zahl.	Wenn a und b ganze Zahlen sind und $a < b$ und $c \in \mathbb{Z}_+$, dann $a \cdot c < b \cdot c$, und wenn $c \mid a$ und $c \mid b$, dann $a : c < b : c$.
Wenn beide Glieder der Ungleichung mit der gleichen negativen Zahl multipliziert oder durch die gleiche negative Zahl geteilt werden, wird das Ungleichheitszeichen umgekehrt.	Wenn a und b ganze Zahlen sind und $a < b$, dann $a \cdot c > b \cdot c$ für jedes $c \in \mathbb{Z}_-$.

Bemerkung: Ähnliche Eigenschaften wie oben gelten für die Beziehungen $>, \leq, \geq$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Aufgabe **1.** Das Produkt der negativen ganzen Zahl x und der Zahl -5 ist höchstens 20. Bestimmt die Werte der Zahl x.

Lösung

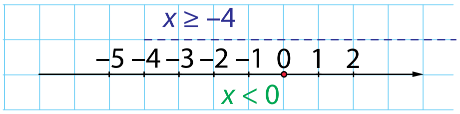
Wir schreiben die Aufgabe als Ungleichung $-5 \cdot x \leq 20$ in der Menge $\mathbb{Z}_-$.

Lösungen der Ungleichung sind ganze Zahlen, die auf der Achse links vom Ursprung liegen, bis einschließlich -4.

In $\mathbb{Z}_-$ ist die Menge der Lösungen $L = \{-4, -3, -2, -1\}$.

$-5 \cdot x \leq 20 \;|\; :(-5)$ und $-5 < 0$

$x \geq -4.$



Bemerkung: Müsste man in $\mathbb{Z}$ lösen, dann wären alle nichtnegativen ganzen Zahlen ebenfalls Lösungen der Ungleichung.

Aufgabe **2**

Bestimmt die ganzen Zahlen mit der Eigenschaft $6 \cdot x - 14 > 4 \cdot x - 18$, deren Betrag kleiner als 4 ist.

Lösung

$6 \cdot x - 14 > 4 \cdot x - 18 \;|\; +14$

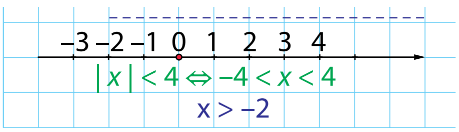
$6 \cdot x > 4 \cdot x - 4 \;|\; -(4 \cdot x)$

$2 \cdot x > -4 \;|\; :2$

$x > -2$

1. Wir haben 14 zu beiden Gliedern der Ungleichung hinzugefügt.
2. Wir subtrahieren $4 \cdot x$ von beiden Gliedern der Ungleichung.
3. Wir haben beide Glieder durch die positive Zahl 2 geteilt.
Wir wissen, dass die Lösungen ganze Zahlen größer als -2 sind.

Aber die Lösungen der Aufgabe sind nur die Zahlen größer als -2, die einen Betrag kleiner als 4 haben, d. h. zwischen -4 und $+4$.



Die ganzen Zahlen zwischen -4 und 4, die größer als -2 sind, sind -1, 0, 1, 2 und 3, also:
$L = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

Übungen und Aufgaben

1. Schreibt:

a) alle negativen ganzen Zahlen größer als -5;

b) alle nichtnegativen ganzen Zahlen, die höchstens $+4$ sind;

c) die ganzen Zahlen mit einem Betrag kleiner als 3.

2. Wählt die richtige Antwort aus. Nur eine Antwort stimmt.

a) Eine negative ganze Zahl, die die Ungleichung $x + 3 < -2$ erfüllt, ist:

A. -4; **B.** -6; **C.** -2; **D.** -5.

b) Eine positive ganze Zahl, die die Ungleichung $4 - x > 1$ erfüllt, ist:

A. 5; **B.** 4; **C.** 2; **D.** 3.

c) Die größte ganze Zahl x, für die $3 \cdot x + 2 \leq 17$ ist, ist:

A. -5; **B.** 5; **C.** 4; **D.** 18.

d) Die kleinste ganze Zahl y, für die $2 \cdot y \geq -30$ ist, ist:

A. -28; **B.** -15; **C.** -32; **D.** -16.

3. Bestimmt alle ganzen Zahlen x, für die:

a) $x \geq -12$ und $x < -8$; **c)** $x \geq -1$ und $x < 1$;

b) $x > -2$ und $x \leq 1$; **d)** $x > -6$ und $x \in \mathbb{Z}_-$.

4. Löst die Ungleichungen:

a) $x - 7 < -4$ und $x \in \mathbb{N}$;

b) $x + 5 > 13$ und $x \in \mathbb{Z}$;

c) $4 \cdot x \geq -12$ und $x \in \mathbb{Z}_-$;

d) $3 \cdot x + 8 \leq -x - 4$ und $x \in \mathbb{Z}$;

e) $|x| - 6 < -2$ und $x \in \mathbb{Z}$;

f) $19 - 2 \cdot x + 8 > 3 \cdot x + 2$ und $x \in \mathbb{Z}$.

5. **a)** Von den ganzen Zahlen a und b ist bekannt, dass $a + b < 0$, $a \cdot b > 0$ und $|a| < |b|$. Schreibt die Zahlen a, b und 0 in steigender Reihenfolge.

b) Von den ganzen Zahlen c und d ist bekannt, dass $c + d > 0$, $c^2 \cdot d < 0$. Schreibt die Zahlen c, d und 0 in fallender Reihenfolge.

Minitest

1. Füllt die Lücken so aus, dass ihr wahre Sätze erhaltet.

10 Pkte. **a)** Ganze Zahlen größer als –3 und höchstens gleich 2 bilden die Menge $\{\ldots\}$.

15 Pkte. **b)** Die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 \leq 0$ ist ….

15 Pkte. **c)** Die kleinste ganze Zahl x, für die $x - 7 \leq 2 \cdot x + 3$ ist, ist … .

2. Löst die Ungleichungen:

2×15 Pkte. **a)** $2 \cdot x - 3 < 7, x \in \mathbb{N}$; **b)** $3 \cdot x - 7 < 2 \cdot x - 5, x \in \mathbb{Z}$.

3. Die Summe von drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen liegt zwischen –71 und –67.

10 Pkte. **a)** Bezeichnet die kleinste der drei Zahlen mit x und schreibt die Ungleichungen, die den Bedingungen der Aussage entsprechen.

10 Pkte. **b)** Bestimmt die ganze Zahl x, die die gemeinsame Lösung der Ungleichungen in Unterpunkt a) ist.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L3 Aufgaben, die mithilfe von Gleichungen/Ungleichungen im Kontext der ganzen Zahlen gelöst werden

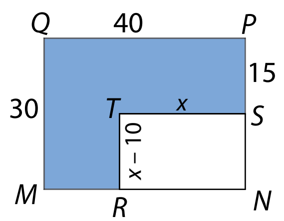
Wir lösen und beobachten

Aufgabe **1.** Die Abmessungen der Rechtecke *MNPQ* und *RNST* sind in derselben Maßeinheit (Me) ausgedrückt.

a) Formuliert eine Gleichung mit der Unbekannten x, die auf eine Gleichung der Form $a \cdot x + b = 0$ reduzierbar ist, mit $a, b \in \mathbb{Z}$, unter Verwendung der Daten in der nebenstehenden Abbildung.

b) Löst die in Punkt a) erhaltene Gleichung.

c) Bestimmt die Längen der Strecken *TS, TR* und *MR*.



Lösung: **a)** Da *RNST* ein Rechteck ist, folgt, dass $SN = RT = x - 10$. Da *MNPQ* ein Rechteck ist, folgt, dass $NP = MQ = 30$. Aber $SN + SP = NP$, d. h., $(x - 10) + 15 = 30$.

b) Mithilfe der Assoziativität der Addition wird die Gleichung zu $x - 10 + 15 = 30$, dann $x + 5 = 30 \Leftrightarrow x = 25$.

c) $TS = x = 25$ (Me); $TR = x - 10 = 25 - 10 = 15$ (Me); $MR = MN - x = PQ - x = 40 - 25 = 15$ (Me)

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Viele der in der Praxis auftretenden Probleme lassen sich mathematisch lösen.
Das mit dem Problem verbundene mathematische Modell kann zu algebraischen Begriffen und Lösungsmethoden führen.
Wenn das Problem durch eine *Gleichung* oder eine *Ungleichung* mit *ganzzahligen* Lösungen umformuliert werden kann, muss zur Lösung des Problems der beigefügte Algorithmus befolgt werden.

Schritt 1. *Wir bestimmen die Unbekannte*, bezeichnen sie und schreiben die Beziehungen zwischen den auftretenden Größen in mathematischer Sprache auf.
Schritt 2. *Wir schreiben* die Gleichung oder Ungleichung auf.
Schritt 3. *Wir lösen* die Gleichung oder Ungleichung.
Schritt 4. *Wir interpretieren* die Lösungen der Gleichung oder Ungleichung unter Berücksichtigung des Bereichs, in dem wir nach Lösungen für das Problem suchen.
Schritt 5. Wir formulieren die *Schlussfolgerung*.

Bemerkung: Es ist sinnvoll, die erhaltene(n) Lösung(en) zu überprüfen, um eventuelle Fehler zu korrigieren.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Aufgabe 1. Marius und Mihai haben zusammen 200 Lei. Wenn Marius sich 14 Lei von Mihai leiht, hat Mihai ein Drittel der Summe, die Marius hat. Bestimmt die Summe, die jeder am Anfang hatte.

Lösung

Schritt 1. Wir bestimmen die Unbekannte.	Wir bezeichnen mit a die Geldsumme, die Mihai am Anfang hatte.		**Mihai**	**Marius**
Wir schreiben in mathematischer Sprache die Beziehungen zwischen den Größen auf, die in der Aufgabe vorkommen.	Dann hatte Marius am Anfang $200 - a$ (Lei). Nachdem Marius sich 14 Lei von Mihai geliehen hat, wird Marius $(200 - a) + 14$ (Lei) haben, und Mihai wird $a - 14$ (Lei) haben.	***I***	a	$200 - a$
		II	$a - 14$	$214 - a$
Schritt 2. Wir schreiben die Gleichung auf.	Da Mihai ein Drittel der Summe von Marius hat, ist $a - 14 = [(200 - a) + 14] : 3$.			
Schritt 3. Wir lösen die Gleichung.	$a - 14 = [(200 - a) + 14] : 3 \quad \vert \cdot 3$ $3a - 42 = 214 - a \quad \vert + (a + 42)$ $4a = 256 \quad \vert : 4$ $a = 64$	Wir multiplizieren beide Glieder der Gleichung mit 3. Wir addieren $a + 42$ zu beiden Gliedern. Wir teilen die beiden Glieder der Gleichung durch 4.		
Schritt 4. Wir interpretieren die Lösung und formulieren das Ergebnis.	Wir folgern, dass Mihai am Anfang 64 Lei hatte und Marius $200 - 64 = 136$ (Lei). Um sicher zu sein, dass wir richtig gerechnet haben, überprüfen wir das Ergebnis. Wenn Marius sich nämlich 14 Lei von Mihai leiht, dann hat Mihai nur noch 50 Lei, also ein Drittel der 150 Lei von Marius.			

Antwort: Mihai hatte 64 Lei und Marius hatte 136 Lei.

Aufgabe 2
Ioana hat 50 Lei gespart, hat aber 250 Lei Schulden. Sie will diese zurückzahlen, indem sie die 50 Lei verwendet und über drei Monate hinweg gleiche Geldsummen spart.
Finde die kleinste ganzzahlige Summe, die Ioana in jedem der drei Monate sparen sollte.

Lösung: Wir bezeichnen mit x die Summe, die Ioana in einem Monat spart. Dann wird sie in den drei Monaten $3x$ Lei sparen. Da Ioana die Schulden zurückzahlt, indem sie diesen Betrag spart und die 50 Lei verwendet, bedeutet dies, dass $3x + 50 \geq 250$, d. h. $3x \geq 200$. Da x eine ganze Zahl ist, folgt daraus, dass $3x$ ein Vielfaches von 3 ist, größer oder gleich 200. Dann ist $3x \in \{201, 204, 207, \ldots\}$. Die kleinste Summe x ergibt sich für $3x = 201$, d. h., $x = 201 : 3$, also $x = 67$.

Antwort: Ioana muss mindestens 67 Lei pro Monat sparen.

Übungen und Aufgaben

1. Bestimmt eine ganze Zahl, wenn man weiß, dass ihre Multiplikation mit -3 das gleiche Ergebnis liefert wie ihre Addition mit 20.

2. Bestimmt eine ganze Zahl, wenn ihr wisst, dass ihre Division durch 4 eine Zahl ergibt, die um 155 kleiner ist als ihre entgegengesetzte Zahl.

3. Die Differenz zwischen einer ganzen Zahl und dem Produkt ihrer entgegengesetzten Zahl und 5 ist -96. Bestimmt die Zahl.

4. Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist -45. Bestimmt die kleinste und die größte der Zahlen.

5. Auf einem Blatt Papier stehen drei verschiedene negative ganze Zahlen geschrieben. Wenn wir von jeder Zahl 13 abziehen und die Ergebnisse addieren, erhalten wir -45. Bestimmt die drei Zahlen.

6. Die Summe von zehn aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist -25. Berechnet das Produkt dieser Zahlen.

7. Bestimmt die negativen ganzen Zahlen, die mit –5 addiert mindestens die Summe $(-2)^3$ ergeben.

8. Bestimmt eine ganze Zahl x, von der man weiß, dass sie, wenn man sie um 10 verkleinert, eine positive ganze Zahl ergibt, die kleiner ist als 3.

9. Dan hat um 60 Lei weniger als Lucia. Wenn er 45 Lei von ihr bekäme, hätte er um 7 Lei mehr als das Doppelte der Summe, die Lucia übrig geblieben ist. Berechnet die Geldsumme, die jeder von ihnen hat.

10. Bestimmt alle natürlichen Zahlen, die, wenn man sie mit 2 multipliziert und zum Ergebnis –24 addiert, eine negative ganze Zahl ergeben.

11. Das Produkt der ganzen Zahlen $2 \cdot x - 1$, $3 \cdot x + 2$, $4 \cdot x - 3$, $5 \cdot x + 5$ ist 0.
   a) Bestimmt die vier Zahlen.
   b) Berechnet die Summe der gefundenen Zahlen.

12. Ein Quadrat hat durch natürliche Zahlen ausgedrückte Seitenlängen in Zentimetern und einen Flächeninhalt von höchstens 10 cm^2.
   Berechnet die Seitenlänge des Quadrats und seinen größtmöglichen Umfang.

ABSCHLIEẞENDE BEWERTUNG

I. *Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.*

5 Pkte. **1.** Wenn $A=\left\{-2;0;\frac{5}{2};\frac{5}{2};-5\right\}$, dann ist $A \cap \mathbb{Z}\_$:

A. $\{-2, 0, -5\}$ **B.** $\left\{\frac{5}{2};\frac{5}{1}\right\}$; **C.** $\left\{-2;0;\frac{5}{1};-5\right\}$; **D.** $\{-2, -5\}$.

5 Pkte. **2.** Die Zahl $|\,7+1\,| + |\,-8\,|$ ist gleich:

A. 0; **B.** 16; **C.** –16; **D.** 1.

5 Pkte. **3.** Wenn $|x| = 4$ und $x < 0$, dann ist $x + 44$:

A. 48; **B.** – 48; **C.** – 40; **D.** 40.

5 Pkte. **4.** Die kleinste der Zahlen $a = -32 + 23$, $b = -7 - (+8)$, $c = -3 \cdot (+4)$, $d = 56 : (-4)$, ist:

A. a; **B.** b; **C.** c; **D.** d.

5 Pkte. **5.** Wenn $(-3)^n = -27$, dann ist die Zahl $(-2)^n$ gleich:

A. –2; **B.** –4; **C.** –8; **D.** –16.

5 Pkte. **6.** Das Ergebnis der Rechnung $(-2)^1 \cdot (-1) + (-2)^2 \cdot (-2) + (-2)^3 \cdot (-3)$ ist:

A. 18; **B.** 16; **C.** –18; **D.** –8.

II. *Schreibt die vollständigen Lösungen auf.*

1. Es seien die Zahlen $a = -2 - (-4) + 6$, $b = |\,28 - 32\,| - |+42\,|$, $c = [(-2)^3 \cdot (-2)^4] : [(-2)^7 : (-2)^2]$.

10 Pkte. **a)** Berechnet a, b, c.

10 Pkte. **b)** Bestimmt, ob die Zahl $9 \cdot (a - c) + b$ positiv, negativ oder 0 ist.

10 Pkte. **2.** **a)** Wenn $x \cdot y + x \cdot z = -5$, berechnet $2 \cdot x \cdot (y + z)$.

10 Pkte. **b)** Wenn $x \cdot (y + z) = 63$ und $x = -7$, berechnet $y + z$.

3. Auf einem Blatt stehen drei verschiedene negative ganze Zahlen. Wenn wir von jeder der Zahlen 17 subtrahieren und die Ergebnisse addieren, erhalten wir –57.

10 Pkte. **a)** Berechnet die Summe der drei Zahlen.

10 Pkte. **b)** Bestimmt die drei Zahlen.

Bemerkung: Arbeitszeit: 50 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

4. DIE MENGE DER RATIONALEN ZAHLEN

4.1 Rationale Zahl. Die Menge der rationalen Zahlen

L1 Rationale Zahl

Zur Erinnerung

Alle gemeinen Brüche, die zu $\frac{a}{b}$ äquivalent sind, wobei a und b von null verschiedene natürliche Zahlen sind, bilden *die positive rationale Zahl* $\frac{a}{b}$.

Eine *rationale Zahl kann* durch jeden ihrer Repräsentanten *benannt werden*.

Die folgenden Brüche sind Repräsentanten der gleichen positiven rationalen Zahl $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \ldots, \frac{100}{300}, \ldots$

Jede *positive rationale Zahl* kann einzigartig als unkürzbarer gemeiner Bruch $\frac{a}{b}$ geschrieben werden, wobei a und b natürliche Zahlen sind, $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

Die obige positive rationale Zahl lässt sich *einzigartig* in ihrer *unkürzbaren* Form $\frac{1}{3}$ schreiben.

Bemerkungen: **1.** Die von null verschiedenen natürlichen Zahlen sind positive rationale Zahlen.
2. Die Brüche $\frac{0}{b}$, $b \neq 0$, bilden die *rationale* Zahl 0.

Jede positive rationale Zahl kann *einzigartig* als *Dezimalbruch* geschrieben werden.

Um einen *Dezimalbruch mit einer endlichen Anzahl von Dezimalstellen* in einen gemeinen Bruch umzuwandeln, schreiben wir als Zähler die natürliche Zahl, die wir erhalten, wenn wir das Komma des Dezimalbruchs weglassen, und als Nenner 10^k, wobei k die Anzahl der Dezimalstellen darstellt.

$\overline{a_1 \ldots a_n, b_1 \ldots b_k} = \dfrac{\overline{a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_k}}{10^k}$	$0{,}2 = \dfrac{2}{10}$; $0{,}625 = \dfrac{625}{10^3}$.

Um einen *einfachen periodischen Bruch* in einen gemeinen Bruch umzuwandeln, schreiben wir als *Zähler* die Differenz zwischen der natürlichen Zahl, die man erhält, wenn man das Komma weglässt, und der natürlichen Zahl, die den Teil links vom Komma darstellt. Als *Nenner* schreiben wir die Zahl, die aus k-mal der Ziffer 9 gebildet ist, wobei k die Anzahl der Dezimalstellen der Periode ist.

$\overline{a_1 \ldots a_n, (p_1 \ldots p_k)} = \dfrac{\overline{a_1 \ldots a_n p_1 \ldots p_k} - \overline{a_1 \ldots a_n}}{\underbrace{99 \ldots 9}_{k \text{ Ziffern}}}$	$1{,}(31) = \dfrac{131-1}{99} = \dfrac{130}{99}$; $0{,}(932) = \dfrac{931-0}{999} = \dfrac{931}{999}$.

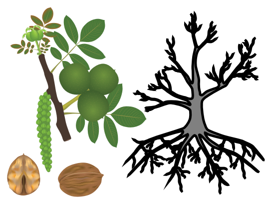
Um einen *gemischtperiodischen Bruch* in einen gemeinen Bruch umzuwandeln, schreiben wir als Zähler die Differenz zwischen der natürlichen Zahl, die man durch Entfernen des Dezimalkommas erhält, und der natürlichen Zahl, die von allen Ziffern gebildet wird, die sich nicht in der Periode befinden. Als Nenner schreiben wir die Zahl, die von k-mal der Ziffer 9, gefolgt von m-mal der Ziffer 0 gebildet wird, wobei k die Anzahl der Dezimalstellen in der Periode und m die Anzahl der Dezimalstellen, die sich nicht in der Periode befinden, ist.

$\overline{a_1 \ldots a_n, b_1 \ldots b_m (p_1 \ldots p_k)} = \dfrac{\overline{a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m p_1 \ldots p_k} - \overline{a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m}}{\underbrace{99 \ldots 9}_{k \text{ Ziffern}}\ \underbrace{00 \ldots 0}_{m \text{ Ziffern}}}$	$3{,}10(7) = \dfrac{3107-310}{900} = \dfrac{2797}{900}$; $0{,}328(32) = \dfrac{32832-328}{99000} = \dfrac{32504}{99000}$.

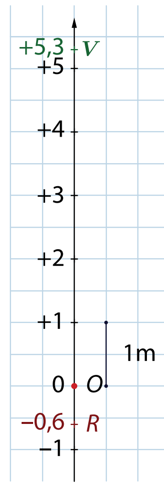
Wir lösen und beobachten

Im Garten meiner Großeltern genießen wir im Sommer oft den Schatten des vor vielen Jahren gepflanzten Walnussbaums.
Es ist ein majestätischer Baum. Ich frage meinen Großvater, wie tief die Wurzeln in den Boden reichen, um eine so große Krone zu tragen. Großvater antwortet: Mal sehen, was wir über den Walnussbaum wissen.

Wusstest du, dass ...?
... der Walnussbaum der sowohl für seine Samen als auch für sein Holz sehr geschätzt wird, einer der ältesten Obstbäume ist, die der Mensch kennt und anpflanzt (es gibt fossile Funde, die die Existenz einiger Walnussbaumarten bereits vor 9000 Jahren belegen)?
Der Walnussbaum kann 20–25 Meter hoch werden und einen Kronendurchmesser von bis zu 10 Metern erreichen.
Die Wurzeln reichen in der Regel bis in eine Tiefe von 0,2–0,8 m. Nur in sehr sandigen Böden erreichen sie 1,4 m Tiefe.
In der horizontalen Ebene übertrifft die Wurzel eines ausgewachsenen Walnussbaums den Kronenradius um das 4- bis 7-fache. Die maximale Dichte aktiver Wurzeln liegt jedoch 3–4 m vom Stamm des Walnussbaums entfernt.



Der Walnussbaum ist solitär, die Abbildung auf der rechten Seite stellt ihn nicht dar.
Informiert euch und begründet diese Aussage.



Lasst uns nun eine Aufgabe lösen. Wir stellen uns die vertikale *Achse* vor, auf der der Baum wächst, mit der *positiven Richtung* nach oben. Nehmen wir an, dass der Stamm durch einen Punkt *O*, den *Ursprung* dieser Achse, in den Boden eintritt.
Wenn bekannt ist, dass dieser Walnussbaum etwa 5,3 m hoch ist und die Wurzeln eine Tiefe von 0,6 m erreichen, zeichne auf der Achse den Punkt ein, der dem Wipfel des Baumes (dem *höchsten Punkt* der Krone) entspricht, und den Punkt, der dem *tiefsten Punkt* der Wurzeln entspricht, wobei wir die Einheit 1 m verwenden.
Bestimmt, welcher Punkt einer *positiven Zahl* und welcher einer *negativen* Zahl entspricht.

Lösung

Der *Wipfel* ist in der positiven Richtung der Achse ausgerichtet, er entspricht also der positiven rationalen Zahl +5,3. Die *Wurzelspitze* ist in die entgegengesetzte Richtung ausgerichtet, sie entspricht also der negativen Zahl, die sich 0,6 Einheiten vom Ursprung befindet. Wir notieren diese Zahl −0,6.

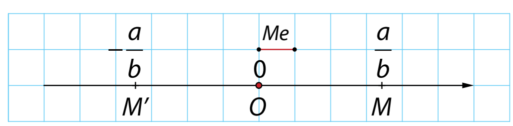
Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Jedes von null verschiedene natürliche Zahlenpaar (a, b) bestimmt die positive rationale Zahl $\frac{a}{b}$. Wir bezeichnen die Menge der positiven rationalen Zahlen mit $\mathbb{Q}_+$.

$\frac{7}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{33}; \frac{9}{3}; \frac{7}{1}; \frac{4}{4}$ sind positive rationale Zahlen.

Wir betrachten die Zahlenachse mit dem Ursprung $O(0)$ und der Einheit, auf der wir die positive Richtung von links nach rechts festgelegt haben.

Jede positive rationale Zahl $\frac{a}{b}$ wird auf der Achse durch einen einzigen Punkt dargestellt, $M\left(\frac{a}{b}\right)$, der sich rechts vom Ursprung im Abstand $\frac{a}{b}$ befindet.



Der Symmetriepunkt M' des Punktes $M\left(\frac{a}{b}\right)$ in Bezug auf O befindet sich im gleichen Abstand vom Ursprung, aber links davon. Die Zahl, die dem Punkt M' entspricht, wird mit $-\frac{a}{b}$ bezeichnet und heißt *der Zahl* $\frac{a}{b}$ *entgegengesetzte Zahl*. Die Zahl $-\frac{a}{b}$ ist eine *negative rationale Zahl*.

Beispiele: $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ sind entgegengesetzte rationale Zahlen.
Da $\frac{1}{2} = 0{,}5$, folgern wir, dass $-\frac{1}{2} = -0{,}5$.
Wir haben die entgegengesetzten rationalen Zahlen $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ als Dezimalbrüche ausgedrückt.

Wenn a eine negative ganze Zahl ist und b eine von null verschiedene natürliche Zahl ist, dann bestimmt das Paar (a, b) die negative rationale Zahl $\frac{a}{b}$.
Wir bezeichnen die Menge der negativen rationalen Zahlen mit $\mathbb{Q}_-$.

Negative rationale Zahlen:
$-\frac{7}{3}; -\frac{2}{5}; -\frac{1}{33}; -\frac{9}{3}; -\frac{7}{1}; -\frac{4}{4}$.

Unter Anwendung der Vorzeichenregel bei der Division ganzer Zahlen leiten wir Folgendes ab:

Jedes Paar von ganzen Zahlen, in dem beide Zahlen positiv oder beide negativ sind, bestimmt eine *positive rationale* Zahl.	$\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3}$; $\frac{2}{5} = \frac{-2}{-5}$; $\frac{7}{1} = \frac{-7}{-1}$
Jedes Paar von ganzen Zahlen, in dem eine der Zahlen positiv und die andere negativ ist, bestimmt eine *negative rationale* Zahl.	$-\frac{1}{3} = \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3}$; $-\frac{2}{5} = \frac{-2}{5} = \frac{2}{-5}$

Jedes Paar von ganzen Zahlen (a, b), $b \neq 0$, bestimmt die *rationale* Zahl $\frac{a}{b}$.

Bemerkung: Die Paare $(0, b)$, $b \in \mathbb{Z}^*$, bestimmen die rationale Zahl $\frac{0}{b} = 0$. $\frac{0}{3}; \frac{0}{-3}; \frac{0}{13}; \frac{0}{1}$

Die Menge, die aus allen positiven rationalen Zahlen, aus allen negativen rationalen Zahlen und aus der rationalen Zahl 0 besteht, heißt *Menge der rationalen Zahlen* und wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}.$$

Bemerkungen: **1.** Die Zahl 0 ist weder positiv noch negativ.
2. Die Menge der von null verschiedenen rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}^*$, bezeichnet, also $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$ oder $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Aufgabe 1

Schreibt für jeden der folgenden Fälle ein Beispiel:	*Lösung*
1. Ganze Zahl, die eine natürliche Zahl ist.	**1.** $7 \in \mathbb{Z}$ und $7 \in \mathbb{N}$.
1'. Ganze Zahl, die nicht natürlich ist.	**1'.** $-3 \in \mathbb{Z}$ und $-3 \notin \mathbb{N}$.
2. Rationale Zahl, die eine ganze Zahl ist.	**2.** $-7 \in \mathbb{Q}$ und $-7 \in \mathbb{Z}$.
2'. Rationale Zahl, die keine ganze Zahl ist.	**2'.** $\frac{7}{2} \in \mathbb{Q}$ und $\frac{7}{2} \notin \mathbb{Z}$.
3. Rationale Zahl, die natürlich ist.	**3.** $2 \in \mathbb{Q}$ und $2 \in \mathbb{N}$.
3'. Rationale Zahl, die nicht natürlich ist.	**3'.** $0{,}5 \in \mathbb{Q}$ und $0{,}5 \notin \mathbb{N}$.

Wir merken uns

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, also:

1. Jede natürliche Zahl ist eine ganze Zahl: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.	**1'.** Es gibt ganze Zahlen, die nicht natürlich sind: $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$.
2. Jede ganze Zahl ist eine rationale Zahl: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.	**2'.** Es gibt rationale Zahlen, die nicht ganze Zahlen sind: $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$.
3. Jede natürliche Zahl ist eine rationale Zahl: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.	**3'.** Es gibt rationale Zahlen, die nicht natürlich sind: $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{N}$.

In der Praxis werden rationale Zahlen, je nach Kontext, als unkürzbare gemeine Brüche, als kürzbare gemeine Brüche oder als Dezimalbrüche ausgedrückt. Die Methoden der Umwandlung aus einer Form in eine andere entsprechen denen, die weiter oben für die positiven rationalen Zahlen erklärt worden sind.

Aufgabe 2

a) Drückt die rationalen Zahlen als Dezimalbrüche aus:

$\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{7}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{9}{22}; -\frac{9}{22}$.

b) Schreibt die rationalen Zahlen als unkürzbare gemeine Brüche:

0,2; –0,2; 2,(2); –2,(2); 0,1(5); –0,1(5).

Lösung

a) Nach Durchführung der Divisionen erhält man:

$\frac{1}{2} = 0{,}5$; $-\frac{1}{2} = -0{,}5$; $\frac{7}{3} = 2{,}(3)$; $-\frac{7}{3} = -2{,}(3)$;

$\frac{9}{22} = 0{,}4(09)$; $-\frac{9}{22} = -0{,}4(09)$.

b) $0{,}2 = {}^{(2}\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; $-0{,}2 = -\frac{1}{5}$; $2{,}(2) = \frac{22-2}{9} = \frac{20}{9}$;

$-2{,}(2) = -\frac{20}{9}$; $0{,}1(5) = \frac{15-1}{90} = {}^{(2}\frac{14}{90} = \frac{7}{45}$; $-0{,}1(5) = -\frac{7}{45}$.

Übungen und Aufgaben

1. Füllt die leeren Kästchen nach dem angegebenen Muster mit dem Buchstaben ***W*** aus, wenn die Aussage wahr ist, und mit dem Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

Aussage \ a	2	–3	$\frac{5}{2}$	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{+15}{+3}$	$\frac{-12}{6}$
$a \in \mathbb{N}$	***W***						
$a \in \mathbb{Z}$	***W***						
$a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	***F***						
$a \in \mathbb{Q}$	***W***						
$a \in \mathbb{Q}_-$	***F***						
$a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$	***F***						

2. Schreibt je fünf Elemente folgender Mengen auf:
a) $\mathbb{Q}$; **c)** $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$; **e)** $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;
b) $\mathbb{Q}_+$; **d)** $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; **f)** $\mathbb{Q}_-$.

3. Es seien die Mengen $A = \{-3, -2, 0, 2, 6\}$ und $B = \{-2, -1, 1, 3\}$.

a) Schreibt die Menge C der rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$, wobei $a \in A$ und $b \in B$.

b) Bestimmt die Mengen $C \cap \mathbb{Q}_-$ und $C \cap \mathbb{Q}^*$.

4. Schreibt je drei Repräsentanten (gemeine Brüche) für jede der rationalen Zahlen:

a) $-\frac{5}{3}$; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** –1; **d)** 2,3.

5. Es sei die Zahl $r = \frac{-10}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^*$.
Bestimmt n für:

a) $r \in \mathbb{N}$; **b)** $r \in \mathbb{Z}$.

6. Füllt die Lücken nach dem angegebenen Muster mit dem Buchstaben ***W*** aus, wenn die Aussage wahr ist, und mit dem Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

Aussage	***W/F***
a) $\frac{3}{5} = \frac{-3}{-5}$;	
b) $\frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$;	
c) $\frac{-8}{3} = -\frac{8}{3}$;	

Aussage	***W/F***
d) $\frac{0}{-2} = \frac{0}{2}$;	
e) $\frac{-5}{9} = \frac{10}{-16}$;	
f) $\frac{-6}{2} = 3$.	

7. Schreibt folgende rationale Zahlen als Dezimalbrüche:

a) $\frac{5}{2}$; **d)** $\frac{-3}{-5}$; **g)** $-\frac{43}{100}$;

b) $-\frac{9}{4}$; **e)** $\frac{2}{3}$; **h)** $\frac{-333}{-10^3}$;

c) $\frac{7}{8}$; **f)** $-\frac{17}{6}$; **i)** $\frac{-33}{10}$.

8. Schreibt folgende rationale Zahlen als unkürzbare gemeine Brüche:

a) 0,3; **d)** –3,625; **g)** –3,1(2);

b) –2,5; **e)** 0,(6); **h)** 4,(009);

c) 1,25; **f)** –1,(12); **i)** –2,(1).

9. Beweist, dass $\frac{n^2-n}{2}$ und $\frac{2\cdot n^2+6\cdot n}{4}$ natürliche Zahlen sind für jede natürliche Zahl *n*.

Minitest

1. Übertragt die Tabellen in eure Hefte und tragt in die leeren Kästchen den Buchstaben ***W*** ein, wenn die Aussage wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

8 × 5 Pkte.

Aussage	***W/F***
a) $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$;	
b) $-4 \notin \mathbb{Q}$;	
c) $-\frac{9}{4} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$;	
d) $0,(6) \in \mathbb{Q}_-$;	

Aussage	***W/F***
e) $-4,2 \notin \mathbb{Q}$;	
f) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$;	
g) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}$;	
h) Die Menge $\mathbb{Q}$ ist unendlich.	

2. Bestimmt die Werte der Zahl *n* für:

25 Pkte. **a)** $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{-7}{n} \in \mathbb{Z}$;

25 Pkte. **b)** $n \in \mathbb{Z}$, $-5 < n < 0$ und $\frac{8}{n-1} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Darstellung der rationalen Zahlen auf der Zahlenachse. Der Betrag einer rationalen Zahl

Zur Erinnerung

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen enthält alle positiven rationalen Zahlen, die die Menge $\mathbb{Q}_+$ bilden, alle negativen rationalen Zahlen, die die Menge $\mathbb{Q}_-$ bilden, und die Zahl 0.

Die Mengen $\mathbb{Q}_-$ und $\mathbb{Q}_+$ sind disjunkt (sie haben keine gemeinsamen Elemente).

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$.

$\mathbb{Q}_- \cap \mathbb{Q}_+ = \varnothing$.

$0 \in \mathbb{Q}$, aber $0 \notin \mathbb{Q}_-$ und $0 \notin \mathbb{Q}_+$.

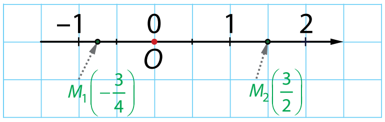
Jede positive rationale Zahl *x* wird auf der Zahlenachse im Abstand *x* vom Ursprung und rechts davon aufgetragen. Wir schreiben $x > 0$.

Die rationale Zahl 0 wird auf der Zahlenachse im Ursprung dargestellt.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Aus der Definition der negativen rationalen Zahlen folgt, dass jede negative rationale Zahl x auf der Zahlenachse links vom Ursprung dargestellt wird, im gleichen Abstand vom Ursprung wie ihre entgegengesetzte Zahl. Wir schreiben $x < 0$.

Jeder rationalen Zahl x entspricht auf der Zahlenachse ein einziger Punkt *M*, der Darstellung der Zahl *x* auf der Zahlenachse genannt wird.



M_1 ist *die Darstellung* auf der Zahlenachse der rationalen Zahl $-\frac{3}{4}$;

M_2 ist *die Darstellung* auf der Zahlenachse der rationalen Zahl $\frac{3}{2}$.

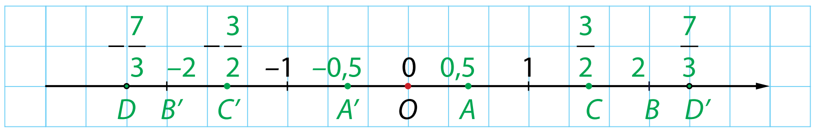
$-\frac{3}{4}$ ist *die Koordinate* oder *Abszisse* des Punktes M_1;

$\frac{3}{2}$ ist *die Koordinate* oder *Abszisse* des Punktes M_2.

Wenn *M* die Darstellung der Zahl *x* auf der Zahlenachse ist, dann heißt *x Abszisse* oder *Koordinate* des Punktes *M* auf der Zahlenachse.

Wir schreiben *M*(*x*) und lesen „*M von x*" oder „*M mit der Koordinate x*" oder „*M mit der Abszisse x*".

In der nebenstehenden Abbildung sind mehrere rationale Zahlen auf der Zahlenachse dargestellt.



Die dargestellten Punkte liegen paarweise symmetrisch in Bezug auf den Ursprung auf der Achse, sodass sie *entgegengesetzte rationale Koordinaten* haben.

In Bezug auf den Ursprung symmetrische Punkte:	Entgegengesetzte rationale Zahlen:
A(0,5) und *A*′(–0,5); *B*(2) und *B*′(–2); $C\left(\frac{3}{2}\right)$, $C'\left(-\frac{3}{2}\right)$; $D\left(-\frac{7}{3}\right)$ und $D'\left(\frac{7}{3}\right)$	0,5 und –0,5; 2 und –2; $\frac{3}{2}$ und $-\frac{3}{2}$; $-\frac{7}{3}$ und $\frac{7}{3}$.

Wenn *x* eine von null verschiedene rationale Zahl ist, dann sind die ganzen Zahlen *x* und –*x* einander entgegengesetzt.

Die Zahl *x* ist die der Zahl –*x* entgegengesetzte Zahl, und die Zahl –*x* ist die der Zahl *x* entgegengesetzte Zahl.

–0,5 ist die entgegengesetzte Zahl von 0,5, und 0,5 ist die entgegengesetzte Zahl von –0,5;
–2 ist die entgegengesetzte Zahl von 2, und 2 ist die entgegengesetzte Zahl von –2;
$-\frac{3}{2}$ ist die entgegengesetzte Zahl von $\frac{3}{2}$, und $\frac{3}{2}$ ist die entgegengesetzte Zahl von $-\frac{3}{2}$;

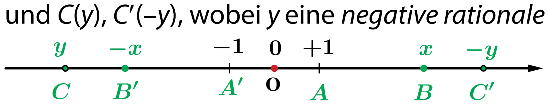
Bemerkungen: **1.** Die entgegengesetzte Zahl der ganzen Zahl 0 ist die Zahl 0 selbst.
2. Von jedwelchen zwei entgegengesetzten, von null verschiedenen rationalen Zahlen, ist eine positiv und die andere negativ.

Wie bei den ganzen Zahlen gilt auch für die rationale Zahl *x*, dass ihre entgegengesetzte Zahl, die rationale Zahl –*x*, auf der Zahlenachse im gleichen Abstand vom Ursprung liegt wie die rationale Zahl *x*.

Der *Betrag* der rationalen Zahl *x* oder ihr absoluter Wert ist der Abstand zwischen dem Punkt der Darstellung der Zahl *x* auf der Zahlenachse und dem Ursprung der Achse.
Der Betrag der rationalen Zahl *x* wird mit $|\,x\,|$ bezeichnet.

Bemerkung: Die rationalen Zahlen *x* und –*x* haben den gleichen Betrag, weil sie auf der Achse im gleichen Abstand vom Ursprung dargestellt werden

Auf der Zahlenachse stellen wir die Punkte dar: *O*(0), *A*(1), *A*′(–1), *B*(*x*), *B*′(–*x*), wobei *x* eine *positive rationale Zahl* ist, und *C*(*y*), *C*′(–*y*), wobei *y* eine *negative rationale Zahl* ist.



Aus $OA' = OA = 1$ folgt, dass $|-1| = |+1| = OA = 1$.
Aus $OB' = OB = x$ folgt, dass $|-x| = |+x| = OB = x$.
Aus $OC = OC' = -y$ folgt, dass $|-y| = |+y| = OC' = -y$.
$|\,0\,| = 0$ (der Abstand von *O* zu sich selbst ist 0).

Wir merken uns

1. $|x| > 0$ für jedes $x \in \mathbb{Q}^*$ und $|x| = 0$, wenn und nur wenn $x = 0$.

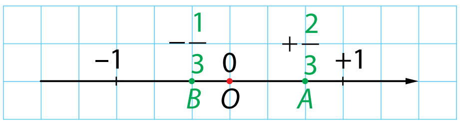
2. $|x| = x$, wenn und nur wenn $x \geq 0$, und $|x| = -x$, wenn und nur wenn $x \leq 0$.

3. $|-x| = |x|$ für jedes $x \in$ Q.

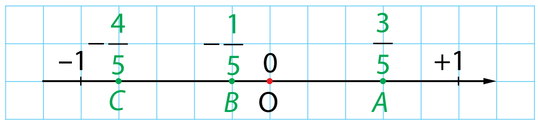
Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Es gibt Situationen, in denen es sehr schwierig oder sogar unmöglich ist, den Punkt, der einer rationalen Zahl entspricht, auf der Zahlenachse genau zu bestimmen. Dann verwenden wir vorteilhafte Techniken, um *die Position des gesuchten Punktes zu schätzen.*

1. Wenn es möglich ist und der Kontext der Aufgabe es zulässt, wählen wir die passende Maßeinheit, wobei die Zahl als unkürzbarer gemeiner Bruch geschrieben wird.



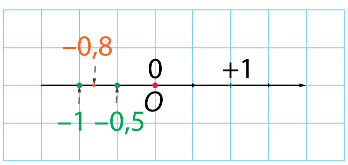
Beispiel 1: Wir haben als Maßeinheit die Strecke gewählt, deren Länge das Dreifache der Seitenlänge eines Kästchens beträgt.



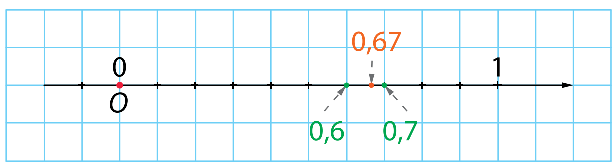
Beispiel 2: Wir haben als Maßeinheit die Strecke gewählt, deren Länge das Fünffache der Seitenlänge des Kästchens beträgt.

2. Wir schreiben die rationale Zahl als Dezimalbruch, approximieren die rationale Zahl zu ganzen Zahlen oder Zehnteln und *schätzen die Lage des Punktes auf der Achse* mithilfe der *Näherungswerte*.

Beispiel 1: Wir sollen den Dezimalbruch –0,8 auf der Achse darstellen. Wir wissen, dass er zwischen –1 und 0 liegt, näher an –1 als an 0, d. h. zwischen –1 und –0,5.



Beispiel 2: Wir sollen den Dezimalbruch 0,67 auf der Achse darstellen. Wir wissen, dass er zwischen 0,6 und 0,7 liegt, näher an 0,7. Wir wählen eine hinreichend große Maßeinheit, teilen sie in Zehntel und stellen dann die Zahl dar.



Übungen und Aufgaben

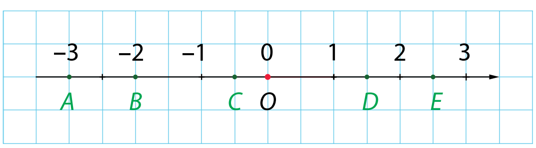
1. Stellt die Punkte mit folgenden Koordinaten auf der Zahlenachse dar:

a) –4,2; –3; 0,6; 5;

b) 1,5; –1; –2,5; 1,7; –2;

c) $-\frac{1}{2}$; 1; –2,4; –5; 3,5; $\frac{7}{10}$; $-\frac{20}{5}$.

2. Bestimmt die Koordinaten der abgebildeten Punkte.



3. Stellt auf der Zahlenachse mit dem Ursprung *O* und der Maßeinheit 1 cm die Punkte *A*(1,6), *B*(4,4), *C*(–3,2), die Mitte *M* der Strecke *OA* und die Mitte *N* der Strecke *AB* dar. Gebt die Koordinaten der Punkte *M* und *N* an.

4. Schreibt die entgegengesetzten Zahlen der rationalen Zahlen: $\frac{3}{4}$; $-\frac{3}{2}$; 1,3; –2,4; –7; + 4,5; $-5\frac{1}{3}$.

5. Schreibt die absoluten Werte der rationalen Zahlen:

$-\frac{3}{4}$; $+\frac{9}{5}$; –1,25; $\frac{-2}{7}$; –4; -3^2; –2,(5).

6. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und ergänzt sie mit den entsprechenden rationalen Zahlen.

a	$-0{,}4$	$2{,}1$				
$-a$			$\frac{1}{3}$	$-3{,}2$		
$\lvert a \rvert$					$\lvert a \rvert = 5$ und $a \in \mathbb{Q}_-$	0

7. Übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken aus, um wahre Sätze zu bilden.

a) Die entgegengesetzte Zahl von 0,123 ist … .

b) Die entgegengesetzte Zahl von … ist $-4{,}5$.

c) Der absolute Wert der Zahl $\frac{-5}{6}$ ist … .

d) Die rationalen Zahlen ... und ... haben den Betrag 7.

e) Wenn $a \in \mathbb{Z}^*$ und $\left|\frac{-8}{a}\right|$ eine natürliche Zahl ist, dann $a \in \{\ldots\}$.

Minitest

30 Pkte. **1.** Stellt auf der Zahlenachse dar: -4; $\frac{9}{2}$; 0; $-1{,}5$; $-\frac{35}{7}$; $3{,}5$; $-\frac{25}{10}$.

2. Übertragt in eure Hefte und tragt in die leeren Kästchen den Buchstaben ***W*** ein, wenn die Aussage wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

	Aussage	***W/F***
10 Pkte.	**a)** Die entgegengesetzte Zahl der Zahl $-\frac{3}{5}$ ist $\frac{3}{5}$.	
10 Pkte.	**b)** Der Betrag der Zahl $-4{,}2$ ist $2{,}4$.	
10 Pkte.	**c)** Die einzige rationale Zahl, die gleich ihrer entgegengesetzten Zahl ist, ist die Zahl 0.	
10 Pkte.	**d)** Der absolute Wert der rationalen Zahl r ist die rationale Zahl $-r$.	
10 Pkte.	**e)** $\lvert -6{,}3 \rvert = 6{,}3$.	
10 Pkte.	**f)** $-\left\lvert -\frac{12}{5} \right\rvert = -\left(-\frac{12}{5}\right)$.	

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L3 Vergleichen und Ordnen rationaler Zahlen

Zur Erinnerung

Jede rationale Zahl ist entweder positiv, negativ oder null.

Für jedes $r \in \mathbb{Q}$ trifft genau eine der folgenden Beziehungen zu: $r > 0$, $r < 0$, $r = 0$.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Die Darstellung rationaler Zahlen auf der Zahlenachse, der Vergleich rationaler Zahlen und die Ordnung rationaler Zahlen sind eng miteinander verbunden und bedingen sich gegenseitig. Die Darstellung auf der Zahlenachse ist einerseits oft nützlich, um Brüche zu vergleichen und ihre steigende oder fallende Reihenfolge zu bestimmen. Andererseits werden zwei oder mehr rationale Zahlen auf der Zahlenachse von links nach rechts in steigender Reihenfolge dargestellt. Die Lage der Punkte und ihre Reihenfolge auf der Achse geben also Hinweise auf die dargestellten Zahlen und die Beziehungen zwischen ihnen.

Für zwei beliebige rationale Zahlen x und y gibt es nur eine einzige der Beziehungen: $x < y$, $x = y$, $x > y$.
Der Vergleich der rationalen Zahlen x und y besteht darin festzustellen, welche der drei oben genannten Beziehungen vorliegt.

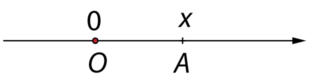
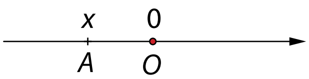
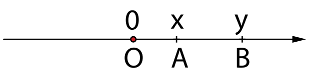
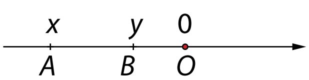
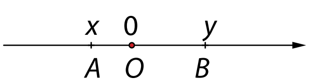
Wenn $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{Q}$, und wenn die Darstellung von x auf der Achse der Punkt A ist und die Darstellung von y auf der Achse der Punkt B ist, dann:

$x < y$, wenn und nur wenn der Punkt $A(x)$ links vom Punkt $B(y)$ liegt;

$x > y$, wenn und nur wenn der Punkt $A(x)$ links vom Punkt $B(y)$ liegt;

$x = y$, wenn und nur wenn die Punkte $A(x)$ und $B(y)$ zusammenfallen.

Für die von null verschiedenen rationalen Zahlen x und y, $x < y$, sind folgende Situationen möglich:

Darstellung auf der Achse	*Beschreibung*	*Schlussfolgerung*
	$O(0)$ liegt links von $A(x)$, also ist 0 kleiner als x. Wir schreiben $0 < x$ oder $x > 0$.	$x \in \mathbb{Q}_+ \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$ und $x > 0$. 1; 2,3; 3,(1); 11,25 $\in \mathbb{Q}_+$ $1 > 0$; $2{,}3 > 0$; $3{,}(1) > 0$; $11{,}25 > 0$.
	$A(x)$ liegt links von $O(0)$, also ist x kleiner als 0. Wir schreiben $x < 0$ oder $0 > x$.	$x \in \mathbb{Q}_- \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$ und $x < 0$. –1; –2,3; –3,(1); –11,25 $\in \mathbb{Q}_-$ $-1 < 0$; $-2{,}3 < 0$; $-3{,}(1) < 0$; $-11{,}25 < 0$.
	$x > 0$, $y > 0$. $OA < OB$, also $\lvert x \rvert < \lvert y \rvert$. $A(x)$ liegt links von $B(y)$, also $x < y$.	Wenn $x \in \mathbb{Q}_+$ und $y \in \mathbb{Q}_+$, dann: $x < y$, wenn und nur wenn $\lvert x \rvert < \lvert y \rvert$. $3{,}75 \in \mathbb{Q}_+$ und $4{,}95 \in \mathbb{Q}_+$ $\lvert 3{,}75 \rvert < \lvert 4{,}95 \rvert$ folglich $3{,}75 < 4{,}95$.
	$x < 0$, $y < 0$. $OA > OB$, also $\lvert x \rvert > \lvert y \rvert$. $A(x)$ liegt links von $B(y)$, also $x < y$.	Wenn $x \in \mathbb{Q}_-$ und $y \in \mathbb{Q}_-$, dann: $x < y$, wenn und nur wenn $\lvert x \rvert > \lvert y \rvert$. $-3{,}75 \in \mathbb{Q}_-$ und $-4{,}95 \in \mathbb{Q}_-$ $\lvert -4{,}95 \rvert > \lvert -3{,}75 \rvert$, folglich $-4{,}95 < -3{,}75$.
	$x < 0$, $y > 0$. $A(x)$ liegt links von $B(y)$, also $x < y$.	Wenn $x \in \mathbb{Q}_-$ und $y \in \mathbb{Q}_+$, dann $x < y$. Jede negative Zahl ist kleiner als jede positive Zahl. $-3{,}72 \in \mathbb{Q}_-$, $4{,}83 \in \mathbb{Q}_+$, folglich $-3{,}72 < 4{,}83$; $-4{,}83 \in \mathbb{Q}_-$, $3{,}72 \in \mathbb{Q}_+$, folglich $-4{,}83 < 3{,}73$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Um ganze Zahlen zu vergleichen und zu ordnen, verwenden wir häufig eine der Beziehungen „ ≤ " oder „≥" sowie die Beziehungen „<" und „>", die *die Eigenschaften der ganzen Zahlen behalten*.

Zwei oder mehr rationale Zahlen *in steigender Reihenfolge zu ordnen*, bedeutet, ihre Reihenfolge so festzulegen, dass jede Zahl kleiner oder gleich der nachfolgenden ist.	Die steigende Reihenfolge der rationalen Zahlen –32,5; 0; 20,3; –21,5 ist: –32,5; –21, 5; 0; 20,3 weil $-32{,}5 \leq -21{,}5 \leq 0 \leq 20{,}3$.
Zwei oder mehr rationale Zahlen *in fallender Reihenfolge zu ordnen*, bedeutet, ihre Reihenfolge so festzulegen, dass jede größer oder gleich der nachfolgenden ist.	Die fallende Reihenfolge der rationalen Zahlen –32, 5; 0; 20,3; –21, 5 ist: 20,3; 0; –21, 5; –32,5 weil $20{,}3 \geq 0 \geq -21{,}5 \geq -32{,}5$.

Wir merken uns

Jede *positive* rationale Zahl *ist größer* als jede negative rationale Zahl und größer als 0.

Jede *negative* rationale Zahl *ist kleiner* als jede positive rationale Zahl und kleiner als 0.

Von zwei positiven rationalen Zahlen ist diejenige mit dem größeren Betrag größer.

Von zwei negativen rationalen Zahlen ist diejenige mit dem kleineren Betrag größer.

Übungen und Aufgaben

1. Schreibt:
a) drei rationale Zahlen, die kleiner sind als –2;
b) drei rationale Zahlen, die größer als 3,5 sind;
c) drei rationale Zahlen, die zwischen –2 und 3,5 liegen.

2. Übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken mit einem der Symbole <, >, = aus, sodass ihr wahre Aussagen erhaltet.

a) $\frac{1}{4} \ldots \frac{1}{3}$; **c)** $2{,}4 \ldots -\frac{8}{3}$;

b) $-\frac{1}{5} \ldots \frac{1}{6}$; **d)** $-\frac{1}{3} \ldots -\frac{1}{2}$.

3. Schreibt in steigender Reihenfolge die Zahlen:
$-2{,}3;\ 0{,}9;\ -2\frac{3}{8};\ -2;\ 0;\ -3.$

4. Schreibt in fallender Reihenfolge die Zahlen:
$-3{,}2;\ 3{,}1;\ -3\frac{3}{10};\ 3;\ 0;\ -3{,}(4).$

5. Bestimmt alle ganzen Zahlen, die zwischen –2,34 und $\frac{10}{3}$ liegen.

6. Bestimmt:
a) die größte ganze Zahl, die kleiner ist als –77;
b) die kleinste ganze Zahl, die größer ist als –4,56.

7. Bestimmt die ganze Zahl n für jeden der Fälle:

a) $n < \frac{7}{2} < n + 1$;

b) $n < -\frac{13}{5} < n + 1$;

c) $n - 2 < (-2)^{22} : 2^{21} < n$.

8. Schreibt:
a) die Menge der ganzen Zahlen, die einen absoluten Wert kleiner als 3 haben;
b) drei rationale Zahlen, die einen absoluten Wert zwischen 1,5 und 4 haben.

Minitest

30 Pkte. **1.** Es sei die Zahl $x = -\dfrac{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3}{2^2}$. Beweist, dass $-4 < x < -3$.

2. Betrachtet die ganzen Zahlen b und c mit den Eigenschaften $|b| \leq 2$ und $|c| = 3$.

20 Pkte. **a)** Bestimmt die Zahlen b und c, die die genannten Ungleichungen erfüllen.

20 Pkte. **b)** Schreibt alle rationalen Zahlen der Form $\frac{b}{c}$ unter Verwendung der in Unterpunkt a) ermittelten Werte.

20 Pkte. **c)** Ordnet die in Unterpunkt b) geschriebenen rationalen Zahlen in steigender Reihenfolge.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

4.2 Operationen mit rationalen Zahlen

L1 Addition rationaler Zahlen. Subtraktion rationaler Zahlen

Um *Operationen mit rationalen Zahlen* durchführen zu können, werden die Zahlen entweder als *gemeine Brüche* oder als *Dezimalbrüche* mit endlicher Anzahl von Dezimalstellen geschrieben.
Berechnungen mit periodischen Dezimalbrüchen werden nicht durchgeführt. Sie sind als gemeine Brüche zu schreiben.

Zur Erinnerung

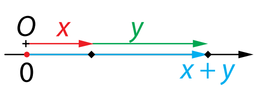
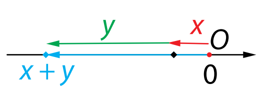
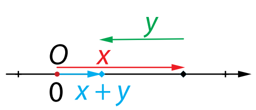
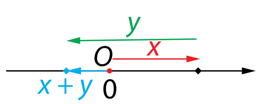
Um zwei positive rationale Zahlen, die als gemeine Brüche ausgedrückt sind, zu addieren oder zu subtrahieren, müssen sie denselben Nenner haben	*Beispiele* **1.** $\frac{3}{5}+\frac{7}{5}=\frac{3+7}{5}$; **2.** $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{3-2}{5}$.
Wenn die Brüche nicht denselben Nenner haben, muss man *das kleinste gemeinsame Vielfache* der Nenner bestimmen und die Brüche entsprechend erweitern, um sie auf denselben Nenner zu bringen.	*Beispiele* **1.** ${}^{3)}\frac{3}{5}+{}^{5)}\frac{7}{3}=\frac{9}{15}+\frac{35}{15}=\frac{44}{15}$. **2.** ${}^{3)}\frac{9}{4}-{}^{2)}\frac{5}{6}=\frac{27}{12}-\frac{10}{12}=\frac{17}{12}$.

Um zwei positive rationale Zahlen, die durch endliche Dezimalbrüche ausgedrückt werden, zu addieren oder zu subtrahieren, werden die Brüche untereinander geschrieben, sodass *Komma unter Komma* zu stehen kommt.

Die *Ziffern* der gleichen Ordnung werden untereinander geschrieben. Wenn ein Bruch keine Ziffer einer bestimmten Ordnung enthält, ist diese Ziffer 0. Wir addieren oder subtrahieren wie bei den natürlichen Zahlen. Das *Komma* im Ergebnis schreiben wir unter die Kommas der beiden Brüche.	*Beispiel* **1** 123,75 + 99,1 = 222,85; 123,75 + 99,10 222,85	*Beispiel* **2** 123,75 – 99,1 = 24,65. 123,75 – 99,10 24,65

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Die *Addition der rationalen Zahlen* wird aufgrund der Addition der *positiven rationalen Zahlen* und der Addition der *ganzen Zahlen* definiert.
Für zwei beliebige rationale Zahlen x und y wird eine einzige rationale Zahl, $x + y$ geschrieben, definiert und als Summe der Zahlen x und y bezeichnet. Die Operation, die jedes Zahlenpaar x und y mit ihrer Summe verknüpft, wird als Additionsoperation bezeichnet, und die Zahlen x und y heißen Glieder der Addition.
Um die Summe zweier rationaler Zahlen zu berechnen, gehen wir ähnlich vor wie bei den ganzen Zahlen, indem wir die Methoden von den Operationen mit Brüchen anwenden.

Fall	$x \geq 0$ und $y \geq 0$	$x \leq 0$ und $y \leq 0$	$x > 0, y < 0$ und $\lvert x \rvert > \lvert y \rvert$	$x > 0$ und $y < 0$ und $\lvert x \rvert < \lvert y \rvert$
Berechnungsweise	$x+y \geq 0$ und $x+y=\lvert x \rvert+\lvert y \rvert$	$x+y \leq 0$ und $x+y=-(\lvert x \rvert+\lvert y \rvert)$	$x+y > 0$ und $x+y=\lvert x \rvert-\lvert y \rvert$	$x+y < 0$ und $x+y=-(\lvert y \rvert-\lvert x \rvert)$.
Geometrische Interpretation				

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Die Addition der rationalen Zahlen behält die *Eigenschaften der Addition* ganzer Zahlen bei.

Die Addition ist *assoziativ*: $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle rationalen Zahlen x, y, z.
Die Addition ist *kommutativ*: $x + y = y + x$ für alle rationalen Zahlen x und y.
Die Zahl 0 ist das neutrale Element der Addition: $x + 0 = 0 + x = x$ für jede rationale Zahl x.
Jede rationale Zahl x hat eine entgegengesetzte Zahl, die rationale Zahl $-x$, für die gilt: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

In der Menge $\mathbb{Q}$ definieren wir für zwei beliebige rationale Zahlen die rationale Zahl $x - y = x + (-y)$, die als Differenz der Zahlen x und y bezeichnet wird.

Für zwei beliebige rationale Zahlen x und y ist die *Differenz* $x - y$ die Summe der Zahl x und der entgegengesetzten Zahl von y.	*In mathematischer Sprache:* $x - y = x + (-y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$.	$+3{,}7 - (+7{,}3) = +3{,}7 + (-7{,}3) = -(7{,}3 - 3{,}7) = -3{,}6$; $-3{,}7 - (+7{,}3) = -3{,}7 + (-7{,}3) = -(3{,}7 + 7{,}3) = -11$.

Wir lösen und beobachten

1. Ohne zu rechnen, schätzt die Ergebnisse ab und entscheidet, ob die Aussagen wahr sein können.

a) $13{,}9 + 48{,}5 = 76{,}4$;
b) $900 - 596{,}9 = 294{,}1$.

Lösung: **a)** $13{,}9 < 20$ und $48{,}5 < 50 \Rightarrow 13{,}9 + 48{,}5 < 70$, es findet keine Gleichheit statt.
b) $596{,}9 < 600 \Rightarrow 900 - 596{,}9 > 300$, kein Gleichheitsfall.

2. Führt die Berechnungen durch, eventuell unter Verwendung der Eigenschaften der Addition:

a) $1,(2) - \frac{2}{9}$;
b) $\frac{1}{3} + \frac{29}{13} - \frac{4}{3} - \frac{16}{13}$.

a) $1,(2) - \frac{2}{9} = \frac{12-1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{9}{9} = 1$; **b)** $\frac{1}{3} + \frac{29}{13} - \frac{4}{3} - \frac{16}{13} = \frac{1}{3} + \frac{29}{13} + \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{16}{13}\right) =$

$= \frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{29}{13} + \left(-\frac{16}{13}\right) = \left[\frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right)\right] + \left[\frac{29}{13} + \left(-\frac{16}{13}\right)\right] = \frac{1-4}{3} + \frac{29-16}{13} = -1 + 1 = 0.$

Übungen und Aufgaben

1. Berechnet die Summen:

a) $-\frac{4}{9} + \left(-\frac{7}{9}\right)$; **d)** $-\frac{3}{10} + (-1{,}2)$;

b) $-\frac{7}{10} + \left(-\frac{1}{10}\right)$; **e)** $0{,}25 + \left(-\frac{1}{8}\right)$;

c) $-\frac{4}{5} + \left(-\frac{11}{10}\right)$; **f)** $-2 + \left(-\frac{5}{3}\right) + [-1,(2)]$.

2. Führt die Subtraktionen durch:

a) $\frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right)$; **d)** $-1{,}7 - \left(-\frac{3}{5}\right)$;

b) $-\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right)$; **e)** $0{,}75 - \left(-1\frac{1}{8}\right)$;

c) $-\frac{1}{3} - \left(+\frac{5}{6}\right)$; **f)** $-3 - [-0,(3)]$.

3. Berechnet unter Verwendung der Kommutativität und Assoziativität der Addition der rationalen Zahlen:

a) $\frac{4}{3} - 3 + \frac{5}{3}$; **c)** $-4 + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) + (-3)$;

b) $-\frac{7}{5} - \frac{1}{15} - \frac{4}{5}$; **d)** $2{,}15 - 1,(6) + (-2{,}65)$.

4. Berechnet die Summe der Zahl a und der entgegengetzten Zahl von b:

a) $a = -2\frac{3}{5}$ und $b = +2{,}2$;

b) $a = -\frac{1}{7} - \frac{22}{77} - \frac{333}{777}$ und $b = -\frac{5}{7} + \frac{3}{14} - \frac{1}{21}$.

5. Berechnet die Differenz zwischen der Zahl c und der entgegengesetzten Zahl von d:

a) $c = -3\frac{2}{5}$ şi $d = -3{,}3$;

b) $c = -\frac{1}{25} - \frac{2}{75}$ und $d = -\frac{2}{25} - \frac{1}{75}$.

6. Betrachtet die Zahlen:

$x=-1{,}5-\left|-\frac{3}{4}\right|+|-1|-\left(-\frac{5}{8}\right)$;

$y=\left|-\frac{5}{4}\right|+\left|-1-\frac{5}{8}\right|$ und $z=\frac{8}{9}+\left(-\frac{11}{18}\right)+\left(-\frac{17}{36}\right)$.

a) Berechnet die Zahlen x, y und z;

b) Vergleicht die Zahlen $x-y$ und $x+z$.

7. Führt die Rechnungen durch:

a) $-\frac{6}{7}+\left(\frac{7}{6}-\frac{67}{42}\right)$; **c)** $-1\frac{2}{9}-\left(2\frac{1}{6}+\frac{7}{3}\right)-0{,}1(6)$;

b) $\left|\frac{4}{5}-\frac{5}{4}\right|-\frac{11}{20}$; **d)** $-\frac{7}{8}-\left[-2\frac{1}{9}-\left(-\frac{91}{72}+1\right)\right]$.

8. Drei Biologen machen Umweltbeobachtungen in einem Naturschutzgebiet, und zwar wie folgt: der erste auf $\frac{1}{6}$ der Fläche, der zweite auf $\frac{4}{15}$ der Fläche und der dritte auf $\frac{2}{9}$ der Fläche des Naturschutzgebiets.

a) Berechnet, welcher Teil der Fläche noch zu untersuchen ist, nachdem die Biologen ihre Arbeit beendet haben.

b) Prüft, ob die verbliebene Fläche $\frac{2}{3}$ der Fläche des Schutzgebietes übersteigt.

Minitest

30 Pkte. **1.** Übertragt in eure Hefte und tragt in die leeren Kästchen den Buchstaben ***W*** ein, wenn die Aussage wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist:

Aussage	***W/F***
p_1: $-4\frac{2}{5}=-4+\left(-\frac{2}{5}\right)$.	

Aussage	***W/F***
p_2: $-1\frac{3}{4}-\left(-2\frac{1}{4}\right)>-0{,}3$.	

60 Pkte. **2.** Ordnet die Zahlen in steigender Reihenfolge $a=-\frac{11}{2}+\frac{1}{6}$; $b=-\frac{11}{2}-\frac{3}{20}$; $c=-\frac{11}{2}-\frac{7}{60}$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten.
10 Punkte von Amts wegen

L2 Multiplikation rationaler Zahlen. Division rationaler Zahlen

Zur Erinnerung

Das Produkt der gemeinen Brüche $\frac{a}{n}$ und $\frac{b}{p}$, $n\neq 0$ und $p\neq 0$, ist der gemeine Bruch $\frac{a\cdot b}{n\cdot p}$.

$$\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{p}=\frac{a\cdot b}{n\cdot p}$$

Bemerkung: Die natürliche Zahl b kann als gemeiner Bruch mit dem Nenner 1 geschrieben werden, also $\frac{b}{1}$, und das Produkt der Zahl b und des Bruchs $\frac{a}{n}$ ist $\frac{b}{1}\cdot\frac{a}{n}=\frac{b\cdot a}{1\cdot n}=\frac{b\cdot a}{n}$.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Die Multiplikation rationaler Zahlen ist die Operation, bei der jedes Paar rationaler Zahlen x und y mit ihrem Produkt, d. h. der einzigen rationalen Zahl $x\cdot y$, verbunden wird.

Die Berechnungsweise ergibt sich aus dem, was wir von der Multiplikation *ganzer* Zahlen und der Multiplikation *positiver rationaler Zahlen* kennen.

Fall/Berechnungsweise	*Beispiele*
Wenn $x > 0$ und $y > 0$, dann $x \cdot y > 0$ und $x \cdot y = \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$.	$(+3{,}5) \cdot (+0{,}2) = +0{,}75$. Wir schreiben gewöhnlich, $3{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}75$.
Wenn $x > 0$ und $y < 0$, oder $x < 0$ und $y > 0$, dann $x \cdot y < 0$ und $x \cdot y = -(\lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert)$.	$(+12) \cdot (-0{,}2) = -(\lvert +12 \rvert \cdot \lvert -0{,}2 \rvert) = -(12 \cdot 0{,}2) = -2{,}4$. $(-1{,}2) \cdot (+2) = -(\lvert -1{,}2 \rvert \cdot \lvert +2 \rvert) = -(1{,}2 \cdot 2) = -2{,}4$.
$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ für jede rationale Zahl x.	$0 \cdot (+3{,}7) = (+3{,}7) \cdot 0 = 0$; $0 \cdot (-3{,}5) = (-3{,}5) \cdot 0 = 0$.
Wenn $x < 0$ und $y < 0$, dann $x \cdot y > 0$ und $x \cdot y = \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$.	$(-4{,}2) \cdot (-7{,}5) = \lvert -4{,}2 \rvert \cdot \lvert -7{,}5 \rvert = 4{,}2 \cdot 7{,}5 = 31{,}5$. $(-2) \cdot (-1{,}9) = \lvert -2 \rvert \cdot \lvert -1{,}9 \rvert = 2 \cdot 1{,}9 = 3{,}8$.

Wir merken uns

Vorzeichenregel bei der Multiplikation rationaler Zahlen

1. Das Produkt zweier beliebiger rationaler Zahlen, die *beide positiv oder beide negativ* sind, ist eine *positive rationale Zahl.* Wenn $x > 0$ und $y > 0$ oder $x < 0$ und $y < 0$, dann $x \cdot y > 0$.
2. Das Produkt zweier beliebiger rationaler Zahlen, von denen *eine positiv und eine negativ* ist, ist eine *negative rationale Zahl.* Wenn $x > 0$ und $y < 0$, oder $x < 0$ und $y > 0$, dann $x \cdot y < 0$.
3. Der Betrag des Produkts zweier rationaler Zahlen ist gleich mit dem Produkt der Beträge der Zahlen: $\lvert x \cdot y \rvert = \lvert x \rvert \cdot \lvert y \rvert$ für alle rationalen Zahlen x und y.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Wenn einer der Faktoren ein periodischer Dezimalbruch ist, schreibt man beide Faktoren als gemeine Brüche und führt dann die Multiplikation durch, wobei man die „Vorzeichenregel bei der Multiplikation" berücksichtigt.
In solchen Situationen empfiehlt es sich, das Ergebnis der Multiplikation als *unkürzbaren* Bruch anzugeben.
Um die Berechnung zu erleichtern, kann man Brüche in Zwischenergebnissen oder das Endergebnis *kürzen*.
Bei der Multiplikation von rationalen Zahlen bleiben alle Eigenschaften der Multiplikation ganzer Zahlen erhalten.
Darüber hinaus sind die *von null verschiedenen rationalen Zahlen umkehrbar* (wie wir seit der 5. Klasse über positive rationale Zahlen wissen).

Eigenschaft	*In mathematischer Sprache*
Die Multiplikation von rationalen Zahlen ist assoziativ	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$.
Die Multiplikation rationaler Zahlen ist kommutativ.	$x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$.
Die Zahl 1 ist das neutrale Element der Multiplikation rationaler Zahlen.	$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ für jedes $x \in \mathbb{Q}$.
Jede von null verschiedene rationale Zahl hat einen *Kehrwert*. **Achtung! 0 ist nicht umkehrbar.**	Für jedes $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, gibt es die rationale Zahl $\frac{1}{x}$, sodass $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$.
Die Multiplikation rationaler Zahlen ist distributiv in Bezug auf Addition und Subtraktion.	Für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ und $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$.

Zum Vergleichen und Ordnen rationaler Zahlen ist auch die *Monotonieeigenschaft* nützlich, d. h.:

Wenn x und y rationale Zahlen sind, $x < y$, und z eine positive rationale Zahl ist, dann $x \cdot z < y \cdot z$.	Wenn $x < 2{,}5$, dann $2 \cdot x < 2 \cdot 2{,}5$, also $2 \cdot x < 5$.
Wenn x und y rationale Zahlen sind, $x < y$, und z eine negative rationale Zahl ist, dann $x \cdot z > y \cdot z$.	Wenn $x < -0{,}5$, dann $(-3) \cdot x > (-3) \cdot (-0{,}5)$, also $-(3 \cdot x) > +1{,}5$.

Wenn $x=\frac{a}{b}, a,b\in\mathbb{Z}, a\neq 0, b\neq 0$, dann $\frac{1}{x}=\frac{b}{a}$.

Die Zahl $\frac{1}{x}=\frac{b}{a}, a\neq 0, b\neq 0$, ist der Kehrwert der Zahl $x=\frac{a}{b}, a\neq 0, b\neq 0$.

Die Zahl $x=\frac{a}{b}, a\neq 0, b\neq 0$, ist der Kehrwert der Zahl $\frac{1}{x}=\frac{b}{a}, a\neq 0, b\neq 0$.

Der Kehrwert der *von null verschiedenen rationalen Zahl x* wird mit x^{-1} bezeichnet, also $\frac{1}{x}\overset{not}{=}x^{-1}, x\neq 0$.

$x=\frac{2}{3}, x^{-1}=\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$. Wir schreiben:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$ und $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}$. Analog:

$\left(\frac{-2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$; $\left(\frac{2}{-3}\right)^{-1}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$,

also $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}=\left(\frac{-2}{3}\right)^{-1}=\left(\frac{2}{-3}\right)^{-1}=-\frac{3}{2}$.

Für zwei beliebige rationale Zahlen x und y, $y\neq 0$, ist der *Quotient* $x:y$ das Produkt der Zahl x und des Kehrwerts der Zahl y.

In mathematischer Sprache

$x:y=x\cdot y^{-1}$ für jedes $x\in\mathbb{Q}$ und $y\in\mathbb{Q}^*$.

$(+2):(-0{,}5)=2:\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{2}{1}\right)=-4$;

$\left(-\frac{3}{2}\right):\left(-\frac{9}{4}\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{2}_1}\cdot\frac{\cancel{4}^2}{\cancel{9}_3}=\frac{2}{3}$.

Bemerkung: Die Division $x:y, x\in\mathbb{Q}, y\in\mathbb{Q}, y\neq 0$, wird gewöhnlich als Verhältnis geschrieben: $x:y=\frac{x}{y}$.

Wir lösen und beobachten

1. Bestimmt die rationale Zahl z, wenn man weiß, dass $y\cdot z=-\frac{2}{7}$ und $x\cdot y\cdot z=\frac{16}{49}$.	Weil die Multiplikation assoziativ ist, kann $x\cdot y\cdot z=\frac{16}{49}$ geschrieben werden als $x\cdot(y\cdot z)=\frac{16}{49}$. Aber $y\cdot z=-\frac{2}{7}$, d. h. $x\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{16}{49}$, also $x=\frac{16}{49}:\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{16}{49}\left(-\frac{7}{2}\right)=-\left(\frac{16}{49}\cdot\frac{7}{2}\right)=-\frac{8}{7}$.
2. Führt die Divisionen durch und schreibt die Ergebnisse als unkürzbare Brüche **a)** $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$; **b)** $\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}}$.	**a)** $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=\frac{1}{\cancel{2}_1}\cdot\frac{\cancel{4}^2}{1}=2$; **b)** $\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}}=-\frac{1}{3}:\frac{1}{9}=-\frac{1}{\cancel{3}_1}\cdot\frac{\cancel{9}^3}{1}=-3$.

Übungen und Aufgaben

1. Schreibt als Produkt rationaler Zahlen:

a) $-2+(-2)+(-2)$;

b) $-\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)$;

c) $\underbrace{\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)+\ldots+\left(-\frac{3}{4}\right)}_{\text{10 Glieder}}$.

2. Berechnet:

a) die rationale Zahl, die viermal so groß ist wie $\frac{2}{9}$;

b) das Dreifache der rationalen Zahl 2,25;

c) das Produkt der Zahl –3 und der entgegengesetzten Zahl von $-\frac{5}{9}$.

3. Führt die Multiplikationen durch:

a) $-4\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$;

c) $\frac{11}{16}\cdot(-8)$;

b) $-\frac{3}{8}\cdot 10$; **d)** $12\cdot(-0{,}25)$.

4. Führt die Multiplikationen durch und schreibt die Ergebnisse als unkürzbare gemeine Brüche:

a) $\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)$; **c)** $\frac{-10}{3}\cdot\frac{-7}{20}$;

b) $-\frac{3}{10}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$; **d)** $-1\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{5}$.

5. Führt, möglicherweise unter Verwendung der Kommutativität und der Assoziativität der Multiplikation, aus:

a) $0{,}2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot(-10)$; **c)** $-\frac{3}{11}\cdot 0{,}121\cdot(-1000)$;

b) $-0{,}45\cdot\left(-\frac{7}{27}\right)\cdot 100$; **d)** $-9{,}8\cdot 17{,}92\cdot 0\cdot 9$.

6. Schreibt die Kehrwerte der Zahlen: $\frac{3}{8}$; $-\frac{1}{4}$; -5; $2\frac{1}{3}$; $0{,}7$.

7. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und ergänzt sie mit den entsprechenden Ergebnissen.

x	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{7}$		-1	$-1{,}2$	
$\frac{1}{x}$			$-\frac{4}{5}$			$2\frac{1}{3}$
$x\cdot\frac{1}{x}$						

8. Führt die Divisionen durch:

a) $-2{,}4:1{,}2$; **c)** $-33:\frac{22}{-3}$;

b) $-6{,}3:(-0{,}9)$; **d)** $-5{,}(5):2{,}(2)$.

9. Führt die Divisionen durch:

a) $\frac{5}{4}:\frac{25}{3}$; **d)** $-1\frac{2}{3}:\left(-2\frac{2}{9}\right)$;

b) $-\frac{8}{9}:\frac{5}{18}$; **e)** $-\frac{10}{3}:20$;

c) $-\frac{3}{16}:\left(-\frac{15}{8}\right)$; **f)** $0:\left(-\frac{23}{9}\right)$.

10. Führt die Rechnungen durch und schreibt die Ergebnisse als unkürzbare gemeine Brüche:

a) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$; **b)** $\dfrac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}}$; **c)** $\dfrac{-4{,}8}{-1{,}6}$; **d)** $\dfrac{-\frac{17}{10}}{0{,}1}$.

11. Führt die Rechnungen durch:

a) $2\cdot\frac{9}{8}:\frac{3}{4}$; **c)** $-5:\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{15}{4}:\left(-\frac{45}{4}\right)$;

b) $-3\cdot\frac{10}{27}:\left(-\frac{25}{36}\right)$; **d)** $-13:(-12:0{,}(3))$.

12. Führt, unter Anwendung der Distributivität der Multiplikation gegenüber der Addition und Subtraktion, aus:

a) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}+2\right)$; **c)** $\frac{7}{8}\cdot\left(\frac{8}{7}-8\right)$;

b) $\left(\frac{10}{9}+\frac{5}{6}\right)\cdot(-18)$; **d)** $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{15}{4}\right)$.

13. Es seien die Zahlen $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ und $b=\frac{1}{22}+\frac{1}{44}+\frac{1}{66}$.

a) Berechnet $2\cdot a-22\cdot b$.
b) Beweist, dass $a=11\cdot b$ ist.

Minitest

1. *Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.*

20 Pkte. **a)** Das Produkt der rationalen Zahlen $-1\frac{3}{5}$ und 3,75 ist:

A. –1; **B.** +3; **C.** –6; **D.** –8.

20 Pkte. **b)** Das Ergebnis der Rechnung $\frac{3}{4}:\left(-\frac{9}{16}\right):[-1{,}(3)]$ ist:

A. –0,5; **B.** 1; **C.** –1,5; **D.** 3.

50 Pkte. **2.** Wenn $m=-0{,}4\cdot\frac{25}{8}$ und $n=-\frac{5^2}{-2^2}:(-2{,}5)$, berechnet $m\cdot n$ und $m:n$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L3 Potenz einer rationalen Zahl mit von null verschiedenem ganzem Exponenten. Rechenregeln mit Potenzen

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Für jede *von null verschiedene rationale Zahl* x und für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ wird die n-te Potenz der Zahl x als x^n bezeichnet und definiert durch: $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n-\text{mal}}$.

Wenn x eine *von null verschiedene rationale Zahl* und n eine *von null verschiedene natürliche Zahl* ist, dann wird die n-te Potenz der rationalen Zahl x^{-1} als x^{-n} bezeichnet und heißt Potenz mit Exponent $-n$ der Zahl x.

Für jedes $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, und für jedes $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^{-n} = \left(x^{-1}\right)^n \text{ oder } x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

Wenn $x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}^*$, dann $x^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $x^{-1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$, und $x^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$.

Konventionen: $x^0 = 1$ und $x^1 = x$ für jede *rationale Zahl* x, $x \neq 0$.
$0^n = 0$ für jede natürliche Zahl n, $n \neq 0$. 0^0 hat keinen Sinn!

Beispiele

1. $(-1)^{-1} = \frac{1}{-1} = -1$; **2.** $(-1)^{-4} = \left((-1)^{-1}\right)^4 = (-1)^4 = 1$; **3.** $(-1)^{-3} = \left((-1)^{-1}\right)^3 = (-1)^3 = -1$; **4.** $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{2^3}{5^3} = -\frac{8}{125}$;

5. $2^{-4} = \left(2^{-1}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$; **6.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^2 = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = 3^2 = 9$; **7.** $\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right]^4 = \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Die Regeln für das Rechnen mit *Potenzen von rationalen Zahlen mit ganzem Exponenten* sind ähnlich wie die Regeln für Potenzen von positiven rationalen Zahlen mit natürlichem Exponenten.

Regel	*Anwendung*
1. Produkt zweier Potenzen mit derselben Basis	$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ für jedes $x \in \mathbb{Q}^*$ und für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.
2. Quotient zweier Potenzen mit der gleichen Basis	$x^m : x^n = x^{m-n}$ für jedes $x \in \mathbb{Q}^*$ und für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.
3. Potenz einer Potenz	$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ für jedes $x \in \mathbb{Q}^*$ und für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.
4. Potenz eines Produkts	$(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$ für alle $x \in \mathbb{Q}^*$, $y \in \mathbb{Q}^*$ und $m \in \mathbb{Z}$.
Schlussfolgerung: Wenn $x \in \mathbb{Q}^*$ und $n \in \mathbb{Z}$, dann $(-x)^n = (-1)^n \cdot x^n$;	$(-x)^n = x^n$, wenn n gerade ist und $(-x)^n = -x^n$, wenn n ungerade ist.
5. Potenz eines Quotienten	$(x : y)^m = x^m : y^m$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}^*$ und für jedes $m \in \mathbb{Z}$.

Wir lösen und beobachten

Berechnet auf zwei Arten: **a)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; **b)** $(-2)^{-3}$.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{2^{-2}}{3^{-2}}=\frac{\left(\frac{2}{1}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{1}\right)^{-2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}=\frac{1}{4}:\frac{1}{9}=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{1}=\frac{9}{4}$.
b) $(-2)^{-3}=\left[(-2)^{-1}\right]^{3}=\left(\frac{1}{-2}\right)^{3}=\frac{1^3}{(-2)^3}=\frac{1}{-8}=-\frac{1}{8}$.	$(-2)^{-3}=\left[(-2)^{-1}\right]^{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=-\frac{1}{8}$.

2. a) Beweist, dass $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ für jedes $x\in\mathbb{Q}$, $x\neq 0$, und für jedes $n\in\mathbb{Z}$.

b) Berechnet mithilfe der in Punkt a) angegebenen Beziehung 3^{-4}; 10^{-3}; $(0{,}1)^{-3}$; 9^{-2}.

Lösung

a) $x^{-n}=\left(x^{-1}\right)^{n}=\left(\frac{1}{x}\right)^{n}=\frac{1^n}{x^n}=\frac{1}{x^n}$ für jedes $x\in\mathbb{Q}$, $x\neq 0$, und für jedes $n\in\mathbb{Z}$.

b) $3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$; $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}=0{,}001$; $(0{,}1)^{-3}=\frac{1}{(0{,}1)^3}={}^{1000)}\frac{1}{0{,}001}=1000$; $9^{-2}=\frac{1}{9^2}=\frac{1}{81}$.

Übungen und Aufgaben

1. Schreibt als Potenz, wobei ihr jeweils die Basis der Potenz und den Exponenten der Potenz angebt:

a) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$;

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$;

c) $2{,}5\cdot 2{,}5\cdot 2{,}5\cdot 2{,}5$;

d) $\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$.

2. Führt die Rechnungen durch:

a) 4^3; **d)** $(-0{,}1)^6$;

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; **e)** $\left(-\frac{7}{10}\right)^0$;

c) $\left(-\frac{4}{3}\right)^3$; **f)** $\left(-\frac{4}{9}\right)^1$.

3. Führt die Rechnungen durch:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; **d)** $(-0{,}3)^8:(-0{,}3)^5$;

b) $0{,}2^3\cdot 0{,}2^2$; **e)** $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^3$;

c) $\left(-\frac{1}{4}\right)^6:\left(-\frac{1}{4}\right)^4$; **f)** $\left[(-0{,}4)^1\right]^4$;

g) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; **h)** $\left(-\frac{7}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)^5:\left(-\frac{7}{2}\right)^7$.

4. Schreibt als Potenz mit rationaler Basis:

9; -8; $\frac{1}{4}$; $0{,}01$; $-0{,}027$; $\frac{3^5}{2^{10}}$.

5. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und tragt in die leeren Kästchen den Buchstaben ***W*** ein, wenn die Aussage wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

Aussage	***W/F***
$0{,}4^2\cdot 0{,}4^5=0{,}4^{2+5}$	
$\left(\frac{2}{3}\right)^7:\left(\frac{2}{3}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^{7+4}$	
$\left[(-0{,}5)^2\right]^3=(-0{,}5)^{2\cdot 3}$	
$\left(-\frac{2}{7}\right)^3$ ist eine negative rationale Zahl.	
$0{,}6^2\cdot 0{,}6^3=0{,}6^{2\cdot 3}$	
$\left(\frac{3}{2}\right)^{10}:\left(\frac{3}{2}\right)^8=\left(\frac{3}{2}\right)^{10-8}$	

6. Berechnet:

a) $\frac{2^4}{3^5}\cdot\frac{3^6}{4^3}\cdot(-2)^3$; **b)** $\frac{5^6}{7^6}:\left(-\frac{5}{7}\right)^4+(-7)^{-1}$.

7. Übertragt in eure Hefte und vervollständigt die Tabelle mit der Beziehung $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ für jedes $x\in\mathbb{Q}$, $x\neq 0$, und für jedes $n\in\mathbb{Z}$.

a	$\frac{1}{2}$	$-0{,}5$	-2	$-\frac{3}{4}$	-1
a^{-1}					
a^{-2}					
a^{-3}					

8. Führt die Rechnungen durch:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}$; **b)** $[0,(3)]^{-3}$;

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$; **f)** 1^{-7};

d) $(-1)^{-4}$; **g)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$;

e) $(-0{,}2)^{-5}$; **h)** $(-0{,}1)^{8}$.

9. Es seien die Zahlen

$a=\left(-\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $b=\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^6$ und

$c=\left(-\frac{3}{2}\right)^5\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}:(-1{,}5)^2$.

Beweist, dass $a\cdot b\cdot c<-1$.

10. Bestimmt:

a) die natürliche Zahl n, für die $\left(\frac{5}{3}\right)^{1-n}=1$;

b) die ganze Zahl m, für die $\left(\frac{2}{7}\right)^{m}=3{,}5$;

c) die Ziffer p in der Zehnerbasis, für die $\overline{1,p}^{\,2}=2\frac{1}{4}$.

Minitest

1. Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt

20 Pkte. **a)** Von den Zahlen $a=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $b=\left(-\frac{2}{3}\right)^4$, $c=\left(-\frac{3}{4}\right)^5$ und $d=(1-2+3-4)^5$ ist eine positive Zahl:

A. a; **B.** b; **C.** c; **D.** d.

20 Pkte. **b)** Die rationale Zahl $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ ist gleich:

A. 2; **B.** – 2; **C.** – 4; **D.** 4.

20 Pkte. **c)** Das Ergebnis der Rechnung $\left(-\frac{5}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^3:\left(-\frac{5}{2}\right)^4$ ist:

A. $-\frac{5}{2}$; **B.** $\frac{5}{2}$; **C.** $-\frac{25}{4}$; **D.** $\frac{25}{4}$.

2.

15 Pkte. **a)** Berechnet $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ für $n\in\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

15 Pkte. **b)** Leitet die Werte der natürlichen Zahl n ab, für die $1\leq\left(\frac{3}{2}\right)^n\leq 3$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L4 Reihenfolge der Rechenoperationen und Verwendung von Klammern

Zur Erinnerung

Addition und Subtraktion sind Operationen erster Ordnung, *Multiplikation und Division* sind Operationen zweiter Ordnung, und Operationen mit *Potenzen* sind Operationen dritter Ordnung.
In den vorangegangenen Lektionen haben wir auch die folgenden Rechenregeln kennengelernt:

$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ für jedes $x \in \mathbb{Q}$.	$x \cdot (-1) = (-1) \cdot x = -x$ für jedes $x \in \mathbb{Q}$.
$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{Q}$.	$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$ für jedes $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$, und für jedes $n \in \mathbb{Z}$.
$-(x+y) = (-x) + (-y) = -x - y$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$.	$x - (y + z) = x - y - z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Bemerkung: Beim Auflösen von Klammern ändert das „–“-Zeichen vor der Klammer die Vorzeichen aller Glieder der Klammer.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit rationalen Zahlen ähnelt der Reihenfolge der Rechenoperationen mit positiven rationalen Zahlen, die wir in der fünften Klasse gelernt haben.

Wir merken uns

1. Wenn die Aufgabe nur *Operationen derselben Ordnung* enthält, werden sie in der Reihenfolge ausgeführt, in der sie geschrieben sind, von links nach rechts.
2. Wenn die Aufgabe *Operationen unterschiedlicher Ordnung enthält, aber keine Klammern*, dann führt man die Operationen dritter Ordnung, dann zweiter Ordnung und schließlich erster Ordnung aus, in der Reihenfolge von Punkt 1, d. h.:
Schritt 1. Man führt die Operationen mit Potenzen und Potenzierungen durch.
Schritt 2. Man führt Multiplikationen und Divisionen durch, wobei man die Ergebnisse aus dem vorherigen Schritt verwendet und die Reihenfolge von **1** einhält.
Schritt 3. Man führt Additionen und Subtraktionen durch, wobei man die Ergebnisse von Schritt 2 verwendet und die Reihenfolge von **1** beachtet.

Bemerkung: Operationen mit Potenzen können im vorbereitenden Schritt oder während des Lösens durchgeführt werden, wenn wir einige Zahlen in einer Form schreiben wollen, die die Berechnungen vereinfacht.

3. Wenn die Aufgabe auch Klammern enthält, dann:
Schritt 1. Man führt die Rechnungen in den runden Klammern durch, und zwar in der unter **2** beschriebenen Reihenfolge.
Schritt 2. Man verwandelt die eckigen Klammern in runde Klammern und die geschweiften Klammern in eckige Klammern.
Schritt 3. Man führt die Rechnungen in den neuen runden Klammern in der unter **2** beschriebenen Reihenfolge aus.
Schritt 4. Man geht so vor, bis alle Klammern entfernt sind, und führt dann die Rechnungen ohne Klammern durch.
Wir werden darauf achten, dass die Brüche, die sich aus den Rechnungen ergeben, unkürzbar sind.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Gelöste Übung

Schreibt die Zahl $\left[-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}:\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}-\frac{2}{9}\right]:\left(1+\frac{1}{3}+\frac{155}{93}\right)$ als unkürzbaren gemeinen Bruch.

Lösung	*Wir führen durch:*	*Rechnung*
	Operationen mit Potenzen, Potenzierungen	$\left[-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}:\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}-\frac{2}{9}\right]=\left[-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}-\frac{2}{9}\right]=\left(-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}\cdot\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\right)$
	Multiplikation in den runden Klammern	$\left(-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}\cdot\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\right)=\left(-\frac{7}{15}-\frac{14}{45}-\frac{2}{9}\right)$
	Additionen und Subtraktionen in den runden Klammern	$\left(-\frac{7}{15}-\frac{14}{45}-\frac{2}{9}\right)=\left(-{}^{3)}\frac{7}{15}-\frac{14}{45}-{}^{5)}\frac{2}{9}\right)=\left(-\frac{21}{45}-\frac{14}{45}-\frac{10}{45}\right)=-\frac{45}{45}=-1$ $\left(1+\frac{1}{3}+\frac{155}{93}\right)=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{155}{93}^{(31}\right)=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\right)=\left(1+\frac{6}{3}\right)=(1+2)=3.$
	Division der erhaltenen Ergebnisse	$(-1):3=-1\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}.$
	Wir schreiben:	

$$\left[-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}:\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}-\frac{2}{9}\right]:\left(1+\frac{1}{3}+\frac{155}{93}\right)=\left[-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}-\frac{2}{9}\right]:\left(1+\frac{1}{3}+\frac{155}{93}^{(31}\right)=$$

$$=\left(-\frac{7}{15}-\frac{14}{5}\cdot\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\right):\left(1+\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\right)=\left(-{}^{3)}\frac{7}{15}-\frac{14}{45}-{}^{5)}\frac{2}{9}\right):(1+2)=\left(-\frac{21}{45}-\frac{14}{45}-\frac{10}{45}\right):3=-\frac{45}{45}:3=-\frac{1}{3}.$$

Übungen und Aufgaben

1. Berechnet, wobei die Reihenfolge der Rechenoperationen einzuhalten ist:

a) $-5+\frac{7}{2}:\left(-\frac{1}{2}\right)$; **c)** $\frac{9}{10}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{27}{8}\right):\frac{9}{2}$;

b) $0{,}(8)+\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}:\frac{2}{3}$; **d)** $(0{,}5)^{2}:\frac{1}{6}+(-2)^{-2}$.

2. Es seien die Zahlen $a=0{,}(3)$ und $b=\frac{13}{39}$.

Berechnet die Zahl $c=(a-b)\cdot(a+b)$ und gebt an, ob sie negativ, positiv oder null ist.

3. Beweist, dass $\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5}-3^{-9}$ eine natürliche Zahl ist.

4. Führt die Rechnungen durch und gebt die Ergebnisse als gemeine unkürzbare Brüche an:

a) $0{,}(7)\cdot\frac{1}{21}+2{,}(3)\cdot3^{-2}$;

b) $\left[\left(1{,}(3)-\frac{1}{3}\right)^{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}\right]:\left(1-\frac{5}{18}\right)$;

c) $(6:1{,}5+1:0{,}2)\cdot(-0{,}1)^{-3}$;

d) $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{3}:\left(\frac{2}{5}\right)^{2}-1\right]\cdot\frac{15}{14}+1{,}5$;

e) $\left(\left|2-\frac{2}{3}\right|+\left|-\frac{11}{12}+\frac{3}{4}\right|\right):\left(1{,}2^{2}-2{,}65\right)\cdot\frac{11}{15}$.

5. Es seien die Zahlen

$$a = 8 \cdot \frac{7}{32} - \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3} + 0{,}25 \text{ und } b = 3{,}(6) + \frac{7}{3} : \left(1 + \frac{2}{5}\right).$$

a) Berechnet die rationalen Zahlen a und b.

b) Bestimmt die natürlichen Zahlen m und n, für die $m \cdot a + n \cdot b = 9$.

6. Gegeben sind die Zahlen

$$c = \frac{2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \text{ und } d = \frac{3 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}.$$

Führt die Rechnungen durch und bestimmt den Wahrheitswert der Sätze:

p_1: $17 \cdot c + 5 = 25 \cdot d$;

p_2: $c > d$;

p_3: $c < d$.

7. Führt die Rechnungen durch:

a) $\left[-\frac{7}{15} - \frac{14}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{9}\right] : \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{155}{93}\right)$;

b) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - 3^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - 5^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)$;

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)^4$;

d) $\left(\frac{4}{3}\right)^{43} \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{4+3} : \left[\frac{1}{16} \cdot \frac{2^{100}}{9^{24}}\right]$.

8. Berechnet das arithmetische Mittel der Zahlen:

$$x = \left(2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}\right) : \left(2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6}\right) \text{ und}$$

$$y = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] : \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2}\right)^6\right].$$

Minitest

30 Pkte. **1.** Ordnet jeder Zahl, die eine Rechnung in Spalte **A** angibt, den Buchstaben zu, der das entsprechende Ergebnis in Spalte **B** angibt.

A	B
1. $1 + \left(-\frac{1}{2}\right) : 0{,}25 =$	**a.** $\frac{7}{10}$
2. $\left(3^3 \cdot 3^{-2} + 4^4 \cdot 4^{-3}\right) : \left(-4\frac{2}{3}\right) =$	**b.** -1
3. $\frac{(-2)^3}{2^3 + 1} \cdot \frac{(-3)^3}{3^2 - 1} - 2{,}3 =$	**c.** $-\frac{3}{2}$
	d. -2
	e. $\frac{3}{2}$

2. Es seien die rationalen Zahlen

$$a = 1 : \left(1\frac{3}{7} - 2\frac{5}{14}\right),\ b = 2 + \left(\frac{1}{21} + \frac{5}{42} - \frac{6}{35}\right) : 15^{-1} \text{ und } c = \left(\frac{5}{24} + \frac{10}{72} + \frac{15}{144}\right) : (-1{,}2)^{-1}.$$

50 Pkte. **a)** Bestimmt die rationalen Zahlen a, b, und c.

10 Pkte. **b)** Beweist, dass $2 \cdot (a \cdot b \cdot c)$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

4.3 Gleichungen der Form $x + a = b$; $x \cdot a = b$; $x : a = b$, $(a \neq 0)$; $a \cdot x + b = c$, wobei $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Aufgaben, die mithilfe von Gleichungen gelöst werden

L1 Gleichungen der Form $x + a = b$; $x \cdot a = b$; $x : a = b$; $(a \neq 0)$; $a \cdot x + b = c$, wobei $a, b, c \in \mathbb{Q}$

Zur Erinnerung

Die Gleichheitsbeziehung in der Menge der rationalen Zahlen ist:
a) *reflexiv*: Jede rationale Zahl ist gleich sich selbst, also $a = a$ für alle $a \in \mathbb{Q}$.
b) *symmetrisch*: Wenn $a, b \in \mathbb{Q}$ und $a = b$, dann $b = a$.
c) *transitiv*: Wenn $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a = b$ und $b = c$, dann $a = c$.
Ausgehend von einer Gleichheit erhalten wir mithilfe *der Additions-, der Subtraktions-, der Multiplikations-* oder *der Divisionsoperation* von rationalen Zahlen die folgenden *äquivalenten Umformungen*:

Wenn $a, b \in \mathbb{Q}$ und $a = b$, dann $a + c = b + c$ und $a - c = b - c$ für jedes $c \in \mathbb{Q}$.
Wenn $a, b \in \mathbb{Q}$ und $a = b$, dann $a \cdot c = b \cdot c$ für jedes $c \in \mathbb{Q}$ und $a : c = b : c$ für jedes $c \in \mathbb{Q}$, $c \neq 0$.
Teilen durch 0 hat keinen Sinn!

Wir lösen und beobachten

Christian ist ein leidenschaftlicher Desserthersteller. Das Geburtstagsgeschenk für seine Schwester wird eine Schokoladentorte sein. Die Schokolade macht 20 % der Torte aus und wiegt 250 g.
a) Berechnet die benötigte Schokoladenmenge in g, wobei er schon 0,150 kg Schokolade hat.
b) Berechnet die Masse der Torte, die Christian herstellen will, in kg.

Lösung

a) x sei die Masse der Schokolade, die er braucht. Da 0, 150 kg = 150 g sind, ergibt sich die Gleichung $150 + x = 250$ mit der Unbekannten x und der Lösung $x = 250 - 150$, also $x = 100$ (g).

b) Sei t die Masse der Torte, ausgedrückt in kg. Dann ist die Masse der Schokolade 20 % von t. Da 250 g = 0,25 kg sind, erhalten wir die Gleichung $\frac{20}{100} \cdot t = 0{,}25$ mit der Unbekannten t. Wir teilen die beiden Glieder der Gleichung durch $\frac{20}{100}$ und erhalten $t = 0{,}25 : \frac{20}{100}$. Da $0{,}25 : \frac{20}{100} = \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{100}^{1}} \cdot \frac{\cancel{100}^{1}}{\cancel{20}^{4}} = \frac{5}{4} = 1{,}250$, folgt, dass $t = 1{,}250$ (kg).

Antwort: **a)** Christian braucht noch 100 g Schokolade. **b**) Die Geburtstagstorte seiner Schwester wiegt 1,250 kg.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Die Lösung der obigen Aufgabe führte zur Formulierung und Lösung von zwei Gleichungen in der Menge der rationalen Zahlen.
Wir schlagen vor, in der $\mathbb{Q}$-Menge oder in Teilmengen der $\mathbb{Q}$-Menge Gleichungen zu lösen, die in einer der folgenden Formen geschrieben werden können: $x + a = b$; $x \cdot a = b$; $x : a = b$; $a \neq 0$, oder $a \cdot x + b = c$, wobei $a, b, c \in \mathbb{Q}$.
Wir bezeichnen die Unbekannte mit x, aber in den Aufgaben können wir jede andere Bezeichnung verwenden.
Die Zahlen a, b, c sind bekannt und werden als Koeffizienten der Glieder der Gleichung bezeichnet.

1. $x + a = b;\ a, b \in \mathbb{Q}$	*Beispiel*
$x + a = b \mid -a$ $x = b - a.$ $L = \{b - a\}$	$x + 2{,}9 = 1{,}2 \mid -2{,}9$ $x = -1{,}7.$ $L = \{-1{,}7\}$
2. $x \cdot a = b;\ a, b \in \mathbb{Q}$	*Beispiele*
a) Wenn $a = 0$, lautet die Gleichung: $x \cdot 0 = b$. Gleichheit tritt nur für $b = 0$ auf, und wir erhalten: $L = \varnothing$, wenn $b \neq 0$ und $L = \mathbb{Q}$, wenn $b = 0$.	**i)** $x \cdot 0 = 1$, unmöglich und $L = \varnothing$. **ii)** $x \cdot 0 = -1 + 2 : 2 \Leftrightarrow x \cdot 0 = 0$, wahr für jedes $x \in \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}$.
b) Wenn $a \neq 0$, $x \cdot a = b \mid : a$ $x = b : a.$ $L = \{b : a\}.$	$x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{5} \mid : \left(-\frac{2}{3}\right)$ $x = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}, S = \left\{-\frac{3}{5}\right\}.$
3. $x : a = b;\ a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0$	*Beispiel*
$x : a = b \mid \cdot a$ $x = b \cdot a.$ $L = \{b \cdot a\}.$	$x : 3{,}5 = -2 \mid \cdot 3{,}5$ $x = -2 \cdot 3{,}5$ $x = -7$ und $L = \{-7\}.$
4. $a \cdot x + b = c;\ a, b \in \mathbb{Q}$	*Beispiele*
a) Wenn $a = 0$, ergibt sich: $x \cdot 0 + b = c$. Gleichheit tritt nur ein, wenn $b = c$ ist, und wir erhalten: $L = \varnothing$, wenn $b \neq c$ und $L = \mathbb{Q}$, wenn $b = c$.	**i)** $0 \cdot x + 3 = 5 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -2$, unmöglich und $L = \varnothing$. **ii)** $0 \cdot x + 3 = 5 - 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$, wahr für jedes $x \in \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}$.
b) Wenn $a \neq 0$, $a \cdot x + b = c \mid -b$ $a \cdot x = c - b \mid : a$ $x = (c - b) : a.$ $L = \{(c - b) : a\}.$	$-1{,}2 \cdot x + 3 = 5 \mid -3$ $-1{,}2 \cdot x = -2 \mid : (-1{,}2)$ $x = -2 : \left(-\frac{12}{10}\right) \Leftrightarrow x = 2 : \frac{12}{10}.$ Aber $2 : \frac{12}{10} = 2 \cdot \frac{10^{(2}}{12} = \cancel{2}^{1} \cdot \frac{5}{\cancel{6}_{3}} = \frac{5}{3}$, also $x = \frac{5}{3}$ und $L = \left\{\frac{5}{3}\right\}.$

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Oft lassen sich die Gleichungen, die wir lösen müssen, mithilfe der Eigenschaften der Operationen mit rationalen Zahlen in eine der oben genannten Formen bringen.

Wir merken uns

Zum Lösen einer Gleichung gehört Folgendes:

1. die Gleichung in eine bekannte Form bringen, indem man sie mit den Eigenschaften der Operationen mit rationalen Zahlen ausarbeitet;
2. Lösen der Gleichung mithilfe des bekannten Algorithmus;
3. Aufschreiben der Lösungsmenge entsprechend dem Bereich, in dem die Lösung verlangt wird.

Wir lösen und beobachten

Löst die Gleichung: $\frac{x}{2}+\frac{x-3}{7}=\frac{7-5x}{14}$.

Lösung: Da die Lösungsmenge nicht angegeben wird, lösen wir die Gleichung in $\mathbb{Q}$.

$$\frac{x}{2}+\frac{x-3}{7}=\frac{7-5x}{14} \Leftrightarrow {}^{7)}\frac{x}{2}+{}^{2)}\frac{x-3}{7}=\frac{7-5x}{14} \Leftrightarrow \frac{7x}{14}+\frac{2x-6}{14}=\frac{7-5x}{14} \Leftrightarrow \frac{9x-6}{14}=\frac{7-5x}{14} \Leftrightarrow 9x-6=7-5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x+5x=7+6 \Leftrightarrow 14x=13 \text{ mit } x=\frac{13}{14};\ L=\left\{\frac{13}{14}\right\}.$$

Übungen und Aufgaben

1. Wählt den Buchstaben, der die Gleichung angibt, deren Lösung die Zahl –3 ist.

A. $x+2,5=1,5$; **C.** $x+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$;

B. $x+(-2)^2=-1$; **D.** $x+3,(3)=0,3$.

2. Löst die Gleichung $x+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ und wählt den Buchstaben, der die Lösungsmenge der Gleichung angibt, aus.

A. $L=\left\{-\frac{1}{6}\right\}$; **C.** $L=\left\{-\frac{1}{5}\right\}$;

B. $L=\left\{\frac{1}{6}\right\}$; **D.** $L=\left\{\frac{5}{6}\right\}$.

3. Betrachtet die Gleichung $\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{4}=-0,25$.
Bestimmt, ob die Gleichung eine Lösung in der Menge $A=\left\{-2;\ 0;\ \frac{1}{2}\right\}$ hat. Begründet.

4. Löst die Gleichungen in der Menge der rationalen Zahlen:

a) $x+3,4=-0,15$; **d)** $x+3,(3)=0,3$;
b) $3\cdot x+2=-10$; **e)** $2,3\cdot x-4,6=6,9$;
c) $-5\cdot x+\frac{2}{5}=5,4$; **f)** $x:\frac{5}{8}+4=-12$.

5. Löst die Gleichung $9-2\cdot x=0$ in den Mengen:
a) $\mathbb{N}$; **b)** $\mathbb{Z}$; **c)** $\mathbb{Q}$.

6. **a)** Bestimmt die rationale Zahl a, wenn bekannt ist, dass –2 Lösung der Gleichung $a\cdot x+5=8-a$ ist.

b) Bestimmt die rationale Zahl b, wenn die Zahl $-\frac{1}{2}$ die Lösung der Gleichung $\frac{2}{3}\cdot x+b=1+\frac{b}{3}$ ist.

7. Löst die Gleichungen:

a) $4\cdot x+3=-x+18$;

b) $2\cdot(x+1)=-4\cdot x+2$;

c) $\frac{x}{4}+1=x-0,5$;

d) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot x=-1$;

e) $\frac{x+1}{2}+\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{x}{8}$;

f) $3\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)=2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$;

g) $\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}-x\right)+\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{24}$;

h) $\frac{1}{9}\cdot\left[\left(\frac{1}{8}\cdot x-1\right)-1\right]=0$;

i) $\frac{0,9-x}{0,6}-\frac{3-x}{2}=\frac{x-2,7}{0,3}$;

j) $\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{8}$;

k) $\left|0,7-\frac{x-1}{5}\right|=0$;

l) $2+\left|\frac{x}{3}-1\right|=1$.

8. Bestimmt die natürliche Zahl $\overline{ab}$, für die die Gleichheit gilt: $\overline{ab}+\frac{\overline{ab}}{3}+\frac{\overline{ab}}{3^2}+\frac{\overline{ab}}{3^3}=120$.

Minitest

1\. Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

25 Pkte. **a)** Die Lösung der Gleichung $x - \frac{1}{3} = 2,(3) - \frac{3}{5} \cdot x$ ist die Zahl:

A. $\frac{3}{5}$; **B.** $\frac{1}{3}$; **C.** $\frac{5}{3}$; D. $-\frac{5}{3}$.

25 Pkte. **b)** Eine Gleichung, die mit der Gleichung $\frac{x}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$ äquivalent ist, ist:

A. $x - 5 = 0$; **B.** $1 + x = 0$; **C.** $1 - x = 0$; **D.** $x + 5 = 0$.

2\. Löst die Gleichungen in der Menge der rationalen Zahlen:

4 × 10 Pkte. **a)** $x + 3,5 = 1,75$; **b)** $x : \frac{2-2^2}{5} = 1,(3) + 2$; **c)** $x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = (-1,5)^2$; **d)** $\frac{7}{4} \cdot (x+1) = 7 - 3,5$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Aufgaben, die mithilfe von Gleichungen gelöst werden

Viele der in der Praxis auftretenden Aufgaben haben Gleichungen als mathematisches Modell. Um die Aufgabe zu lösen, muss man die entsprechende *Gleichung* in der Menge *lösen*, die durch den Kontext der Aufgabe vorgegeben ist.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Wenn die Aufgabe durch eine *Gleichung* mit Lösungen in der *gewünschten* Menge umformuliert werden kann, umfasst die Lösung der Aufgabe die folgenden Schritte:
Schritt 1. *Bestimmen* der Unbekannten, Festlegen der *Bezeichnungen*, Aufschreiben der Beziehungen zwischen den auftretenden Größen in mathematischer Sprache; → ***Schritt 2.*** *Aufstellen* der Gleichung; → ***Schritt 3.*** *Lösen* der Gleichung; → ***Schritt 4.*** *Interpretieren* der Lösungen der Gleichung, unter Berücksichtigung *des Bereichs*, in dem wir nach *Lösungen* für die Aufgabe suchen → ***Schritt 5.*** *Formulieren der Schlussfolgerung*.

Bemerkung: Es ist sinnvoll, die erhaltene(n) Lösung(en) zu überprüfen, um eventuelle Fehler zu korrigieren.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Gelöste Aufgabe

Die Eltern von Sonja sind gleich alt (an Jahren). Das Alter von Sonja beträgt ein Fünftel des Alters ihrer Mutter.
In zwei Jahren wird die Summe der Lebensalter der drei Familienmitglieder 94 Jahre betragen.
Bestimme das aktuelle Alter von Sonja und das aktuelle Alter ihrer Mutter.

Lösung

Variante I. Wir bestimmen zuerst das Alter von Sonja. Die Unbekannte wird Sonjas aktuelles Alter sein.	
Schritt 1. Sei x das Alter von Sonja. Dann ist das Alter der Mutter gleich dem Alter des Vaters und beträgt $5 \cdot x$. Das Alter von Sonja in zwei Jahren ist $x + 2$, und das Alter beider Elternteile ist $5 \cdot x + 2$.	***Schritt 2.*** $(x + 2) + 2 \cdot (5 \cdot x + 2) = 94$.

Schritt 3. $(x+2)+2\cdot(5\cdot x+2)=94 \Leftrightarrow x+2+10\cdot x+4=94 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (1+10)\cdot x+6=94 \Leftrightarrow 11\cdot x+6=94 \quad \vert -6$ $11\cdot x=88 \quad \vert :11$ $x=8.$	***Schritt 4.*** Das Alter wird in natürlichen Zahlen ausgedrückt, 8 ist eine natürliche Zahl und 5 · 8 = 40 ist eine natürliche Zahl, also hat die Aufgabe eine eindeutige Lösung.
Schritt 5. Sonja ist 8 Jahre alt und die Mutter ist 40 Jahre alt.	
Variante II. Wir bestimmen zuerst das Alter der Mutter. Die Unbekannte wird das aktuelle Alter der Mutter sein.	
Schritt 1. Sei x das Alter der Mutter. Dann ist das Alter von Sonja $\frac{1}{5}\cdot x$, und das Alter des Vaters ist x. In zwei Jahren wird die Mutter $x+2$ Jahre alt sein, so wie der Vater, und Sonja wird $\frac{1}{5}\cdot x+2$ Jahre alt sein.	***Schritt 2.*** $(x+2)+(x+2)+\frac{1}{5}\cdot x+2=94$
Schritt 3. $(x+2)+(x+2)+\frac{1}{5}\cdot x+2=94 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+2+x+2+\frac{1}{5}\cdot x+2=94 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(1+1+\frac{1}{5}\right)\cdot x+6=94 \Leftrightarrow \left({}^{5)}2+\frac{1}{5}\right)\cdot x+6=94 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{11}{5}\cdot x+6=94 \quad \vert -6$ $\frac{11}{5}\cdot x=88 \quad \vert :\frac{11}{5}$ $x=\cancelto{8}{88}\cdot\frac{5}{\cancelto{1}{11}} \Rightarrow x=40.$	***Schritt 4.*** Das Alter wird in natürlichen Zahlen ausgedrückt, 40 ist eine natürliche Zahl, 40 : 5 = 8 ist auch eine natürliche Zahl, also hat die Aufgabe eine eindeutige Lösung. ***Schritt 5.*** Die Mutter ist 40 und Sonja ist 8 Jahre alt. *Bemerkung*: Die Wahl der Unbekannten kann unterschiedlich sein, was zu unterschiedlichen Gleichungen führt, aber das richtige Lösen und Interpretieren der Lösungen der Gleichungen sichert, dass die Aufgabe richtig gelöst wurde.

Übungen und Aufgaben

1. Das Doppelte der Zahl a ist um 1,2 größer als $\frac{1}{2}$. Vergleicht die Zahl a mit der Zahl 0,85.

2. Bestimmt $r \in \mathbb{Q}$, wenn bekannt ist, dass man dasselbe Ergebnis erhält, wenn man r mit $\frac{4}{5}$ multipliziert oder wenn man davon 10 subtrahiert.

3. Anna und Maria haben in den Sommerferien insgesamt 72 Matheaufgaben gelöst. Finde die Anzahl der Aufgaben, die jede der beiden Schülerinnen gelöst hat, wenn Maria um 20 % weniger Aufgaben gelöst hat als Anna.

4. Berechnet die Maße von zwei komplementären Winkeln für jede der Situationen:

a) Die Differenz der Winkelmaße ist 18°.

b) Das Verhältnis der Winkelmaße ist $\frac{7}{3}$.

5. Von den Einwohnern einer Stadt sind 32 % Schüler, davon sind 1009 Vorschulkinder, 2018 Schüler des Gymnasiums und 1563 Lyzeaner.

a) Schreibt eine Gleichung mit den Daten der Aufgabe.

b) Löst die Gleichung von Unterpunkt a) und bestimmt die Anzahl der Einwohner dieser Stadt.

6. In einer Klasse gibt es 24 Schüler, Jungen und Mädchen. Wenn 3 weitere Mädchen hinzukämen, dann wäre die Anzahl der Jungen halb so groß wie die der Mädchen. Bestimmt die Anzahl der Mädchen in dieser Klasse.

7. Bestimmt die rationale Zahl x, wenn bekannt ist, dass das arithmetische Mittel der Zahlen 12, $9+x$, 15 und $3\cdot x$ gleich 16 ist.

8. Sergiu reist gerne und besucht historische und kulturelle Stätten. Er unternimmt eine Reise mit seinen Freunden. Sie planen, die Strecke in drei Etappen zu fahren, sodass sie in jeder Etappe die gleiche Entfernung zurücklegen. Aufgrund der Wetterbedingungen können sie sich nicht an den Plan halten. In der ersten Etappe legen sie nur die Hälfte der geplanten Strecke zurück, und in der zweiten Etappe legen sie um 15 km weniger zurück als geplant. Berechnet die Gesamtlänge der Strecke, wenn ihr wisst, dass es noch 70,5 km bis zum Ziel sind.

9. Bogdan hat festgestellt, dass er in diesem Schuljahr nicht viel Physik gelernt hat. Er macht Berechnungen, um zu sehen, welche Mittelnote er bekommen könnte. Er weiß, dass er zwei 7er, eine 6 und eine 9 hat und dass er eine einzige weitere Note bekommen kann.

a) Bestimmt die Note, die er bei seiner letzten Bewertung bekommen müsste, sodass die Jahresmittelnote 8 ist.

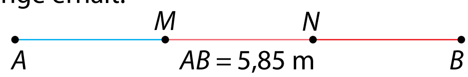
b) Entscheidet durch Berechnung, ob Bogdan die Jahresmittelnote 9 in Physik erreichen kann.

10. 356 Punkte hat Stefan für die Beantwortung aller 100 Fragen in einem Test erhalten. Für jede richtige Antwort wurden 5 Punkte vergeben, und für jede falsche Antwort wurden 3 Punkte abgezogen.

a) Gebt die Anzahl der richtigen Antworten an, die Stefan gegeben hat. Begründet.

b) Berechnet die Mindestanzahl der richtigen Antworten, die ein Teilnehmer geben müsste, um für denselben Test mindestens 430 Punkte zu erhalten.

11. Eine Stange mit der Länge von 5,85 m wird in drei Teile geteilt, deren Längen direkt proportional zu den Zahlen 1,2; 1,3 bzw. 1,4 sind. Berechnet die Länge jedes Stücks, das man durch Schneiden der Stange erhält.



12. Anna hat um 30 Lei weniger als Dana. Wenn Ana eine doppelt so große Geldsumme hätte als die, die sie jetzt hat, und Dana halb so viel Geld hätte, wie sie jetzt hat, dann hätten die beiden Freundinnen gleich viel Geld. Berechnet die Geldsumme, die jede von ihnen hat.

13. Natalja hat eine bestimmte Geldsumme für einen Ausflug. Sie plant 20 % davon für den Transport ein, 55 % für Unterkunft und Verpflegung und den Rest von 450 Lei für Geschenke oder unvorhergesehene Ausgaben.

a) Berechnet die Geldsumme, die Natalja für den Ausflug zur Verfügung hat.

b) Berechnet die Summe, die sie für den Transport vorgesehen hat.

Minitest

40 Pkte. **1.** Ein 90 cm langes Kabel wird in zwei Stücke zerschnitten, von denen eines die gleiche Länge wie $\frac{2}{3}$ des anderen hat. Berechnet, wie lang jedes Kabelstück ist.

2. Florin schreibt eine Zahl auf eine Karte. Drei seiner Mitschüler subtrahieren nacheinander die Zahlen 2,3; 3,7 und 7,2 von dieser Zahl und stellen fest, dass die Summe ihrer Ergebnisse die Zahl ergibt, die Florin auf die Karte geschrieben hat.

25 Pkte. **a)** Bildet eine Gleichung mit den Daten der Aufgabenstellung.

25 Pkte. **b)** Bestimmt die von Florin auf die Karte geschriebene Zahl.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

ABSCHLIEẞENDE BEWERTUNG

I. *Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.*

5 Pkte. **1.** Die Zahl 1,75 schreibt man als unkürzbaren gemeinen Bruch:

A. $\frac{7}{4}$ **B.** $\frac{17}{5}$; **C.** $\frac{7}{5}$; **D.** $\frac{11}{4}$.

5 Pkte. **2.** Die entgegengesetzte Zahl von $-1{,}5 + 0{,}25 \cdot 5$ ist:

A. 0; **B.** 0,25; **C.** –0,25; **D.** –0,5.

5 Pkte. **3.** Wenn $\left|a + \frac{3}{2}\right| = 0$, dann ist a:

A. $\frac{1}{3}$; **B.** $\frac{3}{2}$; **C.** $-\frac{3}{2}$; **D.** $-\frac{2}{3}$.

5 Pkte. **4.** Die Zahlen $-2{,}5; -\frac{11}{5}; -\frac{b}{10}; -\frac{4}{2}$ stehen in steigender Reihenfolge, wenn b gleich ist mit:

A. 24; **B.** 19; **C.** 23; **D.** 21.

5 Pkte. **5.** Die ganze Zahl n, für die $< -\frac{31}{10} < n + 1$ ist, ist gleich:

A. –2; **B.** –4; **C.** –3; **D.** –1.

5 Pkte. **6.** Das Ergebnis der Rechnung $\left(-\frac{2}{5}\right)^5 : \left(-\frac{2}{5}\right)^2$ ist:

A. $-\frac{6}{15}$; **B.** $+\frac{8}{25}$; **C.** $-\frac{8}{125}$; **D.** $+\frac{8}{125}$.

II. *Schreibt die vollständigen Lösungen auf.*

1. Seien die Zahlen $a = \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$, $b = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) - \left(5 - \frac{5}{3}\right)$ und $c = 24 : (-32) - 2{,}75$.

15 Pkte. **a)** Bestimmt, ob es unter den drei Zahlen rationale Zahlen gibt, die keine ganzen Zahlen sind.

5 Pkte. **b)** Zeigt, dass $d = \frac{a \cdot b \cdot c}{-7}$ eine natürliche Zahl ist.

15 Pkte. **2.** Löst die Gleichung: $\frac{x+2}{5} - \frac{3}{10} = -\frac{1}{2}$.

3. Adrian möchte ein Telefon kaufen. Er stellt fest, dass er nur die Hälfte des Geldes besitzt, das er für den Kauf des Telefons bräuchte. Seine Schwester Andrea trägt ein Drittel des Telefonpreises bei, und die Großeltern bezahlen den Rest von 150 Lei. Wir bezeichnen den Preis des Telefons mit p.

5 Pkte. **a)** Berechnet die Summe, die Adrian beisteuert, abhängig von p.

5 Pkte. **b)** Berechnet die Summe, die Andrea beisteuert, abhängig von p.

5 Pkte. **c)** Schreibt eine Gleichung mit der Unbekannten p (der Preis des Telefons), die den Daten der Aufgabe entspricht.

10 Pkte. **d)** Löst die Gleichung und bestimmt den Preis des Telefons, das Adrian sich wünscht.

Bemerkung: Arbeitszeit: 50 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

5. GRUNDBEGRIFFE DER GEOMETRIE

Spezifische Kompetenzen: 1.5; 2.5; 3.5; 4.5; 5.5; 6.5

5.1 Winkel in der Ebene

L1 Wiederholung und Ergänzungen

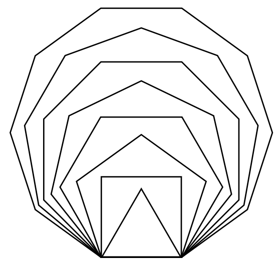
Zur Erinnerung

Die geometrische Figur, die von *zwei Halbgeraden* mit einem *gemeinsamen Ursprung* gebildet wird, heißt *Winkel*. Die beiden Halbgeraden werden als *Schenkel des Winkels* bezeichnet, und ihr gemeinsamer Ursprung wird als *Scheitelpunkt des Winkels* bezeichnet.

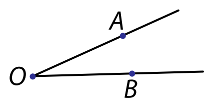
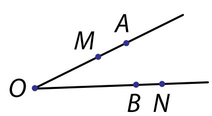
Identifiziert mindestens drei unterschiedlich große Winkel in der Abbildung, indem ihr mit eurem Banknachbarn ihre Seiten und ihre Punkte betrachtet.

Verwendet den Winkelmesser, um die identifizierten Winkel zu messen. Zeichnet mithilfe geometrischer Geräte zu den gemessenen Winkeln kongruente Winkel in eure Hefte und gebt ihre Art an (spitz, gerade, stumpf).

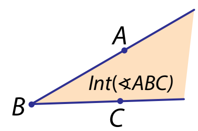
Wendet zur Beantwortung dieser Fragen die Kenntnisse aus der 5. Klasse an, die im Folgenden erwähnt und veranschaulicht werden.



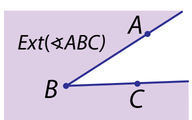
- Für den Winkel, der durch die Halbgeraden *OA* und *OB* bestimmt wird, verwenden wir eine der Notationen: $\sphericalangle AOB$ oder $\widehat{AOB}$ oder $\sphericalangle BOA$ oder $\widehat{BOA}$.
- Wenn ein einziger Winkel mit dem Scheitelpunkt *O* dargestellt ist, dann kann man ihn auch nur mit $\sphericalangle O$ oder $\widehat{O}$ bezeichnen.
- Wenn sich der Punkt M auf dem Schenkel *OA* und der Punkt *N* auf dem Schenkel *OC* befindet, dann ist der Winkel $\sphericalangle AOC$ identisch mit dem Winkel $\sphericalangle MON$.

Zeichnung	Notation
	$\sphericalangle AOB$ oder $\widehat{AOB}$ $\sphericalangle BOA$ oder $\widehat{BOA}$ $\sphericalangle O$ oder $\widehat{O}$
	$\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOA$, $\sphericalangle MON$, $\sphericalangle NOM$, $\sphericalangle MOB$, $\sphericalangle BOM$, $\sphericalangle AON$, $\sphericalangle NOA$ stellen denselben Winkel dar

Das Innere des Winkels *ABC* besteht aus allen Punkten, die sowohl in der Halbebene liegen, die von *AB* begrenzt wird und den Punkt *C* enthält, als auch in der Halbebene, die von *BC* begrenzt wird und den Punkt *A* enthält (er besteht aus den Punkten, die beide Halbebenen gemeinsam haben).



Das Äußere des Winkels besteht aus allen Punkten, die höchstens innerhalb *einer* der beiden Halbebenen liegen: derjenigen, die von *AB* begrenzt wird und den Punkt *C* enthält, oder derjenigen, die von *BC* begrenzt wird und den Punkt *A* enthält.



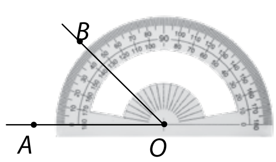
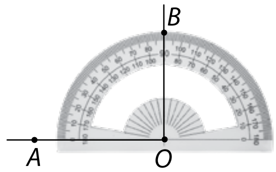
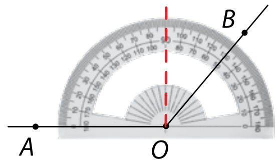
Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Um Winkelmaße auszudrücken, verwenden wir den *Sexagesimalgrad* und seine Teiler: *die Minute* und *die Sekunde*.
Der Sexagesimalgrad steht für einen Winkel, dessen Öffnung dem 360sten Teil eines Kreises entspricht.
Die Sexagesimalminute steht für den 60. Teil eines Grades, d. h. für einen Winkel, dessen Öffnung dem 21 600sten Teil eines Kreises entspricht. $1° = 60'$, $360° = (360 \cdot 60)' = 21\,600'$.
Die Sexagesimalsekunde entspricht dem 60. Teil einer Minute, d. h. dem 3600sten Teil eines Grades, d. h. einem Winkel mit einer Öffnung, die dem 1 296 000sten Teil eines Kreises entspricht;
$1' = 60''$, $1° = 3600''$, $360° = (360 \cdot 3600)'' = 1\,296\,000''$.

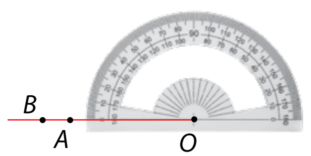
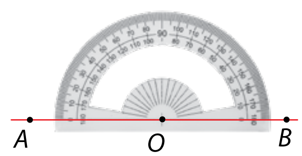
Bemerkung: Das Maß eines Winkels wird durch eine Zahl α von Sexagesimalgrad mit $0° \leq \alpha° \leq 180°$ ausgedrückt.

Je nach ihrem Maß können die Winkel eingeteilt werden in: *spitze* Winkel, *rechte* Winkel, *stumpfe* Winkel, *Nullwinkel* oder *gestreckte* Winkel.

1. Wenn zwei Winkel als Schenkel Halbgeraden haben, die sich auf verschiedenen Geraden befinden, d. h., die drei Punkte, mit denen wir den Winkel bezeichnen, nicht kollinear sind, sind folgende Situationen möglich:

Spitzer Winkel	*Rechter Winkel*	*Stumpfer Winkel*
Ein Winkel, der *kleiner* als 90° ist, wird als *spitzer Winkel* bezeichnet.	Ein Winkel, dessen Maß *gleich* 90° ist, wird *rechter Winkel* genannt.	Ein Winkel, der *größer* als 90° ist, wird als *stumpfer Winkel* bezeichnet.
		
$0° < \sphericalangle AOB < 90°$	$\sphericalangle AOB = 90°$	$90° < \sphericalangle AOB < 180°$

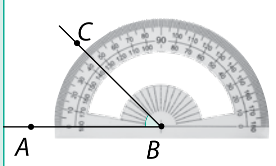
2. Wenn die Schenkel eines Winkels Strahlen der gleichen Geraden sind, dann sind die Punkte, die den Winkel benennen, kollinear. Folgende Sonderfälle sind möglich:

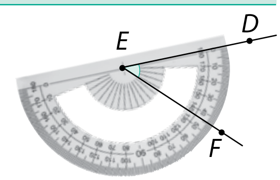
Ein Winkel mit dem Maß von 0° heißt *Nullwinkel*. Die Schenkel des Nullwinkels sind *identische Strahlen*.	Ein Winkel von 180° wird als *gestreckter Winkel* bezeichnet. Die Schenkel des gestreckten Winkels sind *entgegengesetzte Strahlen*.
	
$\sphericalangle AOB = 0°$	$\sphericalangle AOB = 180°$

Bemerkung: **1.** Spitze Winkel, rechte Winkel und stumpfe Winkel werden als *eigentliche Winkel* bezeichnet.
2. Null-Winkel und gestreckte Winkel werden als *uneigentliche Winkel* bezeichnet.

Zwei Winkel, *ABC* und *DEF*, die durch *Überlagerung zusammenfallen, werden kongruente Winkel* genannt.

Zwei Winkel *ABC* und *DEF* sind dann und nur dann kongruent, wenn sie das gleiche Maß haben.
Mathematisch gesehen gilt $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ dann und nur dann, wenn $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$.





Wir merken uns

$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A$ für jedwelchen Winkel $\sphericalangle A$. (Jeder Winkel ist kongruent mit sich selbst).
Wenn $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, dann $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle A$. Wenn $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ und $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, dann $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Wenn die Maße der Winkel *A* und *B* bekannt sind, kann die Summe ihrer Maße berechnet werden ($\sphericalangle A + \sphericalangle B$).

Vorlage für die Summe der Maße von zwei Winkeln:
Es seien $\sphericalangle MNP = 57°56'20''$, $\sphericalangle QRS = 41°37'2''$. Dann: $\sphericalangle MNP + \sphericalangle QRS = 57°56'20'' + 41°37'2'' = (57 + 41)° + (56 + 37)' + (20'' + 2'') = 98°93'22'' = 98° + (\mathbf{1} \cdot 60 + 33)'22'' = 98° + \mathbf{1}° + 33'\,22'' = 99°33'22''$.

Wenn $\sphericalangle B > \sphericalangle A$, kann die Differenz ihrer Maße berechnet werden ($\sphericalangle B - \sphericalangle A$).

Vorlage für die Differenz der Maße von zwei Winkeln:
1. Es seien $\sphericalangle MNP = 57°56'20''$, $\sphericalangle QRS = 41°37'2''$. Da $\sphericalangle MNP > \sphericalangle QRS$, folgt, dass man die Differenz berechnen kann $\sphericalangle MNP - \sphericalangle QRS = 57°56'20'' - 41°37'2'' = (57-41)° + (56-37)' + (20-2)'' = 16°19'18''$.
2. Es seien $\sphericalangle MNP = 54°18'21''$, $\sphericalangle QRS = 42°37'35''$. Da $\sphericalangle MNP > \sphericalangle QRS$, folgt, dass man die Differenz berechnen kann $\sphericalangle MNP - \sphericalangle QRS = 54°18'21'' - 42°37'35'' = 53°77'81'' - 42°37'35'' = (53-42)° + (77-37)' + (81-35)'' = 11°40'46''$.

Ist das Maß des Winkels $\sphericalangle A$ bekannt, so kann das Produkt $(\sphericalangle A) \cdot n$, berechnet werden, wobei n eine natürliche Zahl ist.

Vorlage: Es sei $\sphericalangle MPQ = 33°45'12''$. Dann ist $(\sphericalangle MPQ) \cdot 5 = (33°45'12'') \cdot 5 = 33° \cdot 5 + 45' \cdot 5 + 12'' \cdot 5 =$
$= 165°225'60'' = 165° + (3 \cdot 60 + 45)' + 60'' = (165 + 3)° + (45 + 1)'$, also $(\sphericalangle MPQ) \cdot 5 = 168°46'$.

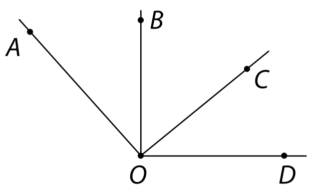
Ist das Maß des Winkels $\sphericalangle A$ bekannt, so kann $(\sphericalangle A) : n$ berechnet werden, wobei n eine von null verschiedene natürliche Zahl ist.

Vorlage: Wenn $\sphericalangle MPQ = 122°43'$, dann
$(\sphericalangle MPQ) : 5 = (122°43') : 5 = [(24 \cdot 5 + 2)° + (43)'] : 5 = [(24 \cdot 5)° + (2 \cdot 60 + 43)'] : 5 = [(24 \cdot 5)° + (32 \cdot 5 + 3)'] : 5 =$
$= [(24 \cdot 5)° + (32 \cdot 5)' + (3 \cdot 60)''] : 5 = [(24 \cdot 5)° + (32 \cdot 5)' + (36 \cdot 5)''] : 5 = 24° + 32' + 36'' = 24°32'36''$,
also $(\sphericalangle MPQ) : 5 = 24°32'36''$.

Bemerkung: Wenn beim letzten Schritt die Anzahl der Sekunden nicht durch den Divisor teilbar ist, wird das Ergebnis der Division der Sekunden gerundet.

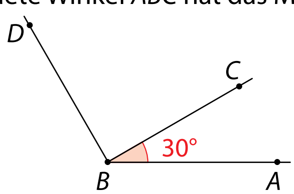
Übungen und Aufgaben

1. **a)** Schreibt die in der nebenstehenden Abbildung angegebenen Winkel auf.
b) Gebt die Elemente (Schenkel und Scheitelpunkt) jedes Winkels in Unterpunkt a) an.



2. Stellt mit geometrischen Geräten dar:
a) einen Nullwinkel; **d)** einen stumpfen Winkel;
b) einen spitzen Winkel; **e)** einen gestreckten Winkel;
c) einen rechten Winkel; **f)** zwei kongruente Winkel.

3. Der abgebildete Winkel ABC hat das Maß von 30°.



a) Fertigt die Zeichnung in euren Heften an, wenn bekannt ist, dass $\sphericalangle CBD = 90°$ ist. Verwendet den Winkelmesser, um das Maß des Winkels ABD zu bestimmen.
b) Vergleicht das Maß des Winkels ABD mit der Summe der Maße der Winkel CBD und CBA.

4. Zeichnet mithilfe geometrischer Werkzeuge den Winkel ABC mit dem Maß 23°. Übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken so aus, dass ihr wahre Aussagen erhaltet.
a) Der Punkt B ist … des Winkels ABC.
b) Die Halbgeraden … und … sind die Schenkel des Winkels ABC.
c) Das Maß des Winkels ABC, ausgedrückt in Minuten, ist … '.

5. Zeichnet die Halbgeraden OA, OB, OC so, dass $\sphericalangle AOB = 47°$, $\sphericalangle BOC = 43°$. Benutzt den Winkelmesser, um das Maß des Winkels $\sphericalangle AOC$ zu bestimmen. Analysiert jeden möglichen Fall.

6. Die Halbgeraden OA und OB sind entgegengesetzt, die Punkte M, N befinden sich auf derselben Seite der Geraden AB, und die Winkel AOM, MON, NOB sind kongruent.
a) Fertigt eine Zeichnung an, die den Angaben der Aufgabe entspricht.
b) Prüft, durch Messen mit dem Winkelmesser, ob $\sphericalangle AON \equiv \sphericalangle BOM$.
c) Bestimmt mithilfe des Winkelmessers die Maße der Winkel AOM und BOM.

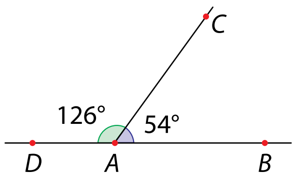
L2 Supplementwinkel. Komplementwinkel

Zur Erinnerung

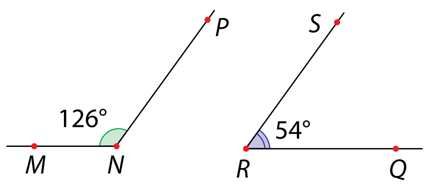
Ein Winkel, dessen Maß gleich 90° ist, wird *rechter Winkel* genannt.
Ein Winkel von 180° wird als *gestreckter Winkel* bezeichnet.
Ein Winkel mit dem Maß 0° wird als *Nullwinkel bezeichnet*.
Identifiziert die Winkel in der nebenstehenden Abbildung. Findet aufgrund eurer persönlichen Erfahrung zwei rechte Winkel, zwei Nullwinkel und zwei gestreckte Winkel.
Wir verwenden die Schreibweise $\sphericalangle ABC$ sowohl zur Bezeichnung des *Winkels ABC* als auch für das *Maß des Winkels ABC*.

Wir lösen und beobachten

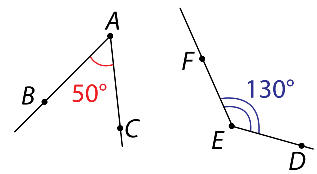
1. In den folgenden Abbildungen sind Winkelpaare dargestellt. Notiert die *Maße* der markierten *Winkel* und *addiert sie* für jede Konfiguration.



$\sphericalangle BAC = 54^\circ$, $\sphericalangle DAC = 126^\circ$,
$\sphericalangle BAC + \sphericalangle DAC = 180^\circ$.

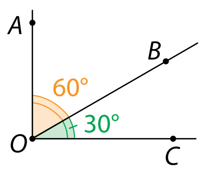


$\sphericalangle MNP = 126^\circ$, $\sphericalangle QRS = 54^\circ$,
$\sphericalangle MNP + \sphericalangle QRS = 180^\circ$.

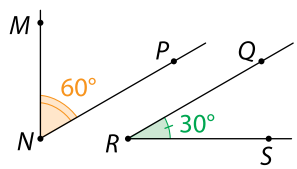


$\sphericalangle BAC = 50^\circ$, $\sphericalangle DEF = 130^\circ$,
$\sphericalangle BAC + \sphericalangle DEF = 180^\circ$.

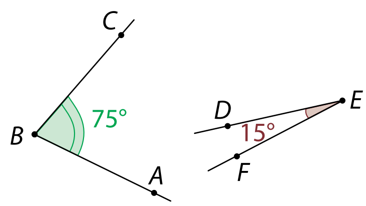
2. In der folgenden Tabelle sind Winkelpaare dargestellt. Notiert die *Maße* der markierten *Winkel* und *addiert* sie für jede Konfiguration.



$\sphericalangle BOA = 60^\circ$, $\sphericalangle COB = 30^\circ$,
$\sphericalangle BOA + \sphericalangle COB = 90^\circ$.



$\sphericalangle MNP = 60^\circ$, $\sphericalangle QRS = 30^\circ$,
$\sphericalangle MNP + \sphericalangle QRS = 90^\circ$.



$\sphericalangle CBA = 75^\circ$, $\sphericalangle DEF = 15^\circ$,
$\sphericalangle CBA + \sphericalangle DEF = 90^\circ$.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

1. Zwei Winkel werden als *supplementäre Winkel* bezeichnet, wenn die Summe ihrer Maße 180° beträgt.	Wenn $\sphericalangle A = 100^\circ$ und $\sphericalangle B = 80^\circ$, dann ist $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$, also sind $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ *supplementär*.
Wenn *die* Winkel $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ *supplementär* sind, nennt man $\sphericalangle A$ *das Supplement des Winkels B*, und $\sphericalangle B$ *das Supplement des Winkels A*.	Der 100°-Winkel ist das Supplement des 80°-Winkel. Der 80°-Winkel ist das Supplement des 100°-Winkel.

2. Zwei Winkel heißen *komplementäre Winkel*, wenn die Summe ihrer Maße 90° beträgt.

Wenn $\sphericalangle A = 40°15'$ und $\sphericalangle B = 49°45'$, dann $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90°$, also sind $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ komplementär.

Wenn die Winkel $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ komplementär sind, nennt man $\sphericalangle A$ das Komplement von Winkel B und $\sphericalangle B$ das Komplement von Winkel A.

Der Winkel von 40°15′ ist das Komplement des Winkels von 49°45′.
Der Winkel von 49°45′ ist das Komplement des Winkels von 40°15′.

Bemerkungen
1. Wenn die Winkel M und N *supplementär* sind und $\sphericalangle M = a^{\circ}$, cu $0 \le a \le 180$, dann ist $\sphericalangle N = 180^{\circ} - a^{\circ}$.
2. Wenn die Winkel M und N *komplementär* sind und $\sphericalangle M = b^{\circ}$, cu $0 \le b \le 90$, dann ist $\sphericalangle N = 90^{\circ} - b^{\circ}$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 1
a) Wenn zwei Winkel kongruent sind, dann sind auch ihre Supplementwinkel kongruent.
b) Wenn zwei Winkel kongruente Supplementwinkel haben, dann sind die Winkel kongruent.

Beweis
a) Es sei $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$. Dann haben die Winkel A und B das gleiche Maß, d. h., $\sphericalangle A = \sphericalangle B = a°$, $0 \le a \le 180$.
Das Supplement des Winkels A hat das Maß $180° - a°$, genau wie das Supplement des Winkels B. Wir schreiben: Wenn $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, dann $180° - \sphericalangle A = 180° - \sphericalangle B$.
b) In gleicher Weise folgt aus $180° - \sphericalangle A = 180° - \sphericalangle B$, dass $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, also $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$.

Anwendung 2
a) Wenn zwei Winkel mit einem Maß von höchstens 90° kongruent sind, dann sind auch ihre Komplementwinkel kongruent.
b) Wenn zwei Winkel kongruente Komplementwinkel haben, dann sind die Winkel kongruent.

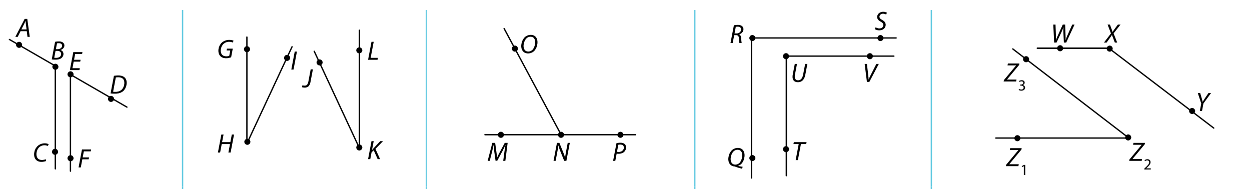
Beweis
a) Es sei $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$. Dann haben die Winkel A und B das gleiche Maß, d. h., $\sphericalangle A = \sphericalangle B = b°$, wobei $0 \le b \le 90$. Das Komplement des Winkels A hat das Maß $90° - b°$, genau wie das Komplement des Winkels B.
Wir schreiben: Wenn $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, dann $90° - \sphericalangle A = 90° - \sphericalangle B$.
b) In gleicher Weise folgt aus $90° - \sphericalangle A = 90° - \sphericalangle B$, dass $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, also $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$.

Wir merken uns

Wir können beweisen, dass *zwei Winkel kongruent sind*, indem wir zeigen, dass die Winkel *dasselbe Supplement* oder dass *sie dasselbe Komplement haben*.

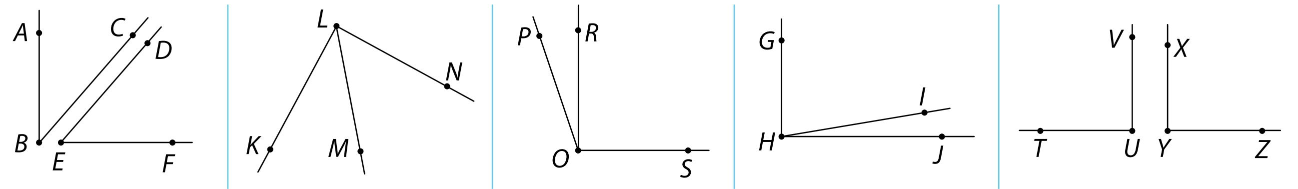
Übungen und Aufgaben

1. Messt mit dem Winkelmesser die Winkel in jeder Konfiguration und stellt fest, in welchen dieser Konfigurationen ihr Paare von Supplementwinkeln erkennt.



a) **b)** **c)** **d)** **e)**

2. Messt mit dem Winkelmesser die Winkel in jeder Konfiguration und bestimmt, in welchen dieser Konfigurationen ihr Paare von komplementären Winkeln erkennt. Begründet eure Entscheidung.



a) **b)** **c)** **d)** **e)**

3. Ein Winkel misst 67°. Berechnet:
   a) das Maß seines Komplements; **b)** das Maß seines Supplements.

4. Betrachtet die Winkel $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 54°$, $\sphericalangle D = 30°$, $\sphericalangle E = 50°$, $\sphericalangle F = 26°$.
   Schreibt die Paare von komplementären Winkeln auf und begründet eure Antwort.

5. Betrachtet die Winkel $\sphericalangle M = 140°$, $\sphericalangle N = 55°$, $\sphericalangle P = 100°30'$, $\sphericalangle Q = 40°$, $\sphericalangle R = 125°$, $\sphericalangle S = 79°30'$.
   Schreibt die Paare von supplementären Winkeln auf und begründet eure Antwort.

6. Übertragt in eure Hefte und füllt die Tabelle nach dem folgenden Muster aus.

Maß des Winkels	Maß des Komplements	Maß des Supplements	Rechtfertigung
$27°$	$63°$	$153°$	$90° - 27° = 63°$; $180° - 27° = 153°$.
$80°20'$			
$103°$			
	$55°$		
		$101°$	
$90°$			

7. Beweist, dass:
   a) wenn zwei eigentliche Winkel komplementär zueinander sind, dann sind die beiden Winkel spitz.
   b) Wenn zwei eigentliche Winkel supplementär zueinander sind, dann ist einer der Winkel ein stumpfer oder ein rechter Winkel.

8. Die Differenz der Maße zweier komplementärer Winkel beträgt 34°. Berechnet die Maße der beiden Winkel.

9. Die Differenz der Maße zweier supplementärer Winkel beträgt 72°. Berechnet die Maße der beiden Winkel.

Minitest

Übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken so aus, dass ihr richtige Sätze erhaltet.

20 Pkte. 1. Wenn zwei Winkel kongruent und komplementär sind, dann hat jeder Winkel das Maß … °.

20 Pkte. 2. Wenn zwei Winkel kongruent und supplementär sind, dann hat jeder Winkel das Maß … °.

20 Pkte. 3. Die Winkel A und B sind komplementär und $\sphericalangle A = 72°$. Das Maß des Winkels B ist … °.

30 Pkte. 4. Die Winkel C und D sind supplementär und das Maß des Winkels C ist um 20° größer als das Maß des Winkels D. Dann ist $\sphericalangle C = …°$ und $\sphericalangle D = …°$.

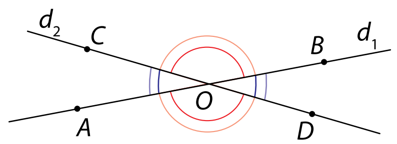
Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L3 Scheitelwinkel. Winkel um einen Punkt

Wir lösen und beobachten

Praktische Anwendung 1

Zeichnet die verschiedenen Geraden d_1 und d_2, die sich im Punkt O schneiden. Zeichnet die Punkte A und B auf der Gerade d_1 so ein, dass O auf der Strecke AB liegt, und dann die Punkte C und D auf der Gerade d_2, sodass O ein Punkt auf der Strecke CD ist.



a) Gebt das Maß des Winkels AOB und das Maß des Winkels COD an. Begründet.

b) Prüft durch Messung, ob die Winkel AOC und BOD kongruent sind.

c) Überprüft durch Messung, ob die Winkel COB und DOA kongruent sind.

Lösung: **a)** Die Schenkel des Winkels AOB sind entgegengesetzte Strahlen, also ist $\sphericalangle AOB$ ein gestreckter Winkel. Die Schenkel des Winkels COD sind entgegengesetzte Strahlen, also ist $\sphericalangle COD$ ein gestreckter Winkel. Dann ist $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = 180°$.

b) In unserer Zeichnung ist $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 30°$.

c) In unserer Zeichnung ist $\sphericalangle COB = \sphericalangle DOA = 150°$.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

In der obigen Anwendung:

1. Die Halbgeraden ***OA*** und ***OB*** sind entgegengesetzt; die Halbgeraden ***OC*** und ***OD*** sind entgegengesetzt.

2. Die Schenkel des Winkels *AOC* sind die Strahlen ***OA*** und ***OC***, und die Schenkel des Winkels *BOD* sind die Strahlen ***OB*** und ***OD***.

Umformulierungen: $\mathbf{R_1}$: Die Winkel *AOC* und *BOD* haben Paare von entgegengesetzten Strahlen als Schenkel.

$\mathbf{R_2}$: Die Winkel *AOC* und *BOD* haben die Schenkel in Verlängerung zueinander.

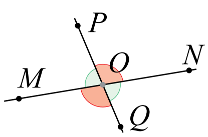
3. Die Schenkel des Winkels *AOD* sind die Strahlen ***OA*** und ***OD***, und die Schenkel des Winkels *BOC* sind die Strahlen ***OB*** und ***OC***.

Umformulierungen: $\mathbf{R_1}$: Die Winkel *AOD* und *BOC* haben Paare von entgegengesetzten Strahlen als Schenkel.

$\mathbf{R_2}$: Die Winkel *AOD* und *BOC* haben die Schenkel in Verlängerung zueinander.

Wir merken uns

Zwei Winkel werden als *Scheitelwinkel* bezeichnet, wenn ihre Seiten *Paare von entgegengesetzten Strahlen* sind.
Zwei beliebige Geraden bestimmen *zwei Paare von Scheitelwinkeln*.



OP und *OQ* sind *entgegengesetzte Halbgeraden*.
OM und *ON* sind *entgegengesetzte Halbgeraden*.
$\sphericalangle POM$ und $\sphericalangle QON$ sind *Scheitelwinkel*.
$\sphericalangle QOM$ und $\sphericalangle PON$ sind *Scheitelwinkel*.

In der *praktischen Anwendung* 1 haben wir durch Messung festgestellt, dass *die Scheitelwinkel kongruent sind*. Wir werden diese Eigenschaft für *zwei beliebige Scheitelwinkel* durch *Argumentation beweisen*.

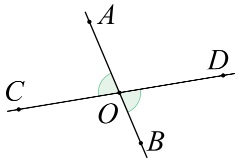
Das logische Denken ist in der Mathematik unerlässlich. Um allgemeine Eigenschaften geometrischer Figuren zu erkennen und zu beweisen, werden verschiedene Arten des logischen Denkens eingesetzt, wobei das Messen allein nicht ausreicht.

Wörterbuch

Das logische Denken = Technik, mit der durch die Verknüpfung bekannter Informationen neue Ergebnisse erzielt werden

Anwendung 1

Wenn zwei Winkel *Scheitelwinkel sind*, dann *sind sie kongruent*.



Beweis: Die Winkel AOC und BOD sind Scheitelwinkel. Dann sind die Strahlen OA und OB entgegengesetzt, also ist $\sphericalangle AOB$ gestreckt. Auf die gleiche Weise ist $\sphericalangle COD$ ein gestreckter Winkel. Wir leiten daraus ab, dass $\sphericalangle AOD$ sowohl zu $\sphericalangle AOC$ als auch zu $\sphericalangle BOD$ supplementär ist, d. h., $\sphericalangle AOC$ und $\sphericalangle BOD$ haben das gleiche Supplement, also, $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$.
Ebenso sind $\sphericalangle AOD$ und $\sphericalangle BOC$ Scheitelwinkel und haben das gemeinsame Supplement $\sphericalangle AOC$, also $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$.

Praktische Anwendung

1. a) Zeichnet die Gerade MN und den Punkt O auf der Strecke MN.

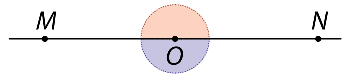
b) Gebt mit Begründung das Maß der Winkel MON an, die auf beiden Seiten der Gerade MN gebildet werden.

c) Berechnet die Summe der Maße der beiden Winkel mit dem Scheitelpunkt O, die auf beiden Seiten der Geraden MN gebildet werden.

Lösung

b) Die beiden Winkel MON sind gestreckt, sodass jeder ein Maß von 180° hat.

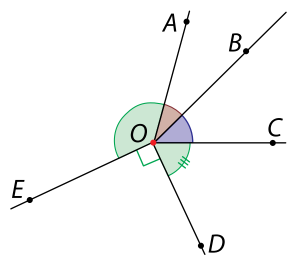
c) Die Summe der Maße der beiden Winkel beträgt 360°.



2. In der nebenstehenden Abbildung ist der Punkt O der gemeinsame Ursprung der Halbgeraden OA, OB, OC, OD, OE. Um den Punkt O bilden sich auf diese Weise die Winkel $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$, $\sphericalangle EOA$ mit disjunkten Inneren. Jeder Punkt der Ebene befindet sich entweder innerhalb eines Winkels oder auf einem Schenkel eines Winkels.

a) Messt mit dem Winkelmesser die Maße der fünf markierten Winkel.

b) Berechnet die Summe der Maße der Winkel: AOB, BOC, COD, DOE, EOA.



Lösung: In unserer Zeichnung:

a) $\sphericalangle AOB = 30^\circ$; $\sphericalangle BOC = 45^\circ$; $\sphericalangle COD = 65^\circ$; $\sphericalangle DOE = 90^\circ$; $\sphericalangle EOA = 130^\circ$.

b) $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA = 30^\circ + 45^\circ + 65^\circ + 90^\circ + 130^\circ = 360^\circ$.

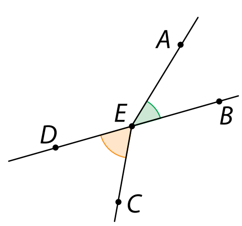
Wir merken uns

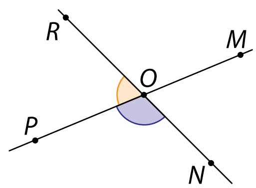
Drei oder mehr Winkel werden als *Winkel um einen Punkt* bezeichnet, wenn sie *einen gemeinsamen Scheitelpunkt* haben, *disjunktes Inneres* besitzen und jeder *Punkt der Ebene* entweder *innerhalb eines der Winkel* oder *auf einer der Halbgeraden* liegt.

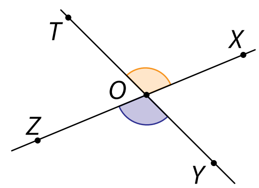
Lehrsatz: Die Summe der Maße der Winkel um einen Punkt beträgt 360°.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 1. Betrachtet die unten stehenden Konfigurationen und bestimmt, ob die markierten Winkel Scheitelwinkel sind.







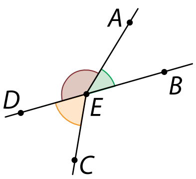
Lösung

Die Punkte *A, E* und *C* sind nicht kollinear, daher sind die Halbgeraden *EA* und *EC* keine entgegengesetzten Halbgeraden.
Schlussfolgerung: $\sphericalangle CED$ und $\sphericalangle AEB$ sind keine Scheitelwinkel.

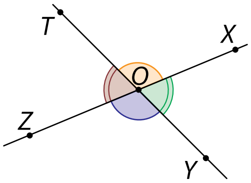
$\sphericalangle POR$ und $\sphericalangle PON$ haben einen gemeinsamen Schenkel, d. h. nicht beide Schenkel sind Paare von entgegengesetzten Strahlen.
Schlussfolgerung: $\sphericalangle POR$ und $\sphericalangle PON$ sind keine Scheitelwinkel.

Die Schenkel des Winkels *XOT* sind die Halbgeraden *OX* und *OT*. Die Schenkel des Winkels *YOZ* sind die Halbgeraden *OZ* (entgegengesetzt der Halbgerade *OX*) und *OY* (entgegengesetzt der Halbgerade *OT*).
Schlussfolgerung: $\sphericalangle XOT$ und $\sphericalangle ZOY$ sind Scheitelwinkel.

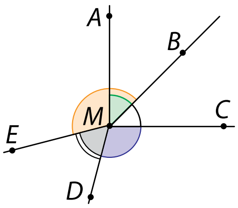
Anwendung 2. Betrachtet die unten stehenden Konfigurationen und bestimmt, ob es sich bei den markierten Winkeln um Winkel um einen Punkt handelt.



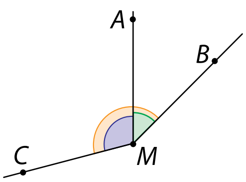
Die Winkel *AEB, CED* und *DEA* sind markiert. Sie haben gemeinsamen Scheitelpunkt und disjunktes Inneres, aber es gibt Punkte in der Ebene, die weder zum Inneren eines der drei Winkel noch zu einem der Schenkel gehören.
Schlussfolgerung: $\sphericalangle AEB$, $\sphericalangle CED$ und $\sphericalangle DEA$ *sind keine* Winkel um den Punkt *E*.



Die Winkel *XOY*, *YOZ*, *ZOT* und *TOX* sind markiert. Sie haben einen *gemeinsamen Scheitelpunkt* und *disjunktes Inneres* und jeder Punkt in der Ebene *gehört zum Inneren* eines der vier Winkel oder *zu einer der Halbgeraden*.
Schlussfolgerung: $\sphericalangle XOY$, $\sphericalangle YOZ$, $\sphericalangle ZOT$ und $\sphericalangle TOX$ *sind* Winkel um den Punkt *O*.

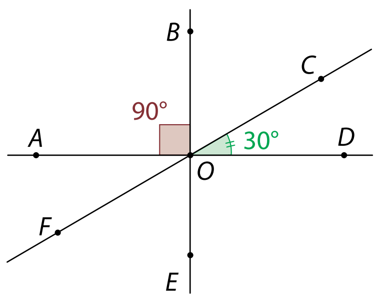


Die Winkel *AMB*, *BMC*, *CMD*, *DME* und *EMB* sind markiert.
Die Inneren der Winkel *AMB* und $\sphericalangle EMB$ sind nicht disjunkt ($\mathrm{Int}\sphericalangle AMB \subset \mathrm{Int}\sphericalangle EMB$).
Schlussfolgerung: $\sphericalangle AMB$, $\sphericalangle BMC$, $\sphericalangle CMD$, $\sphericalangle DME$ und $\sphericalangle EMB$ *sind keine* Winkel um den Punkt *M*.



Die Winkel *AMB, AMC* und *BMC* sind markiert.
Die Inneren der Winkel *AMB* und *BMC* sind nicht disjunkt. Die Inneren der Winkel *AMC* und *BMC sind nicht disjunkt*.
($\mathrm{Int}\sphericalangle AMB \subset \mathrm{Int}\sphericalangle BMC$ und $\mathrm{Int}\sphericalangle AMC \subset \mathrm{Int}\sphericalangle BMC$.)
Es gibt Punkte in der Ebene, die nicht zum Inneren einer der drei Winkel oder zu einem der Schenkel gehören.
Schlussfolgerung: $\sphericalangle AMB$, $\sphericalangle BMC$, $\sphericalangle AMC$ *sind keine* Winkel um den Punkt *M*.

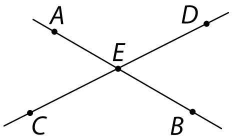
Gelöste Aufgabe. Die Geraden *AD, BE* und *CF* schneiden sich im Punkt *O*. Unter der Voraussetzung, dass $\sphericalangle COD = 30^\circ$ und $\sphericalangle AOB = 90^\circ$ ist, bestimmt die Maße der Winkel *FOA, DOE, BOC, EOF*.



Lösung: $\sphericalangle COD$ und $\sphericalangle FOA$ sind Scheitelwinkel, also ist $\sphericalangle COD \equiv \sphericalangle FOA$, also $\sphericalangle FOA = 30^\circ$.
Andererseits sind $\sphericalangle AOB$ und $\sphericalangle DOE$ Scheitelwinkel, d. h., $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle DOE$, also $\sphericalangle DOE = 90^\circ$.
$\sphericalangle BOC$ und $\sphericalangle EOF$ sind Scheitelwinkel, also $\sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle EOF$.
Es sei $x = \sphericalangle BOC = \sphericalangle EOF$. Da die Summe der Maße der um einen Punkt gebildeten Winkel 360° beträgt, folgt daraus, dass $2 \cdot x + 2 \cdot 30^\circ + 2 \cdot 90^\circ = 360^\circ$.
Wir erhalten $2 \cdot x + 240^\circ = 360^\circ$. Nach der Rückwärtsmethode ergibt sich $x = 60^\circ$, d. h., $\sphericalangle BOC = \sphericalangle EOF = 60^\circ$.

Übungen und Aufgaben

1. In der folgenden Abbildung schneiden sich die Geraden AB und CD in Punkt E. Identifiziert und benennt die Paare von Scheitelwinkeln, die in der Konfiguration dargestellt sind, und begründet eure Antwort.



2. Konstruiert mithilfe von geometrischen Geräten:

a) die Scheitelwinkel ABC und DBE;

b) die Scheitelwinkel FGH und IGJ mit $\sphericalangle FGH = 60^\circ$;

c) die supplementären Scheitelwinkel MON und POQ.

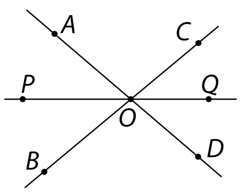
3. Zeichnet die Scheitelwinkel AOB und COD.

a) Wenn $\sphericalangle AOB = 100^\circ$, berechnet das Maß des Winkels COD.

b) Wenn $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 170^\circ$, berechnet das Maß des Winkels AOB.

c) Wenn $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle BOC$, berechnet das Maß des Winkels $\sphericalangle AOD$.

4. In der nebenstehenden Abbildung sind die Paare der entgegengesetzten Halbgeraden OA, OD bzw. OB, OC und die kollinearen Punkte P, O, Q dargestellt.

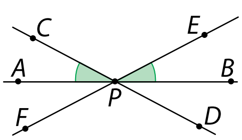


a) Zeigt, dass die Winkel AOP und DOQ Scheitelwinkel sind.

b) Wenn $\sphericalangle BOP = 33^\circ$, berechnet das Maß des Winkels $\sphericalangle COQ$.

c) Wenn $\sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle BOP$ und $\sphericalangle DOQ = 40^\circ$, berechnet das Maß des Winkels $\sphericalangle COQ$.

5. In der Zeichnung fallen die Geraden AB, CD und EF im Punkt P zusammen, $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPE = 28^\circ$.



a) Berechnet die Maße der Winkel APF, BPD.

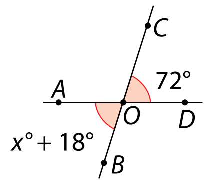
b) Berechnet $\sphericalangle CPE + \sphericalangle DPF$ aus der Summe der Maße der Winkel, die um einen Punkt gebildet werden.

c) Berechnet die Maße der Winkel CPE, DPF.

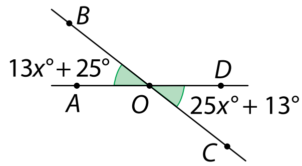
6. Die Winkel AOB und COD sind Scheitelwinkel und komplementär, $O \in AC$. Berechnet die Maße der Winkel AOB und BOC.

7. Berechnet anhand der Daten und Notationen in den folgenden Konfigurationen die Zahl x und das Maß des Winkels AOB.

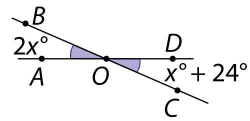
a)



b)



c)



8. Berechnet die Maße der Winkel, die von zwei sich schneidenden Geraden gebildet werden, wobei ihr wisst, dass die Differenz der Maße von zwei dieser Winkel 56° beträgt.

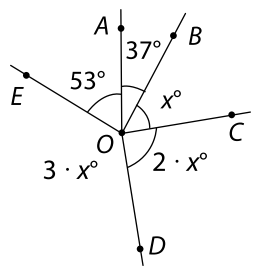
9. Fünf Winkel um einen Punkt haben das gleiche Maß.

a) Bestimmt jeweils das Maß.

b) Fertigt eine Zeichnung an, die den Daten der Aufgabe entspricht.

10. Betrachtet vier Winkel um einen Punkt, deren Maße in Sexagesimalgraden durch aufeinanderfolgende natürliche Zahlen ausgedrückt werden. Findet die Maße dieser Winkel und gebt an, wie viele von ihnen spitze Winkel sind.

11. In der folgenden Abbildung ist: $\sphericalangle AOB = 37^\circ$, $\sphericalangle BOC = x^\circ$, $\sphericalangle COD = 2 \cdot x^\circ$, $\sphericalangle DOE = 3 \cdot x^\circ$ und $\sphericalangle EOA = 53^\circ$.



a) Bestimmt die Zahl x und die Maße der Winkel BOC, COD, DOE.

b) Beweist, dass es unter den fünf Winkeln mindestens ein Paar von supplementären Winkeln gibt.

12. Betrachtet n Winkel um den Punkt M, einige mit dem Maß 30°, andere mit dem Maß 70°.

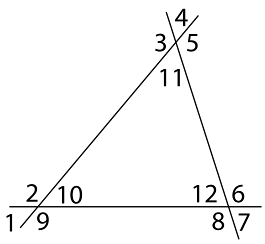
a) Bestimmt die natürliche Zahl n.

b) Fertigt eine Zeichnung an, die den Daten der Aufgabe entspricht.

c) Beweist, dass unabhängig davon, wie wir diese Winkel zeichnen, ihre Schenkel nicht von zwei entgegengesetzten Strahlen gebildet werden.

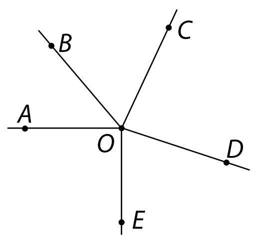
Minitest

45 Pkte. **1.** Schaut euch folgende Konfiguration an, übertragt die Tabelle in eure Hefte und tragt in die leeren Kästchen den Buchstaben ***W*** ein, wenn die Aussage wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist.



Aussage	***W/F***
a) ∢1 und ∢10 sind Scheitelwinkel.	
b) ∢3 und ∢11 sind Scheitelwinkel.	
c) Die Winkel ∢12 und ∢7 sind Scheitelwinkel.	
d) Wenn ∢2 = 130°, dann ∢9 = 50°.	
e) Wenn ∢6 + ∢8 = 116°, dann ist ∢7 = 121°.	
f) ∢1 + ∢2 + ∢9 + ∢10 = 360°.	

45 Pkte. **2.** Schaut euch folgende Konfiguration an, übertragt die Tabelle in eure Hefte und tragt den Buchstaben ***W*** ein, wenn die Aussage wahr ist, und ***F***, wenn die Aussage falsch ist.



Aussage	***W/F***
a) Die Winkel *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, *EOA* sind Winkel um den Punkt *O*.	
b) Die Winkel *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE* sind Winkel um den Punkt *O*.	
c) Die Winkel *AOB*, *BOC*, *COD* und *AOD* sind Winkel um den Punkt *O*.	
d) Die Winkel *AOB*, *BOC*, *COA* sind keine Winkel um den Punkt *O*.	
e) Die Winkel *AOE*, *EOC*, *COA* sind Winkel um den Punkt *O*.	

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L4 Anliegende Winkel

Zur Erinnerung

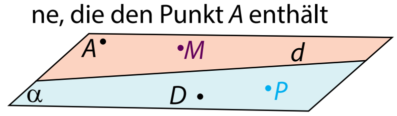
DIE HALBEBENE

Die Punkte *M* in der Ebene, die auf der gleichen Seite der Geraden *d* liegen wie der Punkt *A*, bilden die *von der Geraden d begrenzte Halbebene, die den Punkt A enthält.*

Die Punkte *P* in der Ebene auf derselben Seite der Geraden *d* wie der Punkt *D* liegen, bilden die *Halbebene, die von der Geraden d begrenzt wird und den Punkt D enthält.*

Bemerkung: Die durch die Gerade *d* begrenzten Halbebenen sind disjunkt (haben keinen gemeinsamen Punkt).

Die von *d* begrenzte Halbebene, die den Punkt *A* enthält



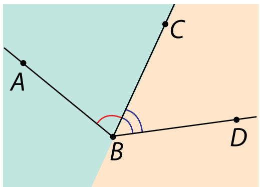
Die von *d* begrenzte Halbebene, die den Punkt *D* enthält

Ein Winkel, der *kein Nullwinkel* oder ein *gestreckter Winkel ist*, wird als *eigentlicher Winkel* bezeichnet. *Nullwinkel* und *gestreckter* Winkel sind *uneigentliche* Winkel.

Wir lösen und beobachten

1. a) Schreibt die gemeinsamen Elemente der Winkel *ABC* und *DBC* auf.

b) Bestimmt, ob die Inneren der Winkel *ABC* und *CBD* gemeinsame Punkte haben.

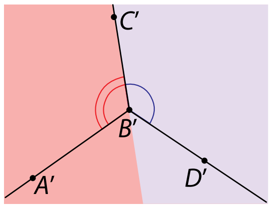


Lösung: **a)** Der Punkt *B* ist der Scheitelpunkt von ∢*ABC* und ∢*DBC*, also ist *B ihr gemeinsamer Scheitelpunkt*.
Der Strahl *BC* ist der Schenkel von ∢*ABC* und ∢*DBC*, also der *gemeinsame Schenkel*.
b) *Die Inneren der Winkel* ∢*ABC* und ∢*DBC* liegen in entgegengesetzten Halbebenen, *haben also keine gemeinsamen Punkte*.

Wir sagen, dass ∢*ABC* und ∢*DBC anliegende Winkel* sind.

2. a) Schreibt die gemeinsamen Elemente der Winkel *A′B′C′* und *C′B′D′*.

b) Bestimmt, ob die Inneren der Winkel *A′B′C′* und *C′B′D′* gemeinsame Punkte haben.



Lösung: **a)** Der Punkt B′ ist der Scheitelpunkt von ∢*A′B′C′* und ∢*D′B′C′*, also ist *B′ ihr gemeinsamer Scheitelpunkt*.
Die Halbgerade BC′ ist Schenkel für ∢*A′B′C′* und ∢*D′B′C′*, also ist *B′C′ der gemeinsame Schenkel*.
b) Die Inneren der Winkel *A′B′C′* und *D′B′C′* sind in entgegengesetzten Halbebenen eingeschlossen, haben also keine gemeinsamen Punkte.

Wir sagen, dass ∢*A′B′C′* und ∢*D′B′C′ anliegende Winkel* sind.

Wir merken uns

Zwei eigentliche Winkel werden als *anliegende Winkel bezeichnet*, wenn sie einen *gemeinsamen Scheitelpunkt* und *einen gemeinsamen Schenkel* haben und ihre *Inneren disjunkt* sind.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

In den beiden obigen Fällen von *anliegenden Winkeln* stellen wir fest:

1. Die Halbgerade *BC*, der *gemeinsame Schenkel* der anliegenden Winkel *ABC* und *CBD*, *gehört zum Inneren des* Winkels *ABD*.

2. Die Halbgerade *B′C′*, der *gemeinsame Schenkel* der anliegenden Winkel *A′B′C′* und *C′B′D′*, ist *im Äußeren des* Winkels *A′B′D′ enthalten*.

Wir leiten eine Berechnungstechnik für das *Maß des Winkels* ab, *der durch die nicht gemeinsamen Schenkel* zweier anliegender Winkel *gebildet wird*.

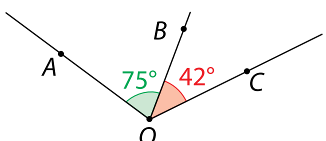
Anwendung 1. Wir betrachten die anliegenden Winkel *AOB* und *BOC*.

1. Wir bestimmen den Winkel *AOC*, der von den nicht gemeinsamen Schenkeln der anliegenden Winkel gebildet wird.

2. Wir bestimmen die Lage des gemeinsamen Schenkels der anliegenden Winkel, bezogen auf das Innere des Winkels *AOC*.

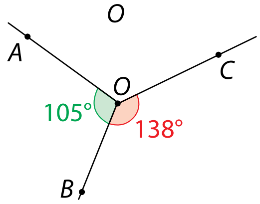
3. Wir berechnen das Maß für den Winkel *AOC* wie folgt:

a) Wenn der Strahl *OB* innerhalb des Winkels *AOC* liegt, dann ∢*AOC* = ∢*AOB* + ∢*BOC*.



∢*AOC* = ∢*AOB* + ∢*BOC*;
∢*AOC* = 75° + 42° = 117°.

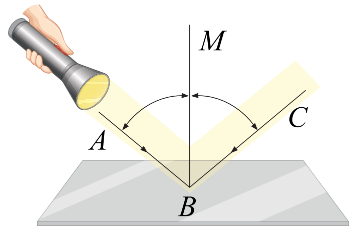
b) Wenn der Strahl *OB* außerhalb des Winkels *AOC* liegt, dann ∢*AOC* = 360° – (∢*AOB* + ∢*BOC*).



∢*AOB*, ∢*BOC* und ∢*AOC* sind Winkel um den Punkt *O*, also
∢*AOB* + ∢*BOC* + ∢*AOC* = 360°.
∢*AOC* = 360° – (105° + 138°) = 117°.

Bemerkung:
Wenn die Winkel ∢*AOB* und ∢*BOC* anliegend sind und *B* ∈ Int(∢*AOC*), dann ist ∢*AOC* = ∢*AOB* + ∢*BOC*.
Wenn die Winkel *AOB, BOC* anliegend sind und *B* ∈ Ext(∢*AOC*), dann ist ∢*AOC* = 360° – (∢*AOB* + ∢*BOC*).

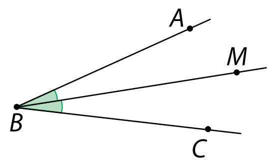
In der nebenstehenden Abbildung ist der Strahl *BM* innerhalb des eigentlichen Winkels *ABC* enthalten und $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MBC$.
Die Halbgerade *BM* wird als *Winkelhalbierende* des Winkels *ABC* bezeichnet.



Definition: Die Winkelhalbierende eines echten Winkels ist die Halbgerade, die vom Scheitelpunkt des Winkels ausgeht und *zwei kongruente Winkel* bestimmt.

Für jeden echten Winkel gibt es nur eine einzige Winkelhalbierende.

Bemerkung:
Wenn $\sphericalangle ABC$ ein eigentlicher Winkel ist und $M \in \text{Int}(\sphericalangle ABC)$, sodass $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MBC$, dann ist der Strahl *BM* die Winkelhalbierende des Winkels *ABC*.
Wenn $\sphericalangle ABC$ ein eigentlicher Winkel ist und *BM* die Winkelhalbierende des Winkels *ABC* ist, dann ist $M \in \text{Int}(\sphericalangle ABC)$ und $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MBC$.



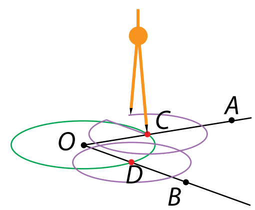
Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Praktische Anwendung: **Konstruktion der Winkelhalbierenden eines eigentlichen Winkels**
Benötigte Materialien: ein A4-Blatt, eine transparente, flexible Folie, Bleistift, Lineal, Winkelmesser, Zirkel.
1. Konstruktion der Winkelhalbierenden mithilfe des *Lineals und des Winkelmessers*
Schritt 1. Zeichnet auf ein A4-Blatt einen eigentlichen Winkel *MON*.
Schritt 2. Messt den gezeichneten Winkel und berechnet $\sphericalangle MON : 2$.
Schritt 3. Konstruiert mithilfe des Winkelmessers und des Lineals den Winkel *MOP* mit $P \in \text{Int}(\sphericalangle MON)$ und $\sphericalangle MOP = \sphericalangle MON : 2$.
Schritt 4. Bestimmt das Maß des Winkels *PON*, indem ihr anliegende Winkel verwendet, d. h., $\sphericalangle PON = \sphericalangle MON - \sphericalangle MOP$.

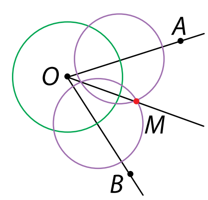
Schlussfolgerung. $\sphericalangle PON = \sphericalangle MOP = \sphericalangle MON : 2$, also $\sphericalangle PON \equiv \sphericalangle MOP$.

Ihr habt die Winkelhalbierende *OP* des Winkels *MON* mithilfe des Lineals und des Winkelmessers konstruiert.

2. Konstruktion der Winkelhalbierenden mit *Lineal und Zirkel*
Schritt 1. Konstruiert auf einer transparenten, flexiblen Folie einen eigentlichen Winkel *AOB*.
Schritt 2. Fixiert die Nadel des Zirkels an der Spitze des Winkels und zeichnet einen Bogen, sodass er die beiden Schenkel des Winkels in je einem Punkt schneidet. Beschriftet den Schnittpunkt des Bogens mit dem Schenkel *OA* mit *C* und den Schnittpunkt des Bogens mit dem Schenkel *OB* mit *D*.

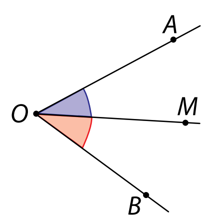


Schritt 3. Fixiert die Zirkelnadel im Punkt *C* und zeichnet einen Kreisbogen mit einem Radius, der größer ist als die halbe Entfernung *CO* innerhalb des Winkels *AOB*.
Schritt 4. Mit der gleichen Zirkelöffnung wie in Schritt 3 fixiert die Nadel in Punkt *D* und zeichnet einen Bogen innerhalb des Winkels *AOB*. Dieser schneidet den Bogen aus Schritt 3 in einem Punkt *M*.
Schritt 5. Verwendet das Lineal, um den Strahl *OM* zu zeichnen.
Schritt 6. Faltet die Folie entlang des Strahls *OM*.



Schlussfolgerung: Die Winkel *MOA* und *MOB* fallen durch Überschneidung zusammen, *sind* also *kongruent*.

Ihr habt die Winkelhalbierende *QT* des Winkels *SQR* mit Lineal und Zirkel konstruiert.
Im digitalen Handbuch (in rumänischer Sprache) findet ihr die beiden Techniken zur Konstruktion einer Winkelhalbierenden.



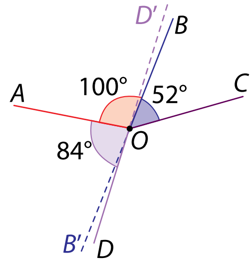
Wir lösen und beobachten

Aufgabe 1

In der anliegenden Konfiguration ist $\sphericalangle AOB = 100^\circ$, $\sphericalangle BOC = 52^\circ$, $\sphericalangle AOD = 84^\circ$. Bestimmt die Maße der Winkel AOC und BOD, wenn möglich unter Verwendung *anliegender Winkel*.

Lösung: Wir können leicht sehen, dass $B \in \mathrm{Int}(\sphericalangle AOC)$, also $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$, also $\sphericalangle AOC = 100^\circ + 52^\circ = 152^\circ$.

Um das Maß des eigentlichen Winkels BOD unter Verwendung anliegender Winkel zu berechnen, haben wir zwei Möglichkeiten:



1. $C \in \mathrm{Int}(\sphericalangle BOD)$ und $\sphericalangle BOD = \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD$. Aus der Summe der Winkelmaße um einen Punkt ergibt sich $\sphericalangle COD = 124^\circ$, dann $\sphericalangle BOD = 52^\circ + 124^\circ = 176^\circ$.

2. $A \in \mathrm{Ext}(\sphericalangle BOD)$ und $\sphericalangle BOD = 360^\circ - (\sphericalangle AOD + \sphericalangle AOB) = 360^\circ - (84^\circ + 100^\circ) = 176^\circ$.

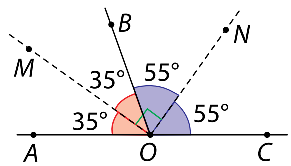
Aufgabe 2

a) Berechnet das Maß des Winkels, der durch die Winkelhalbierenden der anliegenden Winkel AOB und BOC gebildet wird, wobei $\sphericalangle AOB = 70^\circ$, $\sphericalangle BOC = 110^\circ$.

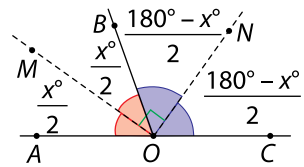
b) Zeigt, dass die Winkelhalbierenden zweier anliegender, supplementärer Winkel *einen rechten Winkel* bilden.

Lösung

a) OM sei die Winkelhalbierende des Winkels AOB und ON die Winkelhalbierende des Winkels BOC. Dann ist $\sphericalangle AOM = \sphericalangle MOB = \sphericalangle AOB : 2 = 70^\circ : 2 = 35^\circ$ und $\sphericalangle BON = \sphericalangle NOC = \sphericalangle BOC : 2 = 110^\circ : 2 = 55^\circ$. Da $\sphericalangle MOB$ und $\sphericalangle BON$ anliegend sind, folgt daraus, dass $\sphericalangle MON = \sphericalangle MOB + \sphericalangle BON = 35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$.



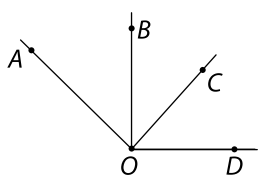
b) OM sei die Winkelhalbierende des Winkels AOB und ON sei die Winkelhalbierende des Winkels BOC. Wenn $\sphericalangle AOB = x^\circ$, dann ist $\sphericalangle BOC = 180^\circ - x^\circ$. Dann sind $\sphericalangle MOB$ und $\sphericalangle BON$ anliegend und $\sphericalangle MOB = x^\circ : 2$, und $\sphericalangle BON = (180^\circ - x^\circ) : 2$, woraus folgt, dass $\sphericalangle MON = \sphericalangle MOB + \sphericalangle BON = [x^\circ + (180^\circ - x^\circ)] : 2 = 90^\circ$.



Schlussfolgerung: Die Winkelhalbierenden zweier *anliegender supplementärer Winkel* bilden einen *rechten Winkel*.
Umformulierung: Die Winkel, die von den *Winkelhalbierenden zweier anliegender supplementärer Winkel* mit ihrem *gemeinsamen Schenkel* gebildet werden, sind *Komplementärwinkel*.

Übungen und Aufgaben

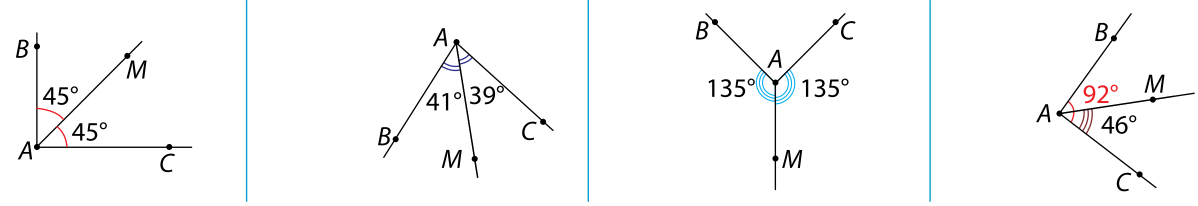
1. In der nebenstehenden Abbildung sind mehrere Winkel dargestellt.
Übertragt folgende Tabelle in eure Hefte und tragt in die leeren Kästchen den Buchstaben ***W*** ein, wenn der Satz wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn der Satz falsch ist.



Satz	***W/F***
AOB und *BOC* sind anliegende Winkel.	
AOC und *COD* sind nicht anliegende Winkel.	
AOB und *BOD* sind anliegende Winkel.	
AOC und *BOD* sind anliegende Winkel.	
AOD und *BOC* sind nicht anliegende Winkel.	

2. Gebt an, in welcher der folgenden Zeichnungen der Strahl *AM* die Winkelhalbierende des Winkels *BAC* ist.

a) **b)** **c)** **d)**



3. Konstruiert die anliegende Winkel *ABC* und *ABD* und berechnet dann jeweils das Maß des Winkels *CBD*.

a) $\sphericalangle ABC = 35^\circ$, $\sphericalangle ABD = 45^\circ$;

b) $\sphericalangle ABC = 137^\circ$, $\sphericalangle ABD = 73^\circ$.

4. Konstruiert die anliegenden Winkel *AOB* und *BOC*, wenn bekannt ist, dass sie:

a) komplementär sind und $\sphericalangle AOB = 50^\circ$;

b) supplementär sind und $\sphericalangle BOC = 30^\circ + \sphericalangle AOB$.

5. Die Halbgerade *OM* ist die Winkelhalbierende des Winkels *AOB*. Bestimmt:

a) das Maß der Winkel *AOM* und *BOM*, wenn bekannt ist, dass $\sphericalangle AOB = 100^\circ$ ist;

b) das Maß des Winkels *AOB*, wenn bekannt ist, dass $\sphericalangle AOM = 44^\circ 30'$.

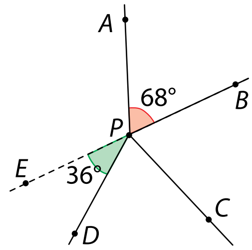
6. Es seien die Scheitelwinkel *AOB* und *COD*. Der Punkt *M* liegt innerhalb des Winkels *AOD*, sodass $\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOM = 60^\circ$.

a) Berechnet die Maße der Winkel *COD* und *AOD*.

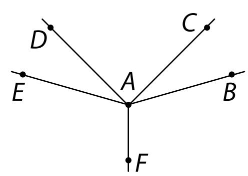
b) Beweist, dass *OM* die Winkelhalbierende des Winkels *AOD* ist.

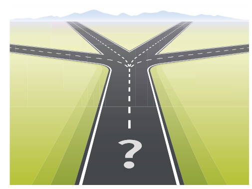
7. Die Winkel $\sphericalangle AOM$ und $\sphericalangle BON$ sind kongruent, die Strahlen *OA* und *OB* sind entgegengesetzt, und *OM* und *ON* liegen auf entgegengesetzten Seiten der Geraden *AB*. Zeigt, dass die Halbgeraden *OM* und *ON* entgegengesetzte Strahlen sind.

8. Die Winkel *APB, BPC, CPD, DPA* sind Winkel um den Punkt *P, PC* ist die Winkelhalbierende des Winkels *BPD*, und der Strahl *PE* ist dem Strahl *PB* entgegengesetzt. Bestimmt anhand der Angaben in der Zeichnung die Maße der Winkel *BPE, BPD, BPC, CPD* und *DPA*.



9. **a)** Skizziert die Kreuzung im Bild, indem ihr jede Straße durch einen Strahl mit dem Ursprung im Punkt *A* darstellt. Ihr erhaltet die Halbgeraden *AB, AC, AD, AE, AF*.



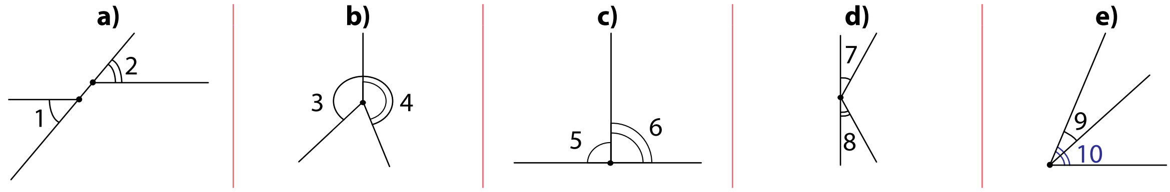


b) Unter der Voraussetzung, dass *DAC* ein rechter Winkel ist, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAE = 30^\circ$ und dass der dem Strahl *AF* entgegengesetzte Strahl die Winkelhalbierende des Winkels *CAD* ist, bestimmt die Maße der um den Punkt *A* gebildeten Winkel.

Minitest

50 Pkte. **1.** Gebt für jedes der unten dargestellten Winkelpaare mit Begründung an, welche Winkelpaare anliegend und welche nicht anliegend sind.

a) **b)** **c)** **d)** **e)**



40 Pkte. **2.** Der Winkel *MON* misst 120° und die Halbgerade *OA* liegt innerhalb des Winkels, sodass $\sphericalangle AOM = 10^\circ + \sphericalangle AON$. Bestimmt die Maße der Winkel *AOM* und *AON*.

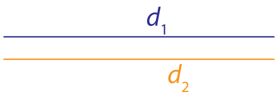
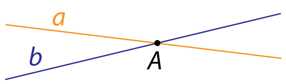
Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

5.2 Parallele Geraden

L1 Parallele Geraden. Das Parallelenaxiom

Zur Erinnerung

Die relative Lage, die zwei unterschiedliche Geraden zueinander haben, wird durch die *Anzahl der Punkte* angegeben, die die beiden Geraden *gemeinsam haben*.
Für zwei verschiedene Geraden in einer Ebene sind folgende Situationen möglich:

Relative Position der Geraden	Beschreibung/Definition	Darstellung	In mathematischer Sprache
Parallele Geraden	Zwei Geraden in einer Ebene, die keinen gemeinsamen Punkt haben, heißen parallele Geraden.		$d_1 \parallel d_2$ $d_1 \cap d_2 = \varnothing$
Konkurrente oder *sekante Geraden*	Zwei Geraden, die einen einzigen Punkt gemeinsam haben, werden als konkurrente oder sekante Geraden bezeichnet.		$a \nparallel b$ $a \cap b = \{A\}$

Bemerkungen
1. In der Ebene sind zwei verschiedene Geraden entweder *parallel* oder *konkurrent (sekant)*.
2. Eine Strecke oder ein Strahl wird als parallel zu einer anderen Strecke oder parallel zu einem anderen Strahl bezeichnet, wenn ihre Unterstützungslinien parallel sind.

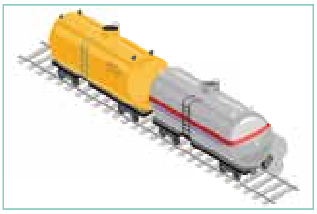
Wörterbuch

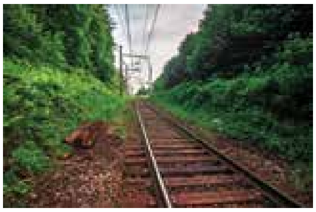
Unterstützungslinie für eine Strecke oder einen Strahl = Gerade, die alle Punkte der Strecke oder des Strahls enthält.
Beispiel: Die Gerade *AB* ist die Unterstützungslinie, die die Strecke *AB* und die Strahlen *AB* und *BA* trägt.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Im Alltag schätzen wir häufig die Lage zweier Geraden.

Manchmal erkennen wir *intuitiv*, ob zwei unterschiedliche Geraden in einer Ebene *parallel* oder *sekant verlaufen*, und zwar aufgrund unserer Lebenserfahrung und unserer Beziehung zu Objekten in ihrer Nähe. Der Nachteil ist, dass *optische Täuschungen* oder andere Faktoren die Antwort verfälschen können.



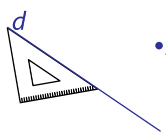
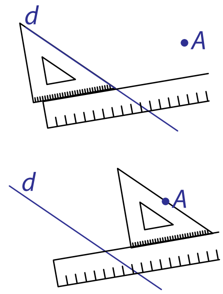
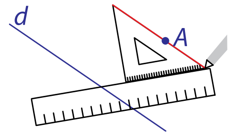
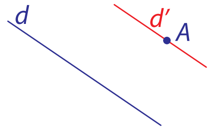


Das erste Bild deutet darauf hin, dass *die Gleise*, auf denen die beiden Waggons fahren, *parallel verlaufen*. Wüssten wir beim zweiten Bild nicht aus eigener Erfahrung, dass die Gleise parallel zueinander verlaufen, wären wir versucht zu sagen, dass sich die beiden Gleise an einem Punkt treffen, der nicht sehr weit entfernt ist.
Parallele Geraden aus der Wirklichkeit werden mithilfe geometrischer Geräte geometrisch dargestellt.

Bemerkung: Im Matheheft können wir die Rasterung der Seite benutzen, um parallele Geraden zu ziehen.

Bei der Lösung von Geometrieaufgaben überprüfen wir die *Parallelität* zweier Geraden oder konstruieren *zwei parallele Geraden* mithilfe des Lineals und des Zeichendreiecks, wobei wir eine Technik anwenden, die in der nächsten Anwendung beschrieben wird (durch *Translation*).

Praktische Arbeit 1: Technik zur Konstruktion einer *Parallelen* zu einer Geraden d durch einen Punkt A außerhalb der Geraden d. *Benötigte Materialien*: Matheheft, Lineal, Zeichendreieck, gespitzter Bleistift.

	Schritt 1	***Schritt 2***	***Schritt 3***	***Schritt 4***
Etappen der Konstruktion	Wir legen das Zeichendreieck so an, dass eine seiner Seiten die Gerade d überlappt.	Wir legen das Lineal an einer anderen Seite des Zeichendreiecks an, sodass, wenn wir das Dreieck auf dem unbeweglichen Lineal verschieben, die Seite, die rechts an d angelegt war, nun durch den Punkt A geht.	In dieser Position zeichnen wir die gerade Linie, die die durch den Punkt A verlaufende Seite stützt.	Wir bezeichnen die Gerade, die parallel zur Geraden d durch den Punkt A, außerhalb der Geraden d, verläuft, mit d'.
Grafische Darstellung				

Schaut im digitalen Lehrbuch in rumänischer Sprache nach, um die Technik der Konstruktion der *Parallelen zu einer bestimmten Geraden durch einen bestimmten Punkt* mithilfe des Lineals und des Zeichendreiecks dynamisch zu verfolgen.

Die obige Konstruktion beweist *intuitiv* eine grundlegende Wahrheit, das sogenannte *Parallelenaxiom*.

Das Parallelenaxiom (Axiom von Euklid)
Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann man zu dieser eine einzige parallele Gerade konstruieren.

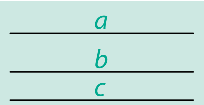
Wörterbuch

Axiom = grundlegende Wahrheit, die sich auf primäre Begriffe bezieht und ohne Beweis akzeptiert wird

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Ausgehend von dem Parallelenaxiom können wir durch Schlussfolgerungen weitere wichtige Ergebnisse *beweisen*.

Lehrsatz 1. (Transitivität der Parallelitätsbeziehung)
Zwei verschiedene Geraden, die parallel zu einer dritten verlaufen, sind parallel zueinander.



Umformulierung in mathematischer Sprache:
Seien a, b und c verschiedene Geraden. Wenn $a \parallel b$ und $b \parallel c$, dann $a \parallel c$.
Bei einem Beweis ist es wichtig, die Voraussetzung der Aufgabe oder des Lehrsatzes (die bekannten Daten) und die Schlussfolgerung (was bewiesen werden muss) zu identifizieren.
Dann können wir die zu beweisende Aussage in der Form: „Wenn *Voraussetzung*, dann *Schlussfolgerung*" formulieren.
Unter diesem Gesichtspunkt lässt sich der obige Satz wie folgt interpretieren:

Wörterbuch

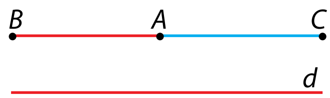
Lehrsatz = Aussage, deren Wahrheit durch logische Schlussfolgerungen bewiesen wird
Beweis = eine Reihe von Argumenten, die auf der Grundlage der Ausgangsdaten und der Informationen, die durch andere, bereits bekannte, Ergebnisse geliefert werden, formuliert werden und zu einer Schlussfolgerung führen

Voraussetzung	Schlussfolgerung
$a \parallel b$ $b \parallel c$ $a \neq c$	$a \parallel c$

Beweis: Wir wissen, dass $a \parallel b$, $b \parallel c$, $a \neq c$, und wir wollen beweisen, dass $a \parallel c$. Nach *Bemerkung* 1 können die Geraden a und c parallel oder konkurrent sein. Nehmen wir an, $a \nparallel c$. Dann sind a und c in einem Punkt M außerhalb der Gerade b sekant.
Wir erhalten $a \parallel b$, mit Punkt $M \in a$, und $c \parallel b$, mit $M \in c$, d. h., durch M gibt es zwei verschiedene Parallelen rechts von b, was dem Axiom der Parallelen widerspricht. Daher ist die Aussage $a \nparallel c$ falsch, und $a \parallel c$ bleibt wahr.

Bemerkung 1: Lehrsatz 1 ist eine erste Möglichkeit zu *beweisen, dass zwei Geraden parallel sind.*

Lehrsatz 2. Wenn *A, B, C* Punkte sind und zwei der Strecken *AB, AC, BC* parallel zu einer Gerade *d* sind, dann sind die Punkte *A, B, C* kollinear.

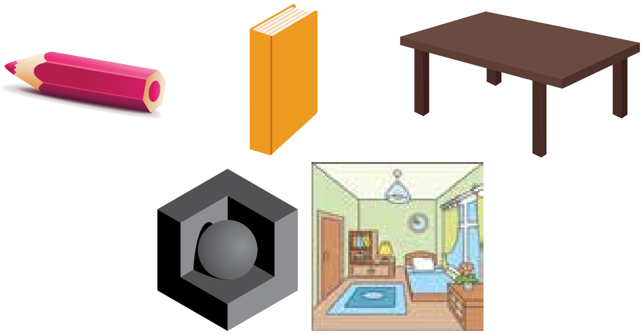


Beweis: A, B, C seien verschiedene Punkte mit $AB \parallel d$ und $AC \parallel d$. Aus dem Parallelenaxiom folgt, dass die Geraden *AB* und *CD* zusammenfallen, d. h., die Punkte *A, B* und *C* sind kollinear.

Bemerkung 2: Lehrsatz 2 ist ein sehr nützliches Werkzeug, um *zu beweisen, dass drei Punkte kollinear sind.*

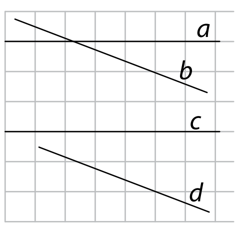
Übungen und Aufgaben

1. **a)** Identifiziert mit eurem Banknachbarn / eurer Banknachbarin in den folgenden Bildern die Kanten, die zu parallelen Geraden gehören.



b) Bestimmt anhand der Schnittkanten der Wände, der Decke und des Bodens des Raumes, in dem ihr euch befindet, sekante und parallele Geraden.

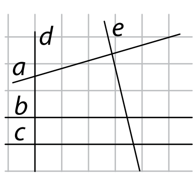
2. Anna zeichnet mehrere gerade Linien in ihr Matheheft. Betrachtet Annas Zeichnung, eventuell unter Verwendung geometrischer Geräte oder des Rasters der Seite, und verdeutlicht:



a) Paare von parallelen Geraden;

b) Paare von sekanten Geraden.

3. Schaut euch die beigefügte Zeichnung an, übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken mit einem der Symbole ∥ oder ∦ aus, um wahre Aussagen zu erhalten.



a … b	*b … c*	*c … d*	*d … e*
a … c	*b … d*	*c … e*	
a … d	*b … e*		
a … e			

4. Es seien die Gerade *a* und der Punkt *A* außerhalb der Gerade *a*.

a) Zeichnet durch den Punkt *A* die Gerade *b*, die parallel zur Geraden *a* verläuft.

b) Zeichnet durch den Punkt *A* die Gerade *c*, die nicht parallel zur Geraden *a* ist.

5. Wählt den Buchstaben, der die richtige Variante angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

a) Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden können wir konstruieren:

A. beliebig viele Geraden, die parallel zu der gegebenen Geraden verlaufen;

B. zwei verschiedene Geraden, die parallel zu der gegebenen Geraden verlaufen;

C. eine einzige Geraden, die parallel zu der gegebenen Geraden verläuft.

b) Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden können wir konstruieren:

A. beliebig viele Geraden, die die gegebene Gerade schneiden;

B. zwei verschiedene Geraden, die die gegebene Gerade schneiden;

C. eine einzige Gerade, die die gegebene Gerade schneidet.

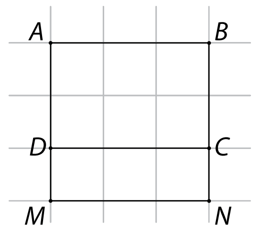
6. Auf beiden Seiten der Geraden *d* liegen die Punkte *A* bzw. *B*.
Konstruiert durch den Punkt *A* die Gerade *a*, parallel zur Geraden *d*, dann durch den Punkt *B* die Gerade *b*, parallel zur Geraden *d*. Gebt die Lage der Geraden *a* und *b* an und begründet eure Antwort.

7. Die Punkte *A* und *E* liegen auf beiden Seiten der Seite *BC* des Rechtecks *ABCD*, sodass $BE \parallel CD$ und $BE \equiv CD$. Zeigt, dass *B* die Mitte der Strecke *AE* ist.

Minitest

45 Pkte. **1.** Es seien A, B, C verschiedene Punkte und die Gerade d. Wenn $AB \parallel d$ und $AC \parallel d$, beweist, dass die Punkte A, B, C kollinear sind.

45 Pkte. **2.** $ABCD$ und $CDMN$ sind Rechtecke, bei denen A, D und M kollineare Punkte und B, C und N kollineare Punkte sind.
Übertragt in eure Hefte und tragt in die leeren Kästchen den Buchstaben ***W*** ein, wenn die Aussage wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist.



Satz	***W/F***
$AB \parallel CD$	
$BC \nparallel MN$	
$AM \parallel BN$	
$AB \nparallel MN$	
$CD \nparallel BN$	

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Winkel, die von zwei verschiedenen Geraden und einer Sekante gebildet werden

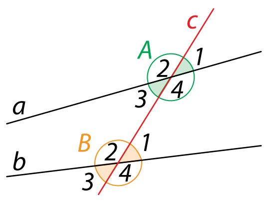
Wir lösen und beobachten

Auf dem nebenstehenden Bild sind mehrere gerade Linien hervorgehoben. Beachtet die Dreiergruppen von Linien (b, c, d); (c, e, f); (a, b, f); (b, c, f).
In der Ebene können *drei verschiedene Geraden* auf eine der folgenden Arten angeordnet werden:
1. zueinander parallel: zum Beispiel $b \parallel c \parallel d$.
2. zueinander sekant (sie haben einen gemeinsamen Punkt): Die Geraden c, e, f schneiden sich im Punkt M; $c \cap e \cap f = \{M\}$.
3. Eine der Geraden *schneidet* die beiden anderen.
(sie kreuzen sich an verschiedenen Punkten):

Die Gerade f ist die *Sekante* der Geraden a und b, weil $a \cap f = \{Q\}$, $b \cap f = \{P\}$ und $Q \neq P$.
Identifiziert in der Abbildung und in der Wirklichkeit andere Dreiergruppen von Geraden, *die* von einer Sekante *geschnitten werden*.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Man betrachte die verschiedenen Geraden a und b, die von der Sekante c in den Punkten A bzw. B *geschnitten werden*. Um den Punkt A bilden sich die Winkel A_1, A_2, A_3, A_4, und um den Punkt B bilden sich die Winkel B_1, B_2, B_3, B_4.
Unter Berücksichtigung der Lage, die die acht Winkel in Bezug auf die Sekante c und die Geraden a und b einnehmen, gruppieren wir sie in *Winkelpaare*, von denen einer den Scheitelpunkt A und der andere den Scheitelpunkt B hat, wobei jeder einen bestimmten Namen hat.



Je nach ihrer Position im Verhältnis zur Sekante können sie sich *auf verschiedenen Seiten der* Sekante oder *auf derselben Seite der* Sekante befinden. Diejenigen, die sich auf verschiedenen Seiten der Sekante befinden, werden auch als *Wechselwinkel* bezeichnet.

Je nach ihrer Position in Bezug auf die Geraden *a* und *b* können sie entweder *innere Winkel*, d. h. innerhalb des Streifens zwischen den Geraden *a* und *b*, oder *äußere* Winkel, d. h. außerhalb des Streifens zwischen den Geraden *a* und *b*, sein. Auf diese Weise erhält man: *innere Wechselwinkel, äußere Wechselwinkel, Stufenwinkel, innere Winkel auf derselben Seite der Sekante, äußere Winkel auf derselben Seite des Sekante, wie* in der folgenden Tabelle dargestellt.

Innere Wechselwinkel	*Äußere Wechselwinkel*	*Stufenwinkel*	*Innere Winkel auf derselben Seite der Sekante*	*Äußere Winkel auf derselben Seite der Sekante*
$\sphericalangle A_3$ und $\sphericalangle B_1$; $\sphericalangle A_4$ und $\sphericalangle B_2$	$\sphericalangle A_1$ und $\sphericalangle B_3$; $\sphericalangle A_2$ und $\sphericalangle B_4$	$\sphericalangle A_1$ und $\sphericalangle B_1$; $\sphericalangle A_2$ und $\sphericalangle B_2$; $\sphericalangle A_3$ und $\sphericalangle B_3$; $\sphericalangle A_4$ und $\sphericalangle B_4$	$\sphericalangle A_3$ und $\sphericalangle B_2$; $\sphericalangle A_4$ und $\sphericalangle B_1$	$\sphericalangle A_1$ und $\sphericalangle B_4$; $\sphericalangle A_2$ und $\sphericalangle B_3$

Bemerkung: Die *Stufenwinkel* sind ein innerer und ein äußerer Winkel von *a* und *b*, da sie sich auf derselben Seite der Sekante befinden.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Gelöste Aufgabe

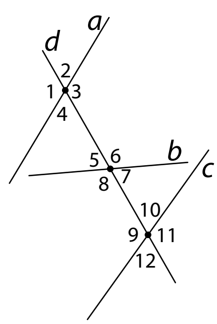
Die Sekante *d* schneidet die Geraden *a, b, c* und bildet mit ihnen Winkel wie in der nebenstehenden Konfiguration dargestellt.

Wenn bekannt ist, dass $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 8 = 115°$ und $\sphericalangle 7 = \sphericalangle 10$ ist, berechnet:

a) $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$, $\sphericalangle 4$;

b) $\sphericalangle 5$, $\sphericalangle 6$, $\sphericalangle 7$;

c) $\sphericalangle 9$, $\sphericalangle 10$, $\sphericalangle 11$ und $\sphericalangle 12$.



Lösung

a) $\sphericalangle 1$ und $\sphericalangle 3$ sind Scheitelwinkel.

Aus $\sphericalangle 1 = 115°$ ergibt sich $\sphericalangle 3 = 115°$.

$\sphericalangle 1$ und $\sphericalangle 2$ sind supplementär. Dann ist $\sphericalangle 2 = 65°$.

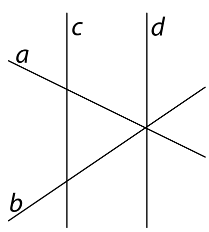
$\sphericalangle 2$ und $\sphericalangle 4$ sind Scheitelwinkel, also $\sphericalangle 4 = 65°$.

b) Mit ähnlichen Überlegungen ergibt sich:
$\sphericalangle 6 = 115°$, $\sphericalangle 5 = 65°$, $\sphericalangle 7 = 65°$.

c) Aus $\sphericalangle 7 = \sphericalangle 10$ und $\sphericalangle 7 = 65°$ ergibt sich:
$\sphericalangle 10 = 65°$.
Dann ist $\sphericalangle 9 = 115°$, $\sphericalangle 11 = 115°$, $\sphericalangle 12 = 65°$.

Übungen und Aufgaben

1. Beobachtet und analysiert die nebenstehende geometrische Konfiguration. Schreibt den Text in eure Hefte ab und füllt die Lücken so aus, dass ihr richtige Aussagen erhaltet.



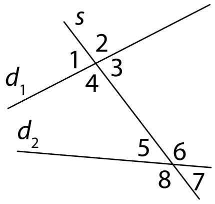
a) Die Gerade *a* ist die Sekante der Geraden … und … .

b) Die Gerade *b* ist die Sekante der Geraden … und … .

2. Zeichnet auf den Schenkeln *OA* und *OB* des spitzen Winkels *AOB* die Punkte *M* bzw. *N* ein und zeichnet dann die Gerade *MN*. Übertragt folgende Tabelle in eure Hefte und tragt in das leere Kästchen den Buchstaben ***W*** ein, wenn die Aussage wahr ist, oder den Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

Aussagen	***W/F***
p_1: Die Geraden *AM* und *BN* sind sekant.	
p_2: Die Gerade *MN* ist die Sekante der Geraden *OA* und *OB*.	
p_3: Die Winkel *OMN* und *ONM* sind Stufenwinkel, die von den Geraden *OA* und *OB* mit der Sekante *MN* gebildet werden.	

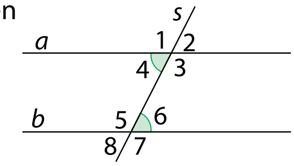
3. In der unten stehenden Zeichnung sind die Winkel, die die Geraden d_1 und d_2 mit ihrer Sekante s bilden, mit 1, 2, 3, …, 7, 8 gekennzeichnet. Übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken so aus, dass ihr richtige Aussagen erhaltet.



a) Die Winkel 1 und 5 sind … Winkel.
b) Die Winkel 4 und 6 sind … Winkel.
c) Die Winkel 2 und 8 sind … Winkel.
d) Die Winkel 3 und 6 sind … Winkel.
e) Die Winkel 2 und 7 sind … Winkel.

4. Verwendet die geometrische Darstellung aus Aufgabe 3 und löst die Aufgaben:
a) Schreibt die supplementären Winkelpaare auf und begründet eure Antwort.
b) Berechnet die Maße der Winkel 3 und 4, wobei $\sphericalangle 1 = 54°$.
c) Berechnet die Maße der Winkel 6 und 8, wobei bekannt ist, dass $\sphericalangle 5 + \sphericalangle 7 = 72°$.

5. Die Geraden a und b bilden mit der Sekante c die Winkel in der Abbildung.
Wenn bekannt ist, dass $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 6$, ist:
a) $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 5$;
b) $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 8$;
c) $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 = 180°$.



Minitest

In der folgenden Zeichnung sind die Winkel, die die Geraden a und b mit der Sekante d bilden, mit Zahlen gekennzeichnet.
Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

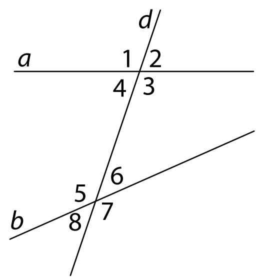
18 Pkte. **1.** Ein Paar von inneren Wechselwinkeln ist:
A. $\sphericalangle 2$ und $\sphericalangle 4$; **B.** $\sphericalangle 1$ und $\sphericalangle 6$; **C.** $\sphericalangle 1$ und $\sphericalangle 7$; **D.** $\sphericalangle 3$ und $\sphericalangle 5$.

18 Pkte. **2.** Ein Paar von äußeren Wechselwinkeln ist:
A. $\sphericalangle 2$ und $\sphericalangle 5$; **B.** $\sphericalangle 1$ und $\sphericalangle 8$; **C.** $\sphericalangle 2$ und $\sphericalangle 8$; **D.** $\sphericalangle 4$ und $\sphericalangle 7$.

18 Pkte. **3.** Die Anzahl der Paare von Stufenwinkeln, die in der Zeichnung dargestellt sind, ist:
A. 2; **B.** 4; **C.** 3; **D.** 1.

18 Pkte. **4.** Ein Paar von Innenwinkeln auf derselben Seite der Sekante ist:
A. $\sphericalangle 1$ und $\sphericalangle 7$; **B.** $\sphericalangle 3$ und $\sphericalangle 5$; **C.** $\sphericalangle 3$ und $\sphericalangle 6$; **D.** $\sphericalangle 4$ und $\sphericalangle 7$.

18 Pkte. **5.** Ein Paar von Außenwinkeln auf derselben Seite der Sekante ist:
A. $\sphericalangle 2$ und $\sphericalangle 7$; **B.** $\sphericalangle 2$ und $\sphericalangle 6$; **C.** $\sphericalangle 3$ und $\sphericalangle 8$; **D.** $\sphericalangle 2$ und $\sphericalangle 8$.

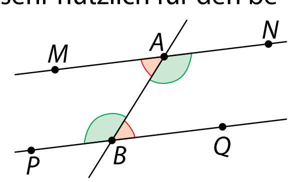


Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L3 Winkel, die von zwei parallelen Geraden und einer Sekante gebildet werden. Parallelitätskriterien

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

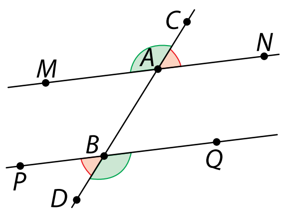
Winkelpaare, die von zwei Geraden mit einer Sekante gebildet werden, erweisen sich als sehr nützlich für den besonderen Fall $a \parallel b$.
Man betrachte die Geraden $MN \parallel PQ$, mit der Sekante AB, $A \in MN$ und $B \in PQ$.
Messt die beiden Paare von *inneren Wechselwinkeln*. Vergleicht die Maße der Winkel MAB und QBA und dann die Maße der Winkel NAB und PBA.
Die Sekante AB bildet mit den parallelen Geraden MN und PQ Paare von *kongruenten inneren Wechselwinkeln*: $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle QBA$ und $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle PBA$.



Lehrsatz 1. (Innerer Wechselwinkelsatz) Wenn zwei Geraden parallel sind, dann bestimmt jede Sekante *kongruente innere Wechselwinkel* mit den Geraden.

Ausgehend von Lehrsatz 1 können wir weitere Ergebnisse über die Winkel ableiten, die durch zwei parallele Geraden mit einer Sekante bestimmt werden.

Lehrsatz 2. (Äußerer Wechselwinkelsatz) Wenn zwei Geraden parallel sind, dann bestimmt jede Sekante *kongruente äußere Wechselwinkel* mit den Geraden.

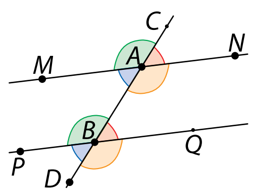


Beweis: Seien $MN \parallel PQ$ und CD eine Sekante, sodass $CD \cap MN = \{A\}$ und $CD \cap PQ = \{B\}$. Die Winkel CAM und QBD sind äußere Wechselwinkel.
Aus Lehrsatz 1 folgt $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle QBA$ (innere Wechselwinkel).
Aber $\sphericalangle MAB$ und $\sphericalangle MAC$ sind supplementär, $\sphericalangle QBA$ und $\sphericalangle QBD$ sind supplementär, also haben $\sphericalangle MAC$ und $\sphericalangle QBD$ kongruente Supplementwinkel, also $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle QBD$.

Portfolioaufgabe. Zeigt anhand der obigen Argumentation, dass: $\sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle DBP$.

Paare von kongruenten äußeren Wechselwinkenl: $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle QBD$ und $\sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle DBP$.

Lehrsatz 3. (Stufenwinkelsatz) Wenn zwei Geraden parallel sind, dann bestimmt jede Sekante *kongruente Stufenwinkel* mit den Geraden.

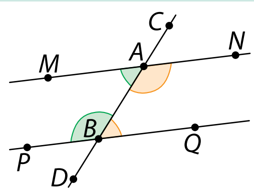


Beweis: $\sphericalangle NAB$ ist supplementär zu $\sphericalangle MAB$, und $\sphericalangle DBQ$ ist supplementär zu $\sphericalangle QBA$. Aus Lehrsatz 1 folgt, dass $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle QBA$ (innere Wechselwinkel), sodass $\sphericalangle NAB$ und $\sphericalangle DBQ$ kongruente Supplementwinkel haben, d. h., $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle DBQ$.

Portfolioaufgabe. Zeigt anhand des obigen Beweises, dass:
$\sphericalangle CAM$ und $\sphericalangle ABP$; $\sphericalangle CAN$ und $\sphericalangle ABQ$; $\sphericalangle BAM$ und $\sphericalangle DBP$ kongruent sind.

Paare von kongruenten Stufenwinkeln: $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle ABP$, $\sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle ABQ$, $\sphericalangle DBP \equiv \sphericalangle BAM$, $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle DBQ$.

Lehrsatz 4. (Satz der Innenwinkel auf derselben Seite der Sekante) Wenn zwei Geraden parallel sind, dann bestimmt jede Sekante mit diesen supplementäre *Innenwinkel auf derselben Seite der Sekante*.

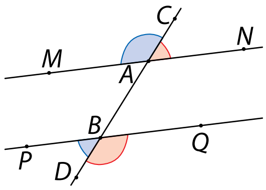


Beweis: $\sphericalangle NAB$ ist supplementär zu $\sphericalangle MAB$, und aus Lehrsatz 1 folgt, dass $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle QBA$ (innere Wechselwinkel). Dann ist $\sphericalangle NAB$ supplementär zu $\sphericalangle QBA$, d. h., $\sphericalangle NAB + \sphericalangle QBA = 180°$.

Portfolioaufgabe. Zeigt anhand des obigen Beweises, dass: $\sphericalangle MAB + \sphericalangle PBA = 180°$ ist.

Paare von supplementären Innenwinkeln auf derselben Seite der Sekante:
$\sphericalangle NAB$ ist supplementär zu $\sphericalangle QBA$, und $\sphericalangle MAB$ ist supplementär zu $\sphericalangle PBA$.

Lehrsatz 5. (Satz von den Außenwinkeln auf derselben Seite der Sekante) Wenn zwei Geraden parallel sind, dann bestimmt jede Sekante mit diesen supplementäre *Außenwinkel auf derselben Seite der Sekante.*



Beweis: $\sphericalangle NAC$ eist supplementär zu $\sphericalangle NAB$, und aus Lehrsatz 3 folgt, dass $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle QBD$ (Stufenwinkel). Dann ist, $\sphericalangle QBD$ supplementär zu $\sphericalangle NAC$, d. h., $\sphericalangle NAC + \sphericalangle QBD = 180^\circ$.

Portfolioaufgabe. Zeigt anhand der obigen Argumentation, dass: $\sphericalangle MAC + \sphericalangle PBD = 180^\circ$.

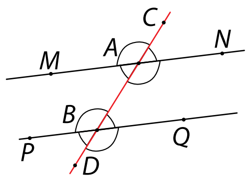
Paare von supplementären Außenwinkeln auf derselben Seite der Sekante:
$\sphericalangle NAC$ ist supplementär zu $\sphericalangle QBD$ und $\sphericalangle MAC$ ist supplementär zu $\sphericalangle PBD$.

Bemerkung: Bei der Lösung von Geometrieaufgaben ist es oft notwendig zu beweisen, dass Winkel kongruent oder supplementär sind. Wir suchen dann nach einer Konfiguration, die aus zwei parallelen Geraden besteht, die von einer Sekante geschnitten werden, die eine Menge Paare von kongruenten oder supplementären Winkeln bildet.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Wenn man *die Voraussetzung* und *die Schlussfolgerung* eines Lehrsatzes austauscht und eine wahre Aussage erhält, so wird diese Ausage als *Kehrsatz* des ursprünglichen Lehrsatzes bezeichnet.

Wir betrachten die verschiedenen Geraden MN und PQ, die von der Sekante CD geschnitten werden, sodass $CD \cap MN = \{A\}$ und $CD \cap PQ = \{B\}$.
Die Kehrsätze der oben genannten Lehrsätze sind wahr und geben uns *hinreichende Bedingungen* für die Parallelität der Geraden. Diese Lehrsätze werden als *Parallelitätskriterien* bezeichnet.



Wörterbuch

Parallelitätskriterium = Satz, mit dem wir beweisen, dass zwei Geraden parallel sind

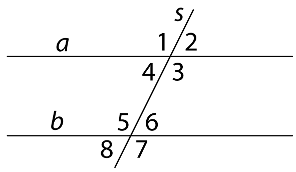
Für die verschiedenen Linien MN und PQ, die durch die Sekante CD geschnitten werden, wobei $CD \cap MN = \{A\}$ und $CD \cap PQ = \{B\}$, formulieren wir unter Verwendung der obigen geometrischen Darstellung die Kehrsätze der Sätze 1–5 und erhalten Parallelitätskriterien.

Parallelitätskriterien	*In mathematischer Sprache*
K$_1$: Wenn zwei Geraden mit einer Sekante *ein Paar kongruenter innerer Wechselwinkel* bildet, dann sind die Geraden parallel.	Wenn $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle QBA$, dann $MN \parallel PQ$. Wenn $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle PBA$, dann $MN \parallel PQ$.
K$_2$: Bilden zwei Geraden mit einer Sekante *ein Paar kongruenter äußerer Wechselwinkel*, dann sind die Geraden parallel.	Wenn $\sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle PBD$, dann $MN \parallel PQ$. Wenn $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle QBD$, dann $MN \parallel PQ$.
K$_3$: Bilden zwei Geraden mit einer Sekante *ein Paar kongruenter Stufenwinkel*, dann sind die Geraden parallel.	Wenn $\sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle ABQ$, dann $MN \parallel PQ$. Wenn $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle ABP$, dann $MN \parallel PQ$. Wenn $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle PBD$, dann $MN \parallel PQ$. Wenn $\sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle QBD$, dann $MN \parallel PQ$.
K$_4$: Bilden zwei Geraden mit einer Sekante *ein Paar supplementärer Innenwinkel auf derselben Seite der Sekante*, dann sind die Geraden parallel.	Wenn $\sphericalangle MAB + \sphericalangle PBA = 180^\circ$, dann $MN \parallel PQ$. Wenn $\sphericalangle NAB + \sphericalangle QBA = 180^\circ$, dann $MN \parallel PQ$.
C$_5$: Bilden zwei Geraden mit einer Sekante *ein Paar supplementärer Außenwinkel auf derselben Seite der Sekante*, so sind die Geraden parallel.	Wenn $\sphericalangle CAM + \sphericalangle PBD = 180^\circ$, dann $MN \parallel PQ$. Wenn $\sphericalangle CAN + \sphericalangle QBD = 180^\circ$, dann $MN \parallel PQ$.

Bemerkung: Die Parallelitätskriterien geben uns eine Menge von einfachen und wirksamen *Mitteln an die* Hand, um die *Parallelität zweier Geraden* zu beweisen.

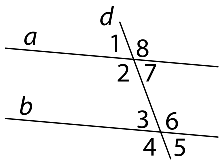
Übungen und Aufgaben

1. Notiert die Winkel, die von den parallelen Geraden *a* und *b* mit der Sekante *s* gebildet werden, wie in der nebenstehenden Abbildung. Schreibt von den dargestellten Winkeln und begründet eure Antwort:

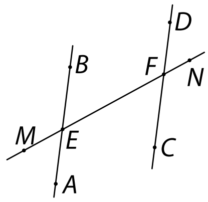


a) Winkel, die kongruent sind mit ∢1;
b) Winkel, die kongruent sind mit ∢6;
c) Winkel, die supplementär zu ∢3 sind.

2. In der nebenstehenden Abbildung sind die Geraden *a* und *b* parallel und das Maß des Winkels 7 ist 65°. Berechnet die Maße der Winkel 3 und 6.

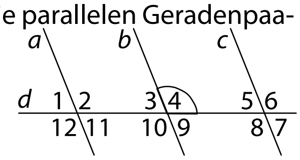


3. In der Zeichnung sind die Geraden *AB* und *CD* parallel. Die Sekante *MN* schneidet *AB* im Punkt *E* und *CD* im Punkt *F*.



a) Findet die Maße der Winkel *EFD* und *CFN* unter der Voraussetzung, dass ∢AEF = 126°.
b) Wenn ∢*NFD* = 77°, ist, bestimmt die Maße der Winkel *AEM*, *MEB* und *BEF*.

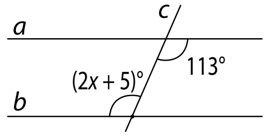
4. Die Sekante *d* schneidet die parallelen Geradenpaare *a*, *b* und *b*, *c*.
Unter der Voraussetzung, dass ∢4 = 111° ist, sind die Maße der Winkel 6 und 12 zu bestimmen.

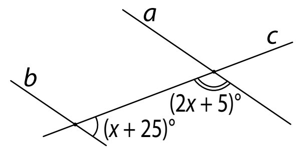


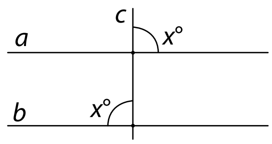
5. Zeichnet den Winkel *AOB* mit dem Maß 54° und die Gerade *BC* parallel zur Gerade *OA*, wobei der Punkt *C* im Winkel *AOB* liegt.
a) Berechnet das Maß des Winkels *OBC*.
b) Wenn *BA* die Winkelhalbierende des Winkels *OBC* ist, bestimmt das Maß des Winkels *BAO*.

6. Die Winkel *ABC* und *CBD* sind anliegend. Innerhalb des Winkels *ABD* liegen die Strahlen *AM* und *DN* auf Geraden, die parallel zur Geraden *BC* verlaufen.
a) Beweist, dass *AM* ∥ *DN*.
b) Berechnet unter Berücksichtigung von ∢*BAM* = 134° und ∢*BDN* = 122° das Maß des Winkels *ABD*.

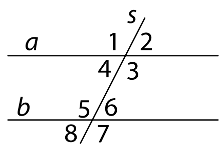
7. In jeder der folgenden Konfigurationen sind die Geraden *a* und *b* parallel zueinander und werden von *c* geschnitten.
Bestimmt den Wert der Zahl *x* in jedem Fall.

a)


b)


c)


8. Übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken mit einem der Symbole ∥ oder ∦ so aus, dass ihr mit den Notationen in der Zeichnung wahre Sätze erhaltet.



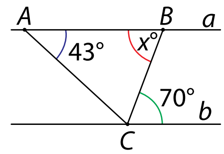
a) Wenn ∢4 = 64° und ∢6 = 64°, dann *a* ... *b*.
b) Wenn ∢2 = 60° und ∢5 = 130°, dann *a* ... *b*.
c) Wenn ∢1 = 119° und ∢8 = 61°, dann *a* ... *b*.

9. *ABC* sei ein rechter Winkel und der Punkt *D* im Äußeren des Winkels. Es ist bekannt, dass ∢*BAC* = 55° und ∢*CBD* = 35°.
a) Fertigt eine Zeichnung an, die den Daten der Aufgabe entspricht.
b) Berechnet das Maß des Winkels *ABD*.
c) Zeigt, dass die Geraden *AC* und *BD* parallel sind.
d) Berechnet das Maß des Winkels *CBA*.

10. Betrachtet zwei parallele Geraden und eine beliebige Sekante von ihnen.
a) Beweist, dass die Winkelhalbierenden zweier innerer Wechselwinkel auf parallelen Geraden liegen.
b) Zeigt, dass die Winkelhalbierenden von zwei Innenwinkeln auf derselben Seite der Sekante einen rechten Winkel bilden.

Minitest

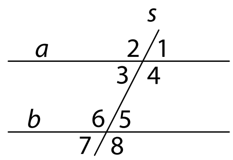
1. Die Geraden *a* und *b* werden von den Sekanten *AC* und *BC* geschnitten.



15 Pkte. **a)** Bestimmt die Zahl *x*, für die die Geraden *a* und *b* parallel sind.

15 Pkte. **b)** Ermittelt unter den Bedingungen von a) das Maß des Winkels *CBA*.

2. Bezeichnet die Winkel, die von den parallelen Geraden d_1, d_2 und der Sekante *s* gebildet werden, mit 1, 2, 3, ... , 7, 8.



20 Pkte. **a)** Wenn $\sphericalangle 1 = 75°$, ist, findet die Maße der Winkel 4 und 5.

20 Pkte. **b)** Wenn $\sphericalangle 2 = 105°$, ist, findet die Maße der Winkel 6 und 3.

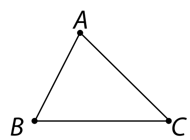
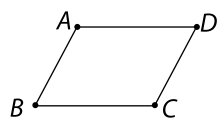
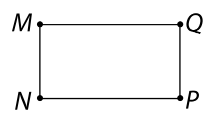
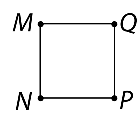
20 Pkte. **c)** Wenn $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 240°$, findet die Maße der Winkel 4 und 7.

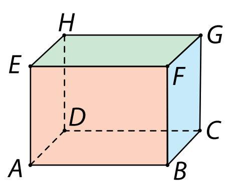
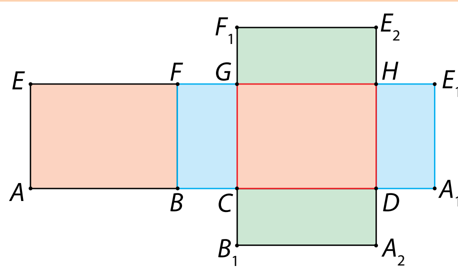
Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

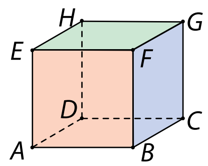
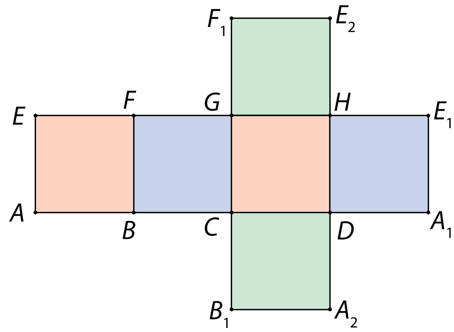
L4 Praktische Anwendungen bei Vielecken und geometrischen Körpern

Jedes physische Objekt kann vereinfacht und abstrahiert werden, sodass es in mehrere geometrische Körper oder elementare geometrische Figuren unterteilt werden kann. Für jedes dieser Elemente können wir Formen, Abmessungen, Lagen und Beziehungen analysieren, die wir dann in der Praxis verwenden können.

Zur Erinnerung

Vieleck	Dreieck	Parallelogramm	Rechteck	Quadrat
Geometrische Darstellung				
Ecken	*A, B, C*	*A, B, C, D*	*M, N, P, Q*	*M, N, P, Q*
Seiten	*AB, BC, CA*	*AB, BC, CD, DA*	*MN, NP, PQ, QM*	*MN, NP, PQ, QM*
Winkel	∢*BAC*, ∢*A* ∢*ABC*, ∢*B* ∢*ACB*, ∢*C*	∢*DAB*, ∢*A* ∢*ABC*, ∢*B* ∢*BCD*, ∢*C* ∢*CDA*, ∢*D*	∢*QMN*, ∢*M* ∢*MNP*, ∢*N* ∢*NPQ*, ∢*P* ∢*PQM*, ∢*Q*	∢*QMN*, ∢*M* ∢*MNP*, ∢*N* ∢*NPQ*, ∢*P* ∢*PQM*, ∢*Q*

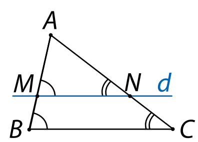
Geometrischer Körper	Geometrische Darstellung	Abwicklung – eine ebene Fläche, aus der durch Faltung ein geometrischer Körper entstehen kann
Quader Beschreibung: • 8 Ecken: *A, B, C, D, E, F, G, H* • 6 Flächen: *ABCD, EFGH, ABFE, DCGH, BCGF, ADHE* • Alle Flächen des Quaders sind Rechtecke		

Würfel Beschreibung: • 8 Ecken; *A, B, C, D, E, F, G, H* • 6 Flächen: *ABCD, EFGH, ABFE, DCGH, BCGF, ADHE* • Alle Flächen des Würfels sind Quadrate		

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 1

Die Gerade d schneidet die Seiten AB bzw. AC des Dreiecks ABC in den Punkten M bzw. N.
Da $d \parallel BC$ ist, beweist, dass $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle ACB$.



Vollständige Lösung

Die Gerade AB ist die Sekante der parallelen Geraden d und BC, und $AB \cap d = \{M\}$. $AB \cap d = \{M\}$. Dann sind die Winkel $\sphericalangle AMN$ und $\sphericalangle ABC$ Stufenwinkel. Da $MN \parallel BC$ ist, folgt daraus, dass $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ABC$. Die Gerade AC ist die Sekante der parallelen Geraden d und AC, und $AC \cap d = \{N\}$. Dann sind die Winkel AMN und ABC Stufenwinkel.
Da $MN \parallel BC$ ist, folgt daraus, dass $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle ACB$.

Kurze Lösung

$\left.\begin{array}{l} d \parallel BC \\ AB \text{ Sekante} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle AMN$ und $\sphericalangle ABC$ sind *kongruente Stufenwinkel*
$\Rightarrow \sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ABC$

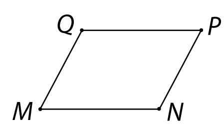
Demonstrați, analog, că $\sphericalangle ANM \equiv ACB$.

Anwendung 2

Das Parallelogramm hat zwei Paare von *parallelen gegenüberliegenden Seiten*.

a) Beweist, dass die benachbarten Winkel des Parallelogramms supplementär sind.

b) Beweist, dass die gegenüberliegenden Winkel des Parallelogramms kongruent sind



Vollständige Lösung

Sei $MNPQ$ ein Parallelogramm. Dann ist $MN \parallel PQ$ und $MQ \parallel NP$.

a) Es gibt vier Paare von benachbarten Winkeln $\sphericalangle M$ und $\sphericalangle N$, $\sphericalangle N$ und $\sphericalangle P$, $\sphericalangle P$ und $\sphericalangle Q$, $\sphericalangle M$ und $\sphericalangle Q$.

Muster: Die Gerade MQ ist die Sekante der parallelen Geraden MN und PQ. Dann *liegen* die Winkel $\sphericalangle M$ und $\sphericalangle N$ auf derselben Seite der Sekante und sind supplementär, also $\sphericalangle M + \sphericalangle Q = 180°$.

> Beweist anhand des dargestellten Musters, dass $\sphericalangle M + \sphericalangle N = \sphericalangle N + \sphericalangle P = \sphericalangle P + \sphericalangle Q = 180^\circ$.

b) Das Parallelogramm hat zwei Paare von entgegengesetzten Winkeln: $\sphericalangle M$ und $\sphericalangle P$; $\sphericalangle N$ und $\sphericalangle Q$; Aus Punkt a) folgt, dass $\sphericalangle M + \sphericalangle N = 180°$ (im Parallelogramm benachbarte Winkel) und $\sphericalangle N + \sphericalangle P = 180°$ (im Parallelogramm benachbarte Winkel). Wir leiten daraus ab, dass $\sphericalangle M$ und $\sphericalangle P$ dasselbe Supplement haben, also kongruent sind, d. h., $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle P$.

Beweist anhand der obigen Begründung, dass $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle Q$.

Kurze Lösung

$MNPQ$ ist Parallelogramm $\Rightarrow MN \parallel PQ$ und $MQ \parallel NP$.

a) $\left.\begin{array}{l} MN \parallel PQ \\ MQ \text{ Sekante} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle M$ und $\sphericalangle Q$

innere Winkel auf derselben Seite der Sekante $\Rightarrow \sphericalangle M + \sphericalangle Q = 180^\circ$.

b) $\left.\begin{array}{l} \textit{MNPQ Parallelogramm} \\ \sphericalangle M, \sphericalangle N \textit{ benachbart} \\ \sphericalangle N, \sphericalangle Q \textit{ benachbart} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\sphericalangle M + \sphericalangle N = 180°$ und $\sphericalangle N + \sphericalangle P = 180°$, also $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle P$.

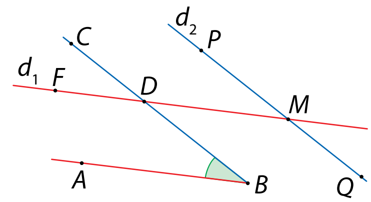
Anwendung 3

In der nebenstehenden Abbildung sind die Geraden d_1 und d_2 parallel zu den Schenkeln AB und BC des Winkels ABC.
Verwendet die Notationen in der Abbildung:

a) Identifiziert in der geometrischen Darstellung zwei Paare von parallelen Geraden, die jeweils von einer Sekante durchschnitten werden.

b) Beweist, dass $\sphericalangle DMP \equiv \sphericalangle ABC$.

c) Beweist, dass $\sphericalangle DMQ$ supplementär zu $\sphericalangle ABC$ ist.



Lösung

a) $AB \parallel DM$ mit der Sekante BC; $BC \parallel PQ$ mit der Sekante DM.

b) Die Sekante BC bestimmt mit den Parallelen AB und DM die inneren Wechselwinkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle BDM$, also $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BDM$.
Die Sekante DM bestimmt mit den parallelen Geraden BC und PQ die inneren Wechselwinkel $\sphericalangle BDM$ und $\sphericalangle DMP$, also $\sphericalangle BDM \equiv \sphericalangle DMP$.
Wir erhalten $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BDM$ und $\sphericalangle BDM \equiv \sphericalangle DMP$, also $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DMP$.

c) Die Sekante BC bestimmt mit den Parallelen AB und DM die Innenwinkel auf derselben Seite der Sekante, $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle BDF$, also $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BDF = 180^\circ$.

Die Sekante DM bestimmt mit den parallelen Geraden BC und PQ die Stufenwinkel $\sphericalangle BDF$ und $\sphericalangle QMD$, also $\sphericalangle BDF \equiv \sphericalangle QMD$.
Dann ist $\sphericalangle ABC + \sphericalangle QMD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BDF = 180^\circ$.
Wir haben oben das folgende Ergebnis nachgewiesen:

Bemerkung: Zwei beliebige Winkel mit jeweils parallelen Schenkeln sind kongruent oder supplementär.

Kurze Lösung

b) $\left.\begin{array}{l} AB \parallel DM \\ BC \text{ Sekante} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle BDM$ (innere Wechselwinkel)(1)

$\left.\begin{array}{l} BC \parallel PQ \\ DM \text{ Sekante} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle BDM$ und $\sphericalangle PMD$ (innere Wechselwinkel)(2)

Aus (1) und (2) $\Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle PMD$.

c)

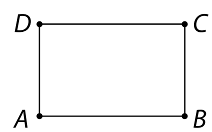
$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DM \\ BC \text{ Sekante} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ABC + \sphericalangle BDF = 180^\circ$ (Innenwinkel auf derselben Seite de Sekante) (3)

$\left.\begin{array}{l} BC \parallel PQ \\ DM \text{ Sekante} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle BDF \equiv \sphericalangle QMD$ (Stufenwinkel) (4)

Aus (3) und (4) $\Rightarrow \sphericalangle ABC + \sphericalangle QMD = 180^\circ$.

Anwendung 4

Wir gehen davon aus, dass das Rechteck einen rechten Winkel hat. Prüft anhand des rechten Winkels des Zeichendreiecks die Gültigkeit der Aussage. Es ist auch bekannt, dass die gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks parallel sind. Beweist, dass alle Winkel des Rechtecks rechte Winkel sind.



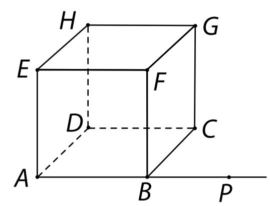
Lösung

Es sei $\sphericalangle A = 90^\circ$. Aus $BC \parallel AD$, mit der Sekante AB, folgt, dass $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ Innenwinkel auf derselben Seite der Sekante sind, also $\sphericalangle B = 180^\circ - \sphericalangle A = 90^\circ$. Aus $AB \parallel CD$ cmit der Sekante AD folgt, dass $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle D$ Innenwinkel auf derselben Seite der Sekante sind, also $\sphericalangle D = 180^\circ - \sphericalangle A = 90^\circ$. Aus den gleichen Parallelen mit der Sekante BC folgt, dass $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle C$ Innenwinkel auf derselben Seite der Sekante sind, d. h., $\sphericalangle C = 180^\circ - \sphericalangle B = 90^\circ$.

Herausforderung! Löst diese Aufgabe mithilfe von Aufgabe 2 und der Tatsache, dass *jedes Rechteck ein Parallelogramm ist.*

Anwendung 5

In der nebenstehenden Zeichnung sind ein Würfel und die Halbgerade BP dargestellt. Da die Punkte A, B, P kollinear sind, beweist, dass $\sphericalangle PBC = 90^\circ$ und $\sphericalangle PBF = 90^\circ$.



Lösung

Für $AB \parallel CD$ bildet die Sekante BC die inneren Wechselwinkel $\sphericalangle DCB$ und $\sphericalangle PBC$, also $\sphericalangle PBC = \sphericalangle DCB = 90^\circ$.
Analog dazu bilden die Geraden $AE \parallel BF$, mit der Sekante AB die Stufenwinkel $\sphericalangle EAB$ und $\sphericalangle FBP$, also $\sphericalangle PBF = \sphericalangle EAB = 90^\circ$.

Anwendung 6

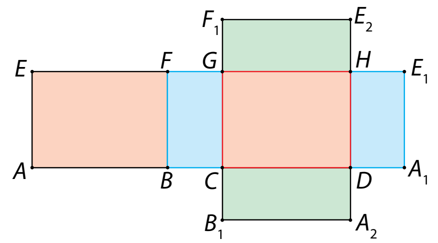
Die nebenstehende Konfiguration stellt die Abwicklung eines Quaders in der Ebene dar. Beweist unter Verwendung der Notationen in der Darstellung, dass

a) die Punkte A, B, C kollinear sind;

b) die Punkte E, F, G kollinear sind;

c) $AE \parallel CG$;

d) $\sphericalangle GAC = \sphericalangle AGE$.



Vollständige Lösung

a) *Muster*: $ABFE$ und $BCGF$ sind Flächen des Quaders, sind also Rechtecke und haben alle rechte Winkel. Dann sind $\sphericalangle ABF$ und $\sphericalangle CBF$ anliegend und supplementär, also ist $\sphericalangle ABC = 180°$ und A, B, C sind kollinear.

b) Schreibt unter Verwendung des Musters in a) einen ähnlichen Beweis für b).

c) Aus $AE \parallel BF$ und $BF \parallel CG$ ergibt sich $AE \parallel CG$.

d) Aus **a)** und **b)**, $ACGE$ Rechteck. Betrachtet die Sekante AG für die parallelen Geraden AC und EG. Dann sind $\sphericalangle GAC$ und $\sphericalangle AGE$ kongruente innere Wechselwinkel, also $\sphericalangle GAC = \sphericalangle AGE$.

Kurze Lösung

a) $ABFE$ und $BCGF$ Rechtecke
$\Rightarrow \sphericalangle ABF = \sphericalangle CBF = 90°$.
$\sphericalangle ABF$ und $\sphericalangle CBF$ anliegend und $\sphericalangle ABF + \sphericalangle CBF = 180°$, daraus folgt, dass $\sphericalangle ABC = 180°$, also A, B, C kollinear.

b) Analog beweisen wir die Kollinearität der Punkte E, F und G.

c) $\left.\begin{array}{l} AE \parallel BF \\ BF \parallel CG \end{array}\right\} \Rightarrow AE \parallel CG.$

d) $\left.\begin{array}{l} AC \parallel EG \\ AG \text{ Sekante} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle GAC \equiv \sphericalangle AGE$ (innere Wechselwinkel),
also $\sphericalangle GAC = \sphericalangle AGE$

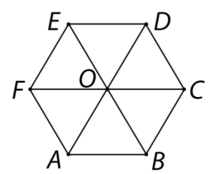
Anwendung 7

ABCDEF eist ein regelmäßiges Sechseck (sechsseitiges Vieleck). Alle seine Winkel sind kongruent mit dem Maß 120°, und AO, BO, CO; DO; EO, FO sind jeweils die Winkelhalbierenden der Winkel des Sechsecks. Beweist, dass:

a) die Geraden OC und AB parallel sind;

b) die Punkte C, O und F kollinear sind;

c) die Geraden DE und AB parallel sind.



Vollständige Lösung

a) Von der Annahme ausgehend sind die Winkel ABC und BCD kongruent und haben das Maß 120°. Der Strahl CO ist die Winkelhalbierende des Winkels BCD, also sind die Winkel OCB und OCD kongruent und haben jeweils das Maß 60°.
Für die Geraden AB und OC ist die Gerade BC eine Sekante und bildet die Winkel OCB und ABC, die Innenwinkel auf derselben Seite der Sekante sind ($\sphericalangle OCB + \sphericalangle ABC = 180°$). Dies ergibt $AB \parallel OC$.

b) Analog dazu ist für AB und OF die Gerade AF eine Sekante und bildet die Winkel OFA und BAF, die Innenwinkel auf derselben Seite der Sekante sind ($\sphericalangle OFA + \sphericalangle BAF = 180°$). Dies ergibt $AB \parallel OF$. Wir erhalten $OC \parallel AB \parallel OF$, d. h., O, F, C sind kollinear.

c) Mit einer ähnlichen Argumentation wird bewiesen, dass $DE \parallel OF$ ist. Dann folgt aus $DE \parallel OF$ und $AB \parallel OF$, dass $DE \parallel AB$.

Kurze Lösung

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 120°$ und CO Winkelhalbierende $\Rightarrow \sphericalangle OCB \equiv \sphericalangle OCD$ und $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OCD = 60°$.

a) $\sphericalangle ABC + \sphericalangle OCB = 120° + 60° = 180°$, sind Innenwinkel auf derselben Seite der Sekante BC, für AB und OC. Aber: $\sphericalangle ABC + \sphericalangle OCB = 180°$. Aus (1) folgt, dass $AB \parallel OC$.

b) $\sphericalangle OCB$ und $\sphericalangle ABC$ Innenwinkel auf derselben Seite der Sekante AF für AB und OF. (2). Aber: $\sphericalangle BAF + \sphericalangle OFA = 180°$. Aus (2) folgt, dass $AB \parallel OF$.

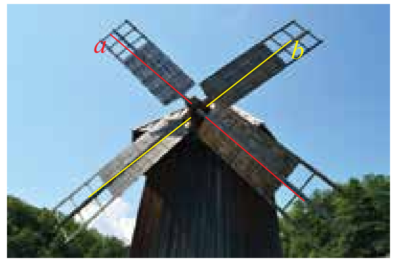
c) Ähnlich, $ED \parallel OF$. Dann folgt aus $ED \parallel OF$ und $AB \parallel OF$, dass $ED \parallel AB$ ist.

5.3. Senkrechte Geraden in der Ebene

L1 Senkrechte Geraden in der Ebene. Abstand von einem Punkt zu einer Geraden

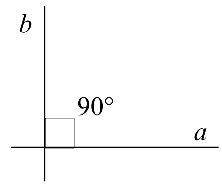
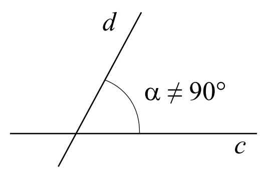
Wir lösen und beobachten

In der nebenstehenden Abbildung sind die Geraden a und b die *Unterstützungsgeraden* der Metallstangen, auf denen die vier Windmühlenflügel befestigt wurden.



Da die Winkel, die zwei beliebige benachbarte Paletten bilden, kongruent sind, ist der Winkel zu bestimmen, den die Geraden a und b bilden.
Lösung. Es sei $\{O\} = a \cap b$. Die Halbgeraden, die durch den Punkt O auf den beiden Geraden bestimmt werden, bilden vier kongruente Winkel um den Punkt O. Da die Summe der Winkel um einen Punkt 360 ° beträgt, folgt daraus, dass die vier Winkel rechte Winkel sind, also bilden die Geraden a und b einen *rechten Winkel*. Wir werden sagen, dass a und b *senkrecht aufeinander* stehen.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

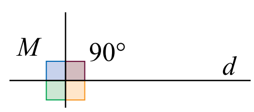
Definition	*Schreiben /Lesen*	*Darstellung*
Die Geraden a und b stehen senkrecht aufeinander, wenn sie einen rechten Winkel bilden.	• $a \perp b$ oder $b \perp a$ • a steht senkrecht auf b, respectiv b steht senkrecht auf a	
Wenn die Geraden c und d keinen rechten Winkel bilden, dann ist jede Gerade schief in Bezug auf die andere.	• $c \not\perp d$ oder $d \not\perp c$ • c nist nicht senkrecht auf d bzw. c ist schief in Bezug auf d d ist nicht senkrecht auf c oder d ist schief in Bezug auf c	

Lehrsatz: Durch einen Punkt in der Ebene kann man eine einzige Senkrechte auf eine gegebene Gerade konstruieren.

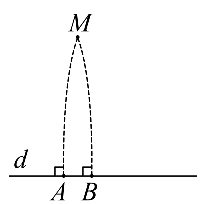
Beweis.

1. Betrachten wir den Fall, dass der Punkt M zur Geraden d gehört. Dann gibt es eine einzige Gerade, die durch M verläuft, und ihre Halbgeraden mit Ursprung in M bilden mit den beiden gegenüberliegenden Halbgeraden der Geraden d Winkel von 90°.
2. Für den Fall, dass M außerhalb der Geraden d liegt, nehmen wir an, wir können die Senkrechten MA und MB konstruieren ($A \neq B$). Dann bilden die Geraden MA und MB entsprechende kongruente Winkel (rechte) mit der Sekante AB. Daraus folgt, dass MA und MB parallel sind, ein Ergebnis, das der Tatsache widerspricht, dass M ein gemeinsamer Punkt ist. Die Annahme ist falsch, also gibt *es eine einzige Senkrechte.*

1.



2.



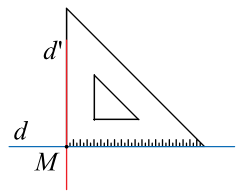
Um eine Gerade d' zu konstruieren, die senkrecht durch einen Punkt M der Ebene auf eine Gerade d ist, kann man den rechten Winkel des Zeichendreiecks oder den Zirkel benutzen.

Man betrachte die Gerade *d* und den Punkt *M* in der Ebene. Es werden zwei Fälle unterschieden: $M \in d$ oder $M \notin d$.

Praktische Anwendung 1. **Konstruktion der Senkrechten auf eine gegebene Gerade durch einen Punkt mithilfe des Zeichendreiecks**

a) Wenn $M \in d$, konstruiert die Senkrechte *im* Punkt *M* auf die Gerade *d*.

Schritt 1. Legt das Zeichendreieck mit dem Scheitel des rechten Winkels im Punkt *M* fest, sodass einer der Schenkel, die den rechten Winkel bilden, die Gerade *d* überdeckt.



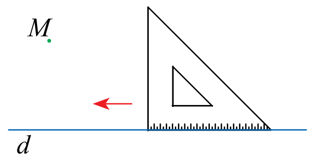
Wörterbuch

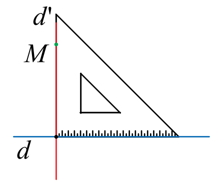
Die Unterstützungsgerade einer Strecke ist die Gerade, auf der sich diese Strecke befindet.

Schritt 2. Zeichne *d*', die Unterstützungsgerade des anderen Schenkels des rechten Winkels des Zeichendreiecks.

b) Wenn $M \notin d$, konstruieren wir die Senkrechte *aus* Punkt *M* auf die Gerade *d*.

Schritt 1. Legt das Zeichendreieck auf dieselbe Seite wie den Punkt *M* in Bezug auf die Gerade *d*, sodass einer der Schenkel, die den rechten Winkel bilden, die Gerade *d* überdeckt.



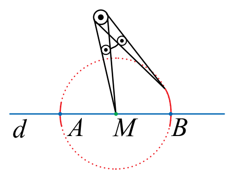


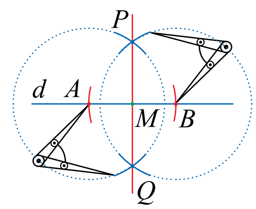
Schritt 2. Verschiebt das Zeichendreieck entlang der Geraden *d*, bis sich der Punkt *M* auf dem zweiten Schenkel des rechten Winkels des Zeichendreiecks befindet.
Schritt 3. Zeichnet *d*', die Unterstützungsgerade des Schenkels des rechten Winkels des Zeichendreiecks, der den Punkt *M* enthält.
Ihr habt also die Senkrechte aus Punkt *M* auf die Gerade d konstruiert. Wir schreiben: $d' \perp d$ und $M \in d'$.

Praktische Anwendung 2. **Konstruktion einer Senkrechten auf eine gegebene Gerade durch einen Punkt mithilfe des Zirkels**

a) Wenn $M \in d$, konstruiert die Senkrechte im Punkt *M* auf die Gerade *d*.

Schritt 1. Legt den Zirkel mit der Nadel im Punkt *M* fest und zeichnet einen Kreis. Beschriftet die Punkte, in denen er die Gerade *d* schneidet, mit *A* und *B*.

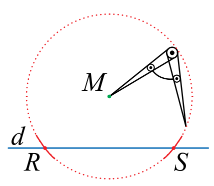


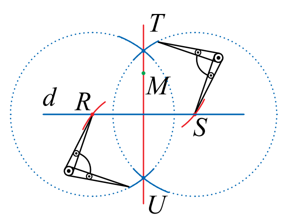


Schritt 2. Vergrößert die Öffnung des Zirkels etwas und zeichnet dann einen Kreis mit dem Mittelpunkt *A* und einen Kreis mit demselben Radius und dem Mittelpunkt im Punkt *B*. Beschriftet die Schnittpunkte der beiden Kreise mit *P* und *Q*.
Schritt 3. Zieht die Gerade *PQ*. Die Punkte *P*, *M*, *Q* sind kollinear und $PQ \perp d$, also $d' = PQ$.
Ihr habt also die Senkrechte im Punkt *M* auf die Gerade *d* konstruiert. Wir schreiben: $d' \perp d$ und $d' \cap d = \{M\}$.

b) Wenn $M \notin d$, konstruieren wir die Senkrechte *aus* Punkt *M* auf die Gerade *d*.

Schritt 1. Legt den Zirkel mit der Nadel im Punkt *M* fest und zeichnet einen Kreis mit geeignetem Radius, sodass der Kreis die Gerade *d* in zwei Punkten schneidet, die ihr mit *R* und *S* beschriftet.



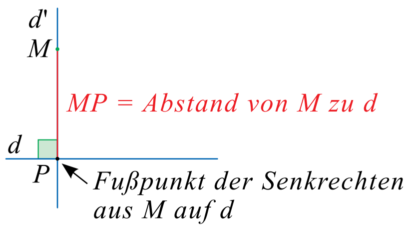


Schritt 2. Zeichnet mit der Zirkelnadel im Punkt *R* einen Kreis mit einem Radius, der größer ist als die Hälfte der Entfernung *RS*. Zeichnet mit der gleichen Zirkelöffnung einen Kreis mit dem Mittelpunkt *S*.
Schritt 3. Beschriftet die Schnittpunkte der beiden Kreise mit *T* und *U*.
Schritt 4. Zeichnet die Gerade *TM*. Die Punkte *T, M, U* sind kollinear und $TU \perp d$, deci $d' = TM$.
Ihr habt also die Senkrechte aus Punkt *M* auf die Gerade *d* konstruiert. Wir schreiben: $d' \perp d$ und $M \in d'$.

Der Abstand (die Entfernung) eines Punktes zu einer Geraden

Wir betrachten M, einen äußeren Punkt der Geraden d. Wir konstruieren die Senkrechte aus M auf die Gerade d und bezeichnen sie mit d'. Es sei $\{P\} = d' \cap d$.

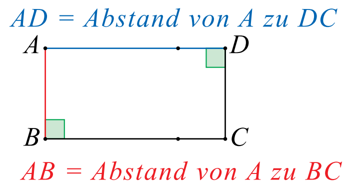
Der oben beschriebene Punkt P wird *Fußpunkt der Senkrechten* aus Punkt M auf die Gerade d genannt.



Definition. M sei ein Punkt außerhalb der Geraden d. Der Abstand vom Punkt M zur Geraden d ist die Länge der Strecke MP, wobei P der Fußpunkt der Senkrechten aus M auf d ist.

Wenn $M \in d$, ist der Abstand von M zu d gleich 0.

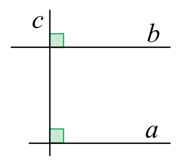
Beispiel: Wenn $ABCD$ ein Rechteck ist, liegen zwei beliebige Seiten auf senkrechten Geraden. Der Fußpunkt der Senkrechten aus A auf BC ist der Punkt B selbst, also ist die Entfernung von A zu BC die Länge der Seite AB. Ebenso ist der Fußpunkt der Senkrechten aus A auf CD der Punkt D selbst, sodass die Entfernung von A zu CD die Länge der Seite AD ist.



Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 1.
Zwei verschiedene Geraden, die senkrecht auf einer dritten Geraden stehen, sind parallele Geraden.

În limbajul simbolisticii matematice:
Wenn a, b, c sdrei Geraden sind und $a \neq b$, $a \perp c$ und $b \perp c$, dann ist $a \parallel b$.



Voraussetzung.
$a \neq b$,
$a \perp c$ und $b \perp c$

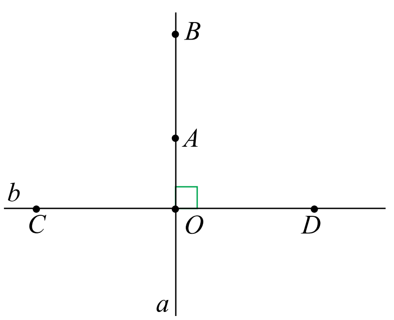
Schlussfolgerung.
$a \parallel b$

Beweis. Aus $a \perp c$ und $b \perp c$, folgt, dass die Geraden a und b vier rechte Winkel mit der Sekante c bilden, sodass wir kongruente Stufenwinkel erhalten, also $a \parallel b$.

Bemerkung: Das obige Ergebnis ist ein weiteres Kriterium der Parallelität, d. h. eine Möglichkeit zu zeigen, dass zwei Geraden parallel sind.

Gelöste Aufgabe. Die Geraden a und b stehen senkrecht aufeinander und $a \cap b = \{O\}$. Die Punkte A und B liegen auf der Geraden a, sodass $OA = 2$ cm und $OB = 5$ cm. Die Punkte C und D liegen auf der Geraden b, sodass $OC = OD = 4$ cm. Berechnet die Abstände:

a) von A zu b; **c)** von B zu a; **e)** von C zu a;
b) von B zu b; **d)** von D zu a; **f)** von D zu b.



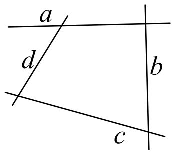
Lösung:

$a \perp b$, $a \cap b = \{O\}$, $A \in a$, $B \in a$. Dann gilt: **a)** der Abstand von A zu b ist $AO = 2$ cm;
b) der Abstand von B zu b ist $BO = 5$ cm;
c) der Abstand von B zu a ist 0 cm.

$b \perp a$, $a \cap b = \{O\}$, $C \in b$, $D \in b$. Dann gilt: **d)** der Abstand von D zu a ist $DO = 4$ cm;
e) der Abstand von C zu a ist CO = 4 cm;
f) der Abstand von D zu b ist 0 cm.

Übungen und Aufgaben

1. Benutzt den Winkelmesser, um die Winkel in der folgenden Abbildung zu messen, und wählt dann den Buchstaben aus, der die richtige Antwort angibt. Nur eine Antwort stimmt.



a) Die Geraden, die einen rechten Winkel bilden, sind:

A. *a* und *b*; **C.** *c* und *d*;
B. *b* und *c*; **D.** *d* und *a*.

b) Zwei senkrechte Geraden sind:

A. *a* und *d*; **C.** *c* und *b*;
B. *d* und *c*; **D.** *b* und *a*.

2. Sei *a* eine beliebige Gerade und *A* ein Punkt außerhalb der Geraden *a*.

a) Zeichnet mithilfe des Zeichendreiecks die Gerade *b*, die senkrecht aus Punkt *A* auf die Gerade a gezogen wird. Schreibt die Beziehung zwischen den beiden Geraden mit mathematischen Symbolen auf.

b) Zeichnet mit einem Lineal eine Gerade *c* durch den Punkt *A*, die schief in Bezug auf die Gerade *a* steht. Schreibt die Beziehung zwischen den beiden Geraden mit mathematischen Symbolen auf.

3. Sei *b* eine beliebige Gerade und *B* ein Punkt, der zur Geraden *b* gehört.

a) Zeichnet mithilfe des Zeichendreiecks die Gerade *d*, die im Punkt *B* senkrecht auf die Gerade *b* steht. Schreibt die Beziehung zwischen den beiden Geraden mit mathematischen Symbolen auf.

b) Zeichnet mithilfe des Lineals eine Gerade e, die schief in Bezug auf die Gerade b steht und den Punkt B enthält. Schreibt die Beziehung zwischen den beiden Geraden mit mathematischen Symbolen auf.

4. Sei *d* eine beliebige Gerade und die verschiedenen Punkte *M* und *N*, von denen mindestens einer außerhalb der Geraden *d* liegt.

a) Fertigt eine Zeichnung an, sodass $MN \perp d$.

b) Fertigt eine Zeichnung an, sodass $MN \not\perp d$.

5. Zeichnet ein Quadrat *ABCD*.
Schreibt die Seitenpaare des Quadrats die auf senkrechten Geraden liegen, in die erste Spalte und die Seitenpaare des Quadrats, die nicht auf senkrechten Geraden liegen, in die zweite Spalte, entsprechend dem Muster.

... $\perp$ ...	... $\not\perp$ ...
$AB \perp BC$	$AB \not\perp CD$

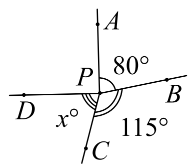
6. Die Winkel *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOA* sind kongruente Winkel um den Punkt *O*. Zeigt, dass $AC \perp BD$.

7. Die Winkel *ABC* und *CBD* sind anliegend und supplementär, $\sphericalangle ABC = 120°$, *OE* ist die Winkelhalbierende des Winkels *ABC* und *OF* ist die Winkelhalbierende des Winkels *CBE*.

a) Fertigt eine Zeichnung an, die den Daten der Aufgabe entspricht.

b) Beweist, dass die Geraden *AD* und *BF* senkrecht aufeinander stehen.

8. Um den Punkt *P* herum sind die Winkel *APB, BPC, CPD, DPA* zu berücksichtigen.
Bestimmt anhand der Angaben in der Zeichnung die Zahl *x*, damit die Geraden *AP* und *DP* senkrecht aufeinander stehen.



9. Zeichnet eine beliebige Gerade *a* und einen Punkt *A*, der nicht zu ihr gehört.

a) Konstruiert mithilfe des Zeichendreiecks die Gerade *AB* so, dass $AB \perp a$ und $B \in a$.

b) Messt die Länge der Strecke *AB* mit einem Lineal.

c) Füllt die Lücken mithilfe der in den vorangegangenen Unterfragen erhaltenen Daten aus, um wahre Sätze zu erhalten:

p_1: Punkt *B* wird … aus …, auf … genannt.
p_2: Der Abstand von Punkt *A* lzur Geraden a beträgt … cm.

10. Zeichnet eine beliebige Gerade *d* und die Punkte *A*, *B*, *C*, *D*, sodass $A \notin d$, $B \notin d$, $C \notin d$, $D \in d$.

a) Konstruiert $MA \perp d$, $NB \perp d$, $PC \perp d$, $QD \perp d$, mit $M \in d$, $N \in d$, $P \in d$.

b) Messt die Längen der Strecken *MA, NB, PC, QD* mit einem Lineal.

c) Schreibt die folgenden Sätze in eure Hefte ab und füllt dann die Lücken mit den Daten aus, die ihr in den vorherigen Unterfragen erhalten habt, um wahre Aussagen zu erhalten:

p_1: Punkt M wird … aus … auf … genannt.

p_2: Der Punkt D wird … aus …, auf … genannt.

p_3: Der Abstand von Punkt B zur Geraden d beträgt … cm.

p_4: Der Abstand von Punkt C zur Geraden d beträgt … cm.

p_5: Der Abstand vom Punkt D zur Geraden d beträgt … cm.

11. Betrachtet die Gerade d und den Punkt P außerhalb der Geraden d. Stellt $PA \perp d$, $A \in d$ und den Punkt B auf der Geraden d, $B \neq A$, dar.

a) Messt die Längen der Strecken PA und PB mit dem Lineal. Wählt anhand der gefundenen Werte, welche der folgenden Beziehungen wahr ist.

A. $PA < PB$; **B.** $PA = PB$; **C.** $PA > PB$.

b) Bestimmt mithilfe des Winkelmessers die Maße der Winkel PAB und PBA. Wählt anhand der gefundenen Werte, welche der folgenden Beziehungen wahr ist.

A. $\sphericalangle PAB < \sphericalangle PBA$;
B. $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA$;
C. $\sphericalangle PAB > \sphericalangle PBA$.

12. Zeichnet die Gerade a und die Punkte M, N, P im Abstand von 2 cm, 3,5 cm und 5 cm von ihr.

13. $ABCD$ sei ein Rechteck, $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, M die Mitte der Seite AB und der Punkt N auf der Seite BC, mit $BN = 2 \cdot CN$.

a) Bestimmt die Längen der Strecken AM, BM, BN, CN.

b) Berechnet die Entfernungen vom Punkt M zu den Geraden AD und BC.

c) Berechnet die Entfernungen vom Punkt N zu den Geraden AB und CD.

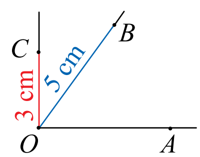
14. Die Punkte A, B, C, D sind in dieser Reihenfolge kollinear, $AB = 1{,}5$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 4{,}5$ cm. Konstruiert die Geraden AM, BN, CP, DQ, die senkrecht auf die Gerade AB stehen. Berechnet

a) die Entfernung von Punkt A zu jeder der Geraden AM, BN, CP, DQ.

b) den Abstand zwischen dem Punkt C und der Geraden AM und den Abstand zwischen dem Punkt C und der Geraden DQ.

Minitest

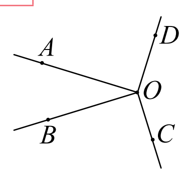
1. Die Winkel AOB und BOC sind anliegend und komplementär. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und tragt in das leere Kästchen den Buchstaben W ein, wenn der Satz wahr ist, und den Buchstaben F, wenn der Satz falsch ist, und benutzt dabei die Angaben in der nebenstehenden Abbildung.



	Propoziția	**W/F**
15 Pkte.	Das Maß des Winkels AOC beträgt 90°.	
15 Pkte.	Der Punkt O ist der Fußpunkt der Senkrechten aus A auf die Gerade OC.	
15 Pkte.	$OB \not\perp OC$.	
15 Pkte.	Der Abstand von Punkt C zur Geraden AO beträgt 3 cm.	
15 Pkte.	Der Abstand zwischen Punkt B und der Geraden CO beträgt 5 cm.	

15 Pkte. **2.** In der nebenstehenden Abbildung gilt:
$OA \perp OD$, $OB \perp OC$ und $\sphericalangle AOC + \sphericalangle BOD = 240°$.

Berechnet das Maß des Winkels COD.



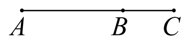
Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Die Mittelsenkrechte einer Strecke

Zur Erinnerung

Der Abstand (die Entfernung) zwischen zwei Punkten A und B in der Ebene ist die Länge der Strecke AB.

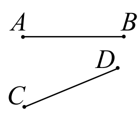
Wenn die Punkte A, B, C in dieser Reihenfolge kollinear sind, dann gilt zwischen den Längen der Strecken AB, BC, AC die Beziehung $AC = AB + BC$.
Wenn zwischen den Längen der Strecken AB, BC, AC die Beziehung $AC = AB + BC$ gilt, dann sind die Punkte A, B, C in dieser Reihenfolge kollinear.



Zwei *geometrische Figuren* werden *kongruent* genannt, wenn sie durch Überlagern übereinstimmen.

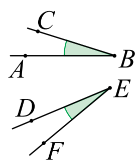
Zwei Strecken, AB und CD, die durch Überlagern übereinstimmen, werden *kongruente Strecken* genannt

Wir schreiben $AB \equiv CD$ und lesen Strecke AB ist kongruent mit Strecke CD (oder einfach: AB kongruent mit CD).



Zwei Winkel, ABC und DEF, die durch Überlagern übereinstimmen, werden *kongruente Winkel* genannt.

Wir schreiben: $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ und lesen, der Winkel ABC ist kongruent mit dem Winkel DEF.



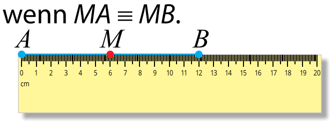
Zu den *Eigenschaften der* Kongruenzbeziehung gehört die Eigenschaft der Transitivität:

1. Wenn $AB \equiv CD$ *und* $CD \equiv EF$, atunci $AB \equiv EF$.
2. Wenn $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ und $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle MNP$, dann $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MNP$.

Lehrsatz:
1. Wenn zwei Strecken *kongruent sind*, dann *haben* sie *die gleiche Länge*.
2. Wenn zwei Strecken *die gleiche Länge haben*, dann *sind* sie *kongruent*.
3. Wenn zwei Winkel *kongruent sind*, dann haben sie *das gleiche Maß*.
4. Wenn zwei Winkel *das gleiche Maß* haben, dann *sind* sie *kongruent*.

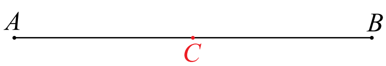
Der Mittelpunkt (die Mitte) der Strecke AB ist der Punkt M, der sich auf der Strecke AB in gleicher Entfernung von ihren Endpunkten befindet *($AM = MB$)*.

Der Punkt M, der auf der Strecke AB liegt, ist nur dann dessen Mitte, wenn $MA \equiv MB$.



Wenn $AB = 12$ cm und M die Mitte der Strecke AB ist, dann $AM = MB = 6$ cm.
Wenn $AB = 12$ cm und $AM = MB = 6$ cm ist, dann ist M die Mitte der Strecke AB.

C sei die Mitte der Strecke AB. Dann sind die Punkte A, C und B kollinear und $AC = CB$.



Wir werden sagen:
- Punkt B *ist der symmetrische Punkt des Punktes A in Bezug auf Punkt C.*
- Punkt A *ist der symmetrische Punkt des Punktes B in Bezug auf Punkt C.*
- Die Punkte *A und B sind symmetrisch in Bezug auf Punkt C.*

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Definition. Die Gerade, die senkrecht auf die Strecke AB steht und die Mitte der Strecke enthält, wird *Mittelsenkrechte der Strecke AB* genannt.

Die korrekte Konstruktion der Mittelsenkrechten einer gegebener Strecke ist ein wichtiges Element bei der Lösung der Aufgaben. Diese kann mit dem Lineal und dem Zeichendreieck oder mit dem Zirkel und dem nicht abgestuften Lineal konstruiert werden.

Konstruktion mit abgestuftem Lineal und Zeichendreieck

Wenn wir das abgestufte Lineal und das Zeichendreieck verwenden, müssen wir *die Länge der* Strecke AB *kennen* und wissen, dass die Mitte der Strecke der Punkt M mit $AM = MB = AB : 2$ ist.

Schritt 1. Wir messen von einem Ende aus eine Strecke der Länge $AB : 2$, die die gegebene Strecke überlagert, und markieren den Punkt M.

Schritt 2. Wir konstruieren mithilfe des rechten Winkels des Zeichendreiecks die Gerade d, die im Punkt M senkrecht auf AB steht. Die Gerade d ist die Mittelsenkrechte der Strecke AB.

Konstruktion mit nicht abgestuftem Lineal und Zirkel

Wenn wir den Zirkel und das nicht abgestufte Lineal verwenden, können wir die Konstruktion durchführen, ohne die Länge der Strecke zu kennen.

Praktische Anwendung:

Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke AB mit Lineal und Zirkel

Benötigte Materialien: Matheheft, Zirkel, ein nicht abgestuftes Lineal, ein spitzer Bleistift

Etappen der Konstruktion:

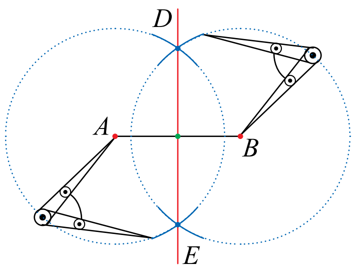
Schritt 1. Wir öffnen und halten den Zirkel fest, sodass der geschätzte Abstand zwischen seinen Spitzen größer ist als die halbe Länge der Strecke AB, deren Mittelsenkrechte konstruiert werden soll.

Schritt 2. Haltet die Zirkelnadel in Punkt A fest und zeichnet einen Kreis. Zeichnet mit der gleichen Zirkelöffnung einen Kreis mit dem Mittelpunkt B.

Schritt 3. Bezeichnet die Punkte, an denen sich die in Schritt 2 konstruierten Kreise mit D bzw. E schneiden.

Schritt 4. Wir zeichnen die Gerade DE, die die Mittelsenkrechte der Strecke AB ist.

Geometrische Darstellung



Praktische Anwendung

Stellt eine Strecke AB der Länge 6 cm geometrisch dar. Konstruiert mit dem Zirkel und dem nicht abgestuften Lineal die Mittelsenkrechte der Strecke AB. Es sei $\{M\} = d \cap AB$ und $N \in d$, $N \neq M$. Benutzt das abgestufte Lineal, um die Längen der Strecken MA, MB, NA, NB zu messen. Bestimmt anhand eurer Ergebnisse, welche der folgenden Beziehungen wahr sind: $MA > MB$, $MA = MB$, $MA < MB$, $NA > NB$, $NA = NB$, $NA < NB$.

Antwort. Unabhängig von der Strecke AB und dem Punkt N auf ihrer Mittelsenkrechten erhalten wir durch Messung $MA = MB$ und $NA = NB$.

Die Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke mithilfe des Zirkels und der oben genannten Anwendung führt zu folgendem sehr wichtigen Ergebnis:

Wenn d die Mittelsenkrechte der Strecke AB ist und $M \in d$, dann ist $MA \equiv MB$.
Wenn d die Mittelsenkrechte der Strecke AB und $MA \equiv MB$ ist, dann ist $M \in d$.

Die beiden obigen Aussagen können durch die folgende Aussage ersetzt werden, die die Punkte auf der Mittelsenkrechten charakterisiert:

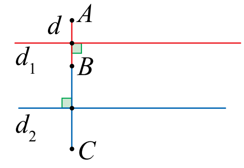
Lehrsatz:
Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist die Menge der Punkte in der Ebene, *die* von den Endpunkten der Strecke *gleich weit entfernt* ist.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 1.

a) Wenn die Punkte *A, B* und *C* kollinear sind, dann sind die Mittelsenkrechten der Strecken *AB* und *BC* parallel.
b) Wenn die Mittelsenkrechten der Strecken *AB* und *BC* parallel sind, dann sind die Punkte *A, B* und *C* kollinear.

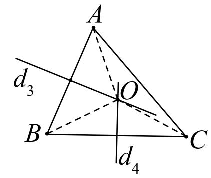
Lösung. Wir bezeichnen mit d_1 die Mittelsenkrechte der Strecke *AB* und mit d_2 die Mittelsenkrechte der Strecke *BC*.



a) Der Punkt *B* liegt auf der Strecke *AC*, daher fallen die Geraden *AB, AC, BC* zusammen. Sei *d* diese Gerade. Die Geraden d_1 und d_2 sind Mittelsenkrechten, sodass $d_1 \perp AB$ und $d_2 \perp BC$, d. h. dass d_1 und d_2 senkrecht auf dieselbe Gerade *d* stehen. Die Mittelpunkte der Strecken *AB* und *BC* liegen auf beiden Seiten des Punktes *B*, sie sind also verschieden.
Dann stehen d_1 und d_2 in verschiedenen Punkten *senkrecht auf dieselbe Gerade*, also $d_1 \parallel d_2$.
b) Wir nehmen an, dass *A, B, C* nicht kollinear sind. Dann können wir die Strecke *AB* verlängern, bis sie d_2 im Punkt *D* schneidet. Die parallelen Geraden d_1 und d_2 bilden mit der Sekante *BD* kongruente innere Wechselwinkel, sodass $BD \perp d_2$. Aber $BC \perp d_2$, und durch den Punkt *B* können wir eine einzige Gerade senkrecht auf d_2 konstruieren. Daraus folgt, dass die Geraden *BD* und *BC* zusammenfallen, d. h., *A, B* und *C* sind kollinear.

Anwendung 2.

Zeichnet in eure Hefte die nicht kollinearen Punkte *A*, *B*, *C*.



a) Konstruiert die Gerade d_3, die Mittelsenkrechte der Strecke *AB*, und die Gerade d_4, die Mittelsenkrechte der Strecke *BC*.
b) Beweist, dass die Geraden d_3 und d^4 sich in einem Punkt schneiden. Bezeichnet diesen Punkt mit *O*.
c) Mithilfe des obigen Lehrsatzes leitet ab , dass *O* zur Mittelsenkrechten der Strecke *AC* gehört.

Lösung:
b) Wir nehmen an, dass d_3 und d_4 sich nicht schneiden, d. h., $d_3 \parallel d_4$. Dann folgt aus *Anwendung 1* b), dass *A, B, C* kollinear sind, was der Voraussetzung widerspricht. Die Annahme, dass $d_3 \parallel d_4$ ist falsch, und d_3 und d_4 schneiden sich , also gibt es einen Punkt *O*, sodass $d_3 \cap d_4 = \{O\}$.
c) Aus $O \in d_3$, da d_3 die Mittelsenkrechte der Strecke *AB* ist, ergibt sich $OA \equiv OB$, und aus $O \in d_4$, da d_4 die Mittelsenkrechten der Strecke *BC* ist, ergibt sich $OB \equiv OC$, also $OA \equiv OC$, was bedeutet, dass sich *O* auf der Mittelsenkrechten der Strecke *AC* befindet

Übungen und Aufgaben

1. Stellt die Strecke *AB* der Länge 6 cm und den Punkt *M* auf der Strecke *AB* geometrisch so dar, dass $MA = 3$ cm ist. Konstruiert die Gerade *d*, die im Punkt *M* senkrecht auf die Strecke *AB* steht.
Schreibt in eure Hefte ab und füllt die Lücken so aus, dass ihr wahre Aussagen erhaltet:
   a) Punkt M ist … der Strecke … .
   b) Der Winkel, gebildet zwischen den Geraden *d* und *AB*, hat das Maß …°.
   c) Die Gerade *d* ist … der Strecke … .

2. Die Gerade *AB* ist die Mittelsenkrechte der Strecke *CD* und $AB \cap CD = \{M\}$. Schreibt den Buchstaben *W* in das freie Feld, wenn die Aussage wahr ist, und den Buchstaben *F*, wenn die Aussage falsch ist.

Aussage	***W/F***
$AB \perp CD$.	
$CM = MD$.	
$\sphericalangle AMB = 90^\circ$.	
$\sphericalangle CMA = 90^\circ$.	

3. Zeichnet die kollinearen Punkte *A, B, C* mit $AB = 2$ cm und $BC = 6$ cm.
   a) Konstruiert die Geraden m1 und m2, die Mittelsenkrechten der Strecken AB bzw. BC.
   b) Wenn $m_1 \cap AB = \{M\}$ und $m_2 \cap CD = \{N\}$, berechnet die Länge der Strecke *MN*. Untersucht alle möglichen Fälle.

4. Zeichnet die nicht kollinearen Punkte *A, B, C*. Konstruiert die Geraden m_1, m_2 und m_3, die Mittelsenkrechten der Strecken *AB, BC* bzw. *AC*.

5. Die Geraden *a* und *b* sind die die Mittelsenkrechten der Strecken *MN* bzw. *PQ*. Beweist:
   a) Wenn *a* und *b* parallel sind, dann sind *MN* und *PQ* parallel oder fallen zusammen.
   b) Wenn die Geraden *MN* und *PQ* parallel sind, dann sind *a* und *b* parallel oder fallen zusammen.

6. Sei *d* die Mittelsenkrechte der Strecke *MN*, $d \cap MN = \{O\}$, $MO = 3$ cm und *A* ein Punkt auf d mit $AN = 5$ cm. Berechnet:
   a) die Längen der Strecken *MN* und *AM*;
   b) die Summe $AM + MN + AN$.

Minitest

20 Pkte. **1.** Wenn die Punkte *A, B, C* verschieden sind und $AB = BC$, dann gehört der Punkt B zur Mittelsenkrechten der Strecke *AC*.
a) wahr; **b)** falsch.

20 Pkte. **2.** Wenn sich die Geraden *AB* und *d* im Punkt *C* schneiden und $AC = BC$, dann ist die Gerade *d* die Mittelsenkrechte der Strecke *AB*.
a) wahr; **b)** falsch.

20 Pkte. **3.** Wenn $d \perp AB$, $C \in d$ und $AC = BC$, dann ist die Gerade d die Mittelsenkrechte der Strecke *AB*
a) wahr; **b)** falsch.

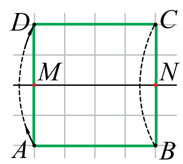
30 Pkte. **4.** Wenn die Punkte *A, B, C, D* in dieser Reihenfolge kollinear sind, $AB = 2$ cm, $AC = 5$ cm, $AD = 7$ cm, dann haben die Strecken *AD* und *BC* dieselbe Mittelsenkrechte.
a) wahr; **b)** falsch.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L3 Symmetrie in Bezug auf eine Gerade (Achsensymmetrie) (das Spiegelbild)

Zur Erinnerung

Eine geometrische Figur *hat eine Symmetrieachse*, wenn es eine Gerade gibt, entlang der man sich vorstellen kann, die Ebene so zu biegen, *dass die beiden Teile der Figur*, die sich in den beiden von dieser Geraden begrenzten Halbebenen befinden, *kongruent sind*.



Die Gerade, entlang der wir uns die Biegung vorstellen, wird *Symmetrieachse der* Figur genannt.

In der obigen Abbildung ist die Gerade MN die Symmetrieachse des Quadrats *ABCD*.

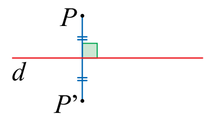
Der Punkt *D* ist der symmetrische des Punktes *A* in Bezug auf die Gerade *MN*, weil durch Biegung der „Ebene" entlang der Geraden d die beiden Punkte zusammenfallen. Bestimmt die zu den Punkten *B, C, D, M, N* symmetrische Punkte in Bezug auf die Gerade *MN*.
Bemerkung: M liegt auf der Symmetrieachse, also ist der Punkt *M* selbst sein symmetrischer Punkt in Bezug auf die Achse.
Das quadratische Netz aus dem Matheheft hilft uns, dies zu erkennen:
- Der symmetrische Punkt jedes Punktes des Quadrats in Bezug auf die Gerade *MN* ist auch ein Punkt des Quadrats, was rechtfertigt, dass *MN* die Symmetrieachse ist.
- Der Abstand eines Punktes auf dem Quadrat zur Achse *MN* ist gleich dem Abstand von seinerm symmetrischen Punkt zur Achse. Zum Beispiel: *A* und *D* sind symmetrisch in Bezug auf die Gerade *MN*; der Abstand von *A* zur Geraden *MN* ist *AM*, der Abstand von *D* zu *MN* ist *DM* und $AM = DM$.
- Die Gerade *MN* ist Mittelsenkrechte aller Strecken, die als Enden symmetrische Punkte in Bezug auf die Achse *MN* haben.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Aufgrund der Rechtwinkligkeit der Geraden und der obigen Beobachtungen erhalten wir:

P sei ein Punkt außerhalb der Geraden *d*. Der *symmetrische Punkt des Punktes P in Bezug auf die Gerade d* ist der Punkt *P*' mit der Eigenschaft, dass *d* die Mittelsenkrechte der Strecke *PP*' ist.

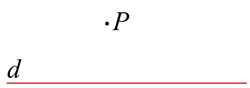
Die Gerade *d* ist die Symmetrieachse für die Menge der Punkte {*P*, *P*'}.



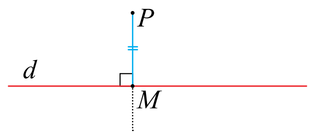
Bemerkung: Wenn *P*' der symmetrische Punkt des Punktes *P* in Bezug auf die Gerade *d* ist, dann ist P der symmetrische Punkt des Punktes *P*' in Bezug auf die Gerade *d*.

Wir haben festgestellt, dass der symmetrische Punkt eines Punktes *P* in Bezug auf die Gerade *d* der Punkt *P*' ist, wobei $PP' \perp d$ und *P* und *P*' von der Geraden *d* gleich weit entfernt sind.

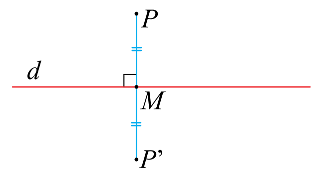
Schritt 1.
Stellt die Gerade *d* und den Punkt *P* dar.



Schritt 2.
Konstruiert die Gerade $PM \perp d$, $M \in d$.



Schritt 3.
Markiert den Punkt *P*' auf der Geraden *PM* so, dass *M* die Mitte der Strecke *PP*' ist.

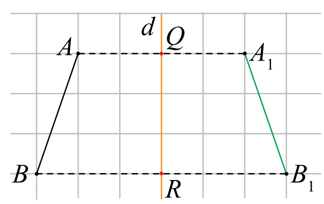


Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Îln der Praxis lässt sich leicht feststellen, dass das Spiegelbild (die Symmetrie) einer geometrischen Figur in Bezug auf eine Gerade eine geometrische Figur ist, die kongruent zur ursprünglichen Figur ist und aus den *symmetrischen Punkten der Punkte der gegebenen Figur* in Bezug auf die gegebene Achse gebildet wird.

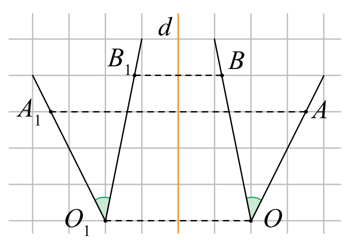
Wir wollen das *Spiegelbild* einfacher *geometrischer Figuren in Bezug auf eine bestimmte Gerade* bestimmen.

Anwendung 1.
Das Spiegelbild der Strecke *AB* in Bezug auf die Gerade d ist die Strecke A_1B_1, wobei A_1 der symmetrische Punkt von *A* in Bezug auf die Gerade *d* ist und B_1 der symmetrische Punkt von *B* in Bezug auf die Gerade *d*.
a) Fertigt in euren Heften eine Zeichnung an, die der Abbildung entspricht.
b) Prüft mithilfe des Zirkels die Kongruenz $AB \equiv A_1B_1$.



Die Strecke A_1B_1 ist das Spiegelbild (die symmetrische Strecke) der Strecke *AB* in Bezug auf die Gerade d, und die Strecke *AB* ist die symmetrische Strecke der Strecke A_1B_1 fin Bezug auf die Gerade *d*. Die Gerade *d* ist die Symmetrieachse für die Vereinigung der Strecken *AB* und A_1B_1.

Anwendung 2.
Das Spiegelbild (die Symmetrie) des beliebigen Winkels *AOB* in Bezug auf die Gerade d ist der Winkel $A_1O_1B_1$, wobei: A_1 der symmetrische Punkt von *A* in Bezug auf die Gerade *d* ist; O_1 der symmetrische Punkt von *O* in Bezug auf die Gerade *d* ist und B_1 der symmetrische Punk von *B* in Bezug auf die Gerade *d* ist.
a) Fertigt in euren Heften eine Zeichnung an, die der Abbildung entspricht.
b) Prüft mithilfe des Winkelmessers die Kongruenz $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A_1O_1B_1$.



Der Winkel $A_1O_1B_1$ eist das Spiegelbild des Winkels *AOB* in Bezug auf die Gerade d, und der Winkel AOB ist das Spiegelbild des Winkels $A_1O_1B_1$, in Bezug auf die Gerade *d*.
Die Gerade d ist die *Symmetrieachse* für die Menge der Punkte der beiden Winkel.

Schlussfolgerung

1. Das Spiegelbild einer Strecke in Bezug auf eine Gerade ist eine Strecke, die mit der ursprünglichen Strecke kongruent ist.
2. Das Spiegelbild eines Winkels in Bezug auf eine Gerade ist ein zum ursprünglichen Winkel kongruenter Winkel.

Portfoliothema

1. **a)** Stellt auf einer flexiblen durchsichtigen Folie einen Winkel *AOB* und seine Winkelhalbierende *OC* dar.
   b) Beweist durch Biegung und Überlappung, dass die Winkelhalbierende die Symmetrieachse des Winkels ist.
2. **a)** Stellt auf einer flexiblen durchsichtigen Folie eine Strecke *AB* und seine Mittelsenkrechte *d* dar.
   b) Beweist durch Biegung und Überlappung, dass die Mittelsenkrechte einer Strecke die Symmetrieachse dieser Strecke ist.

Übungen und Aufgaben

1. **a)** Stellt auf der Geraden d die Punkte *A, B, C, D, E, F* in dieser Reihenfolge dar, $AB = BC = EF = 2$ cm, $CD = DE = 3$ cm und die Geraden *BM, CN, DP* senkrecht auf die Gerade d.
b) Schreibt in eure Hefte ab und füllt die Lücken so aus, dass die folgenden Aussagen wahr sind.
p_1: Die Punkte *A* und *C* sind symmetrisch in Bezug auf die Gerade … .
p_2: Der Punkt *E* ist der symmetrische Punkt des Punktes … in Bezug auf die Gerade *DP*.

2. Der Punkt *S* ist der symmetrische Punkt des Punktes *A* in Bezug auf die Gerade *d* und $AS \cap d = \{B\}$.
Wenn $AS = 8$ cm ist, berechnet die Längen der Strecken *AB* und *SB*.

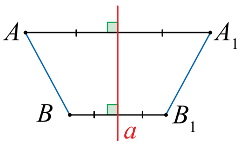
3. *ABCD* sei ein Quadrat und der Punkt *E* sei der symmetrische Punkt des Punktes *B* in Bezug auf die Gerade *AD*.
a) Beweist, dass die Punkte *A, B* und *E* kollinear sind.
b) Beweist, dass *AD* die Mittelsenkrechte der Strecke *BE* ist.

4. Stellt die Punkte *A, O, B* geometrisch so dar, dass der Winkel *AOB* ein rechter Winkel ist und $AO = 2{,}5$ cm und $OB = 4$ cm.
Konstruiert den Punkt *C*, den symmetrischen Punkt des Punktes *A* in Bezug auf den Punkt *O*, und *D*, den symmetrischen Punkt des Punktes *B* in Bezug auf den Punkt *O*. Beweist, dass:
a) $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 180^\circ$;
b) *OB* die Mittelsenkrechte der Strecke *AC* ist;
c) Punkt *C* der symmetrische Punkt des Punktes *A* in Bezug auf die Gerade *OB* ist;
d) Punkt *B* der symmetrische Punkt des Punktes *D* in Bezug auf die Gerade *AC* ist.

5. Die Punkte *A, B, C, D* sind kollinear, Punkt *B* ist symmetrisch zu Punkt *A* in Bezug auf die Gerade *d*, und Punkt *D* ist der symmetrische Punkt des Punktes *C* in Bezug auf die Gerade *d*.
a) Fertigt eine Zeichnung an, die den Daten der Aufgabe entspricht.
b) Beweist, dass $AC \equiv BD$ in jedem der möglichen Fälle der Anordnung der Punkte *A, B, C, D*.

Minitest

1. In der Abbildung ist a die Mittelsenkrechte der Strecken AA_1 und BB_1. Schreibt in eure Hefte ab und füllt die Lücken so aus, dass ihr wahre Aussagen erhaltet.



15 Pkte. **a)** Die Gerade a ist … für die in Blau dargestellte geometrische Figur.
15 Pkte. **b)** Die Strecke A_1B_1 ist … der Strecke *AB* in Bezug auf die Gerade *a*.

2. Auf der Strecke *AB* der Länge 10 cm liegen die Punkte *C, D, E* so, dass $AC = CB$, $AD = 2{,}5$ cm, $BE = 1{,}5$ cm. Man konstruiert im Punkt D die Gerade d senkrecht auf die Gerade *AB*.
20 Pkte. **a)** Fertigt eine Zeichnung an, die den Daten der Aufgabe entspricht.
20 Pkte. **b)** Beweist, dass der Punkt *C* der symmetrische Punkt des Punktes *A* in Bezug auf die Gerade *d* ist.
20 Pkte. **c)** Berechnet die Entfernungen (Abstände) der Punkte *B* und *E* zur Geraden *d*.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

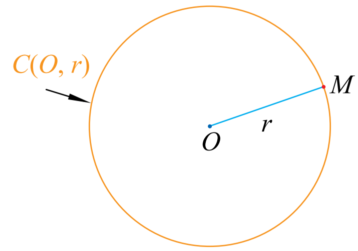
5.4 Der Kreis

L1 Der Kreis. Elemente des Kreises

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

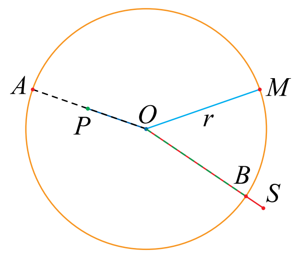
Die vielen Bedeutungen des Wortes „Kreis" beruhen auf der *perfekten* Form der geometrischen Figur dieses Namens. Nennt mithilfe des Wörterbuchs vier verschiedene Bedeutungen des Wortes „Kreis".
Der Kreis im geometrischen Sinn ist das *mathematische* Modell für viele Gegenstände oder Tätigkeiten des täglichen Lebens. Nennt vier Tätigkeiten, bei denen Gegenstände in Form eines Kreises verwendet werden oder bei denen der Kreis als Organisationsform genutzt wird.

Definition. O sei ein beliebiger fester Punkt in der Ebene und r sei eine positive Zahl. Ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r ist die Menge der Punkte in der Ebene im Abstand r vom Punkt O.

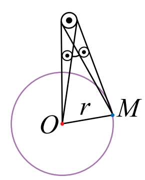


O ist der Mittelpunkt des Kreises
OM ist Radius des Kreises
$M \in C(O, r)$ und $OM = r$.

Wir bezeichnen $C(O, r)$ und lesen: der Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r.
Bemerkung: Wenn $M \in C(O, r)$, nennen wir den Radius des Kreises sowohl die Strecke OM als auch ihre Länge r.

In Bezug auf den Kreis $C(O, r)$ befindet sich jeder Punkt in der Ebene auf dem Kreis oder *innerhalb* des Kreises oder *außerhalb* des Kreises.		*In mathematischer Sprache*
• Wenn M ein beliebiger Punkt auf dem Kreis $C(O, r)$ ist, dann ist $MO = r$. Wenn M ein Punkt in der Ebene mit der Eigenschaft $MO = r$ ist, dann liegt M auf dem Kreis $C(O, r)$.		• Wenn $M \in C(O, r)$, dann $MO = r$. Wenn $MO = r$, dann $M \in C(O, r)$.
• Wenn ein Punkt P in der Ebene *innerhalb* des Kreises $C(O, r)$ liegt, dann ist $PO < r$. Wenn P ein Punkt in der Ebene mit $PO < r$ ist, dann liegt P innerhalb des Kreises $C(O, r)$.	In der obigen Abbildung gilt: • $M \in C(O, r)$; $A \in C(O, r)$; $B \in C(O, r)$ und $OM = OA = OB = r$.	• Wenn $P \in \mathrm{Int}C(O, r)$, dann $PO < r$. Wenn $PO < r$, dann $P \in \mathrm{Int}C(O, r)$.
• Wenn ein Punkt S in der Ebene *außerhalb* des Kreises $C(O, r)$ liegt, dann ist $SO > r$. Wenn S ein Punkt in der Ebene mit $SO > r$ ist, dann liegt S außerhalb des Kreises $C(O, r)$.	• $OP < OA$ und $OA = r$, also $OP < r$ und $P \in \mathrm{Int}C(O, r)$ • $OS > OB$ und $OB = r$, also $OS > r$ und $S \in \mathrm{Ext}C(O, r)$.	• Wenn $S \in \mathrm{Ext}C(O, r)$, dann $SO > r$. Wenn $SO > r$, *dann* $S \in \mathrm{Ext}C(O, r)$.

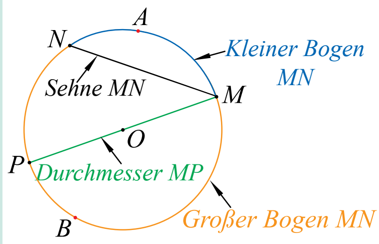
Konstruktion des Kreises mit dem Radius *r = OM* mithilfe des Zirkels



Schritt 1. Wir stellen den Punkt O, den Mittelpunkt des Kreises, fest.
Schritt 2. Wir nehmen r Einheiten in die Öffnung des Zirkels und stellen den Zirkel mit der Nadelspitze in Punkt O fest.
Schritt 3. Wir bezeichnen mit M die Stelle, an der die Bleistiftspitze die Seite berührt.
Schritt 4. Wir halten die Nadel im Punkt O fest und drehen die Bleistiftspitze, bis sie wieder den Punkt M erreicht.
Wir haben einen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r erhalten. Wenn wir nur den Mittelpunkt ändern und den Radius r beibehalten, erhalten wir einen Kreis, der zum ursprünglichen Kreis *kongruent* ist (durch Überlagerung stimmen sie überein). Daher sind die Kreise $C_1(O_1, r_1)$ und $C_2(O_2, r_2)$ kongruent, wenn $r_1 = r_2$.

M und *N* seien zwei verschiedene Punkte des Kreises $C(O, r)$.

- Die Strecke *MN* wird Sehne des Kreises $C(O, r)$ genannt.
- Jede Sehne des Kreises, die den Mittelpunkt des Kreises enthält, wird *Durchmesser* genannt.
- Wenn *MN* ein Durchmesser ist, so werden die Punkte *M* und *N* *diametral entgegengesetzte Punkte* genannt.
- Die Menge der Punkte des Kreises, die auf derselben Seite der Sehne *MN* liegen und zu der wir die Punkte *M* und *N* hinzufügen, nennen wir Kreisbogen und bezeichnen ihn $\overset{\frown}{MN}$.



Jedwelche zwei beliebige Punkte eines Kreises bestimmen zwei Kreisbögen, die wir in der Regel mit der Drei-Buchstaben-Schreibweise unterscheiden.

In mathematischer Sprache

- $M \in C(O, r)$, $N \in C(O, r)$ und $M \neq N$. die Strecke *MN* ist Sehne.
- Die Strecke *MP* ist Sehne und $O \in MP$.
  Die Sehne *MP* ist der Durchmesser des Kreises.
- Die Punkte *M* und *P* liegen diametral entgegengesetzt.
- Der kleine Bogen *MN* wird $\overset{\frown}{MAN}$ bezeichnet.
  Der große Bogen *MN* wird $\overset{\frown}{MBN}$. bezeichnet

Der Bogen, der die Punkte des Kreises enthält, die auf derselben Seite der Sehne liegen wie der Mittelpunkt des Kreises, wird großer Bogen genannt. Der Bogen auf der anderen Seite der Sehne wird *kleiner Bogen* des Kreises genannt.

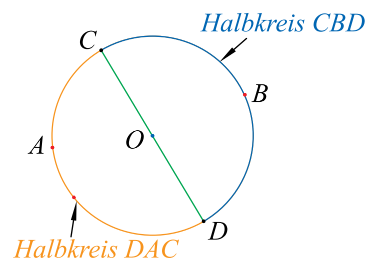
Bemerkung: Der Durchmesser ist die größte Sehne.

Wenn *MN* der Durchmesser und *r* der Radius des Kreises ist, dann ist $MN = 2r$.

Kreisbögen, die durch einen Durchmesser bestimmt werden, nennt man *Halbkreise*.

CD ist der Durchmesser, also sind $\overset{\frown}{DAC}$ und $\overset{\frown}{DBC}$ *Halbkreise*.

Bestimmt, wie viele Durchmesser des Kreises $C(O, r)$ konstruiert werden können. Zeichnet einen Kreis auf ein Deckblatt und zeichnet einen Durchmesser dieses Kreises. Faltet das Blatt entlang der Geraden, die den Durchmesser enthält. Findet eine Begründung, warum Bögen, die durch einen Durchmesser bestimmt werden, *Halbkreise* genannt werden.



Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung

Man betrachtet einen Kreis mit Mittelpunkt O und Radius $r = 3$ cm. In der Ebene seien die Punkte *A, B, C, D*, sodass $AO = 5$ cm, $BO = 1$ cm. *C, O, D* sind in dieser Reihenfolge kollinear. $CO = 3$ cm und $CD = 6$ cm.

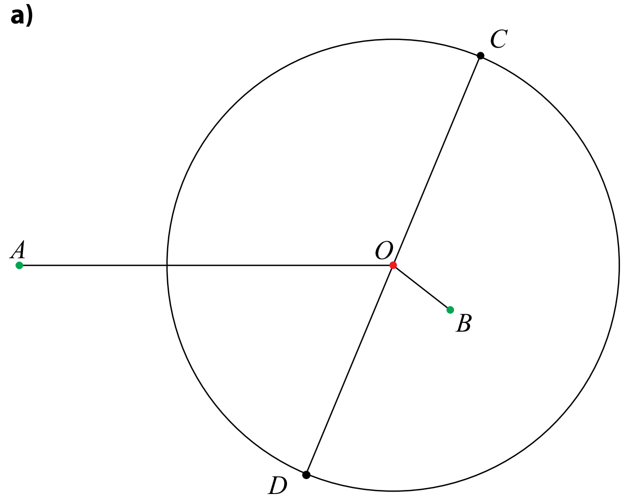
a) Fertigt mithilfe des Zirkels und des Lineals eine Zeichnung an, die den Daten der Aufgabe entspricht.

b) Übertragt die Tabelle in eure Hefte und tragt dann in das entsprechende leere Kästchen den Buchstaben ***W*** ein, wenn die Aussage wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

Aussage	***W/F***
A_1: Punkt *A* befindet sich innerhalb des Kreises.	
A_2: Die Punkte *C* und *D* sind diametral entgegengesetzt.	
A_3: Punkt *B* ist der Mittelpunkt des Kreises	
A_4: Die Punkte *O* und *B* befinden sich innerhalb des Kreises.	
A_5: Punkt *A* befindet sich außerhalb des Kreises.	
A_6: Der Kreis ist eine unendliche Menge von Punkten.	
A_7: Das Innere des Kreises ist eine endliche Menge von Punkten.	

Lösung

a)

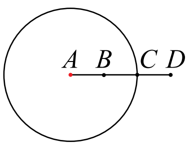


b) O ist der Mittelpunkt des Kreises und $OA > 3$, also $A \in \mathrm{Ext}\mathcal{C}(O, 3)$.
$OC = OD = 3$ cm und $r = 3$ cm, und O, C, D sind kollinear, also ist CD der Durchmesser, d. h., C und D liegen diametral entgegengesetzt.
O ist der Mittelpunkt des Kreises und $B \neq O$, also ist B nicht der Mittelpunkt des Kreises.
$OB = 1 < 3 = r$, und $OO = 0 < 3 = r$, also $OB < r$ und $OO < r$, d. h. $B \in \mathrm{Int}\mathcal{C}(O, 3)$ und $O \in \mathrm{Int}\mathcal{C}(O, 3)$.
$OA = 5 > 3 = r$, also $OA > r$, d. h. $A \in \mathrm{Ext}\mathcal{C}(O, 3)$.

Wir erhalten: $(A_1 \to F)$; $(A_2 \to A)$; $(A_3 \to F)$;
$(A_4 \to A)$; $(A_5 \to A)$; $(A_6 \to A)$;
$(A_7 \to F)$.

Übungen und Aufgaben

1. Die verschiedenen Punkte A, B, C, D sind kollinear und $AB = BC = CD = 2$ cm. Betrachtet die folgende Abbildung, übertragt den Text in eure Hefte und füllt die Lücken aus, um wahre Aussagen zu erhalten.



Der abgebildete Kreis hat den Mittelpunkt … und die Länge seines Radius beträgt … cm.
Punkt B befindet sich im … des Kreises.
Punkt D befindet sich im … des Kreises.
Punkt C gehört … .

2. Fertigt eine Zeichnung an, indem ihr nacheinander konstruiert:
- **a)** den Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 3 cm;
- **b)** den Radius OA dieses Kreises;
- **c)** den Durchmesser BC des Kreises;
- **d)** eine Sehne DE des Kreises.

3. Die Strecke AB ist 12 cm und Punkt P liegt auf ihr.
- **a)** Konstruiert die Kreise $\mathcal{C}_1$ mit dem Durchmesser AP und $\mathcal{C}_2$ mit dem Durchmesser BP.
- **b)** Berechnet den Abstand zwischen den Mittelpunkten der Kreise in Unterpunkt a).

4. Die Punkte O, A, B, C, D, E sind verschieden und $OA = 3$ cm, $OB = 30$ mm, $OC = 0{,}03$ dm, $OD = 0{,}3$ m, $OE = 0{,}(3)$ dm, und F ist der symmetrische Punkt von A in Bezug auf O. Zeichnet den Kreis $\mathcal{C}$ mit dem Mittelpunkt O und dem Radius 3 cm und gebt an:
- **a)** die Punkte auf dem Kreis $\mathcal{C}$;
- **b)** die Punkte innerhalb des Kreises $\mathcal{C}$;
- **c)** die Punkte außerhalb des Kreises $\mathcal{C}$.

5. Zeichnet einen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r, dann zeichnet den Punkt A innerhalb des Kreises, die Punkte B und C auf dem Kreis, O auf der Strecke BC und den Punkt D außerhalb des Kreises. Übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken mit einem der Symbole $<$, $=$, $>$ aus, sodass ihr wahre Aussagen erhaltet.

a) $AO \ldots r$	**c)** $CO \ldots r$	**e)** $BC \ldots 2 \cdot r$
b) $BO \ldots r$	**d)** $DO \ldots r$	**f)** $AB \ldots BC$.

6. Betrachtet auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius 5 cm die verschiedenen Punkte M, N und P mit $O \in MN$.
Übertragt die Tabelle in eure Hefte und schreibt dann in das leere Feld den Buchstaben ***W***, wenn die Aussage wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

Aussage	***A/F***
$ON = 5$ cm.	
$MP < 10$ cm.	
$MN = 10$ cm.	
Der Umfang des Dreiecks MOP beträgt mindestens 20 cm.	

Minitest

Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

20 Pkte. **1.** Die Strecke, die den Mittelpunkt des Kreises mit einem Punkt des Kreises verbindet, heißt:
A. Sehne; **B.** Durchmesser; **C.** Radius; **D.** Kreisbogen

20 Pkte. **2.** Die Strecke, die zwei Punkte eines Kreises verbindet, heißt:
A. Sehne; **B.** Radius; **C.** Halbkreis; **D.** Kreisbogen.

20 Pkte. **3.** Wenn die Punkte *A* und *B* auf einem Kreis mit dem Radius 3,5 cm diametral entgegengesetzt sind, dann hat *AB* die Länge.
A. 3,5 cm; **B.** 4,5 cm; **C.** 6 cm; **D.** 7 cm.

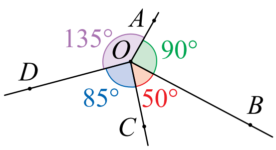
30 Pkte. **4.** Wenn die längste Sehne eines Kreises 10 cm ist, dann ist der Radius des Kreises:
A. 20 cm; **B.** 5 cm; **C.** 10 cm; **D.** 40 cm.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Mittelpunktswinkel. Maß des Mittelpunktswinkels

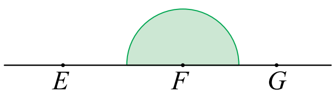
Zur Erinnerung

Die Summe der Winkelmaße um einen Punkt ist 360°.



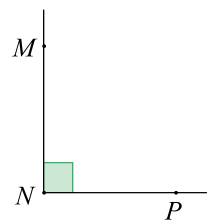
$90° + 50° + 85° + 135° = 360°$

Das Maß eines gestreckten Winkels ist 180°.



$\sphericalangle EFG = 180°$

Das Maß eines rechten Winkels ist 90°.



$\sphericalangle MNP = 90°$

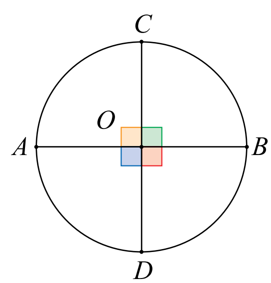
Wir lösen und beobachten

1. **a)** Konstruiert auf einem Deckblatt einen Kreis mit einem Radius, der dem Radius des Kreises entspricht, von dem der große Halbkreis eures Winkelmessers stammt. Zeichnet die senkrechten Durchmesser *AB* und *CD*.

b) Gebt mit Begründung die Maße der Winkel *AOB*, *AOC; AOD; BOC; BOD, COD* an.

c) Verfolgt mithilfe des Winkelmessers die Übereinstimmung zwischen dem Maß der Winkel in Unterpunkt b) und der Teilung auf dem Bogen des Winkelmessers, um das Maß der Kreisbögen, die diesen Winkeln entsprechen, abzuleiten.

d) Faltet das Blatt entlang einem der Durchmesser und stellt fest, ob die Bögen $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CB}$, $\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{DA}$ durch Überlappung paarweise zusammenfallen.



Lösung

a) Die obige Abbildung.

b) Aus $AB \perp CD$ folgt, dass die Halbgeraden *OA, OB, OC, OD* vier rechte Winkel um den Punkt *O* bilden: $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOD = \sphericalangle BOD = \sphericalangle BOC = 90°$. Andererseits sind *A, O, B* in dieser Reihenfolge kollinear, und *C, O, D* sind in dieser Reihenfolge kollinear. Dann ist $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = 180°$.

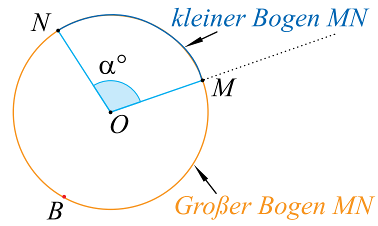
c) Bezeichnet die kleinen Bögen mit zwei Buchstaben und die großen Bögen mit drei Buchstaben, um sie zu unterscheiden. Dann gilt: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DA} = 90°$, $\overset{\frown}{ADC} = \overset{\frown}{BDC} = \overset{\frown}{BCD} = \overset{\frown}{DBA} = 360° - 90° = 270°$.
Dann ist $\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{BDA} = \overset{\frown}{CBD} = \overset{\frown}{CAD} = 180°$.

d) Wenn wir das Blatt nach *CD* falten, dann fällt $\overset{\frown}{AC}$ mit $\overset{\frown}{CB}$ überein und $\overset{\frown}{BD}$ mit $\overset{\frown}{DA}$ überein.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Definition. Ein Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkt eines Kreises liegt, wird *Mittelpunktswinkel* genannt.

Der kleine Bogen, der durch die Schnittpunkte der Schenkel eines Mittelpunktswinkels und des Kreises bestimmt wird, wird vom *Mittelpunktswinkel begrenzter Bogen genannt*.
Der Mittelpunktswinkel, der einen kleinen Bogen begrenzt, wird der diesem Bogen *entsprechende Mittelpunktswinkel* genannt.



Das Maß eines *kleinen* Kreisbogens ist gleich dem Maß des *Mittelpunktswinkels*, der diesem Bogen entspricht.

Das Maß des Kreises ist gleich der Summe der Winkelmaße um einen Punkt, d. h. 360°.

Das Maß eines *großen* Kreisbogens ist gleich der Differenz zwischen 360° und dem Maß des entsprechenden *kleinen Kreisbogens*.

Wenn $\sphericalangle MON = \alpha^\circ$, dann ist $\overset{\frown}{MN} = \alpha^\circ$ und $\overset{\frown}{MBN} = 360^\circ - \alpha^\circ$.

Wenn $\overset{\frown}{MN} = \alpha^\circ$, dann ist $\sphericalangle MON = \alpha^\circ$ und $\overset{\frown}{MBN} = 360^\circ - \alpha^\circ$.

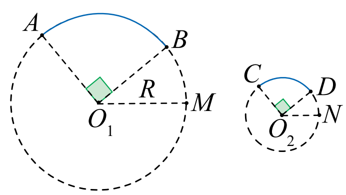
Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Wir erinnern uns, dass die Kreise $C_1(O_1, r_1)$ und $C_2(O_2, r_2)$ kongruent sind, wenn $r_1 = r_2$.

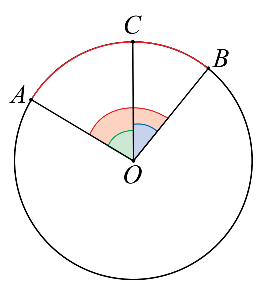
Definition. In einem Kreis oder in kongruenten Kreisen sind zwei Bögen kongruent, wenn sie das gleiche Maß haben. Für kongruente Kreisbögen $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{CD}$ schreiben wir $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$.

Bemerkung:
Es reicht nicht aus, dass die Bögen die gleiche Größe haben, um zu sagen, dass sie kongruent sind.
Es ist wichtig, dass es sich um Bögen desselben oder kongruenter Kreise handelt.

In der nebenstehenden Abbildung haben wir $\overset{\frown}{AB} = 90^\circ$ und $\overset{\frown}{CD} = 90^\circ$, die Bögen haben also das gleiche Maß. Es ist jedoch leicht zu erkennen, dass die Bögen nicht kongruent sind (sie fallen nicht zusammen, wenn sie sich überschneiden).



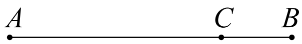
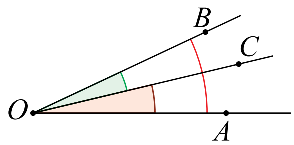
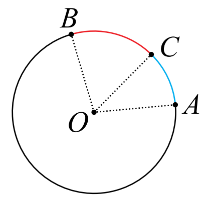
Anwendung. Wenn die Punkte *A, B, C* zum Kreis $C(O, r)$ gehören, und $C \in \overset{\frown}{AB}$, wobei $\overset{\frown}{AB}$ ein kleiner Bogen ist, dann $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$.
Lösung: Wir erkennen die Mittelpunktswinkel *AOC, COB, AOB*. Wir bemerken, dass $\sphericalangle AOC$ und $\sphericalangle COB$ anliegend sind und *OC* im Inneren des Winkels $\sphericalangle AOB$, liegt, also $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC + \sphericalangle COB$.
Aus der Tatsache, dass das Maß eines kleinen Kreisbogens gleich dem Maß des Mittelpunktswinkels ist, folgt, dass $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$.



Portfoliothema. Beweist die obige Aussage auch für den Fall, dass $\overset{\frown}{AB}$ ein großer Kreisbogen ist, indem ihr den Fall, wenn die Bögen kleine Bögen sind, und den Fall, in dem einer von ihnen ein großer Bogen ist, ermittelt

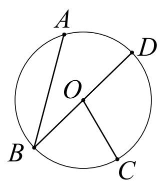
Lehrsatz. Wenn die Punkte A, B, C zum Kreis $C(O, r)$ gehören und $C \in \overset{\frown}{AB}$, dann $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$.

In der Praxis sind die folgenden Ergebnisse nützlich:

AB ist eine Strecke und $C \in AB$	$OC \in Int(\sphericalangle AOB)$	A, B, C gehören zum selben Kreis und $C \in \overset{\frown}{AB}$
		
$AB = AC + CB$	$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC + \sphericalangle COB$	$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$

Übungen und Aufgaben

1. Die Punkte A, B, C, D gehören zum Kreis mit dem Mittelpunkt O. Gebt anhand der beigefügten Abbildung an:



a) einen Radius des Kreises;
b) zwei diametral entgegengesetzte Punkte;
c) eine Sehne des Kreises, die nicht der Durchmesser ist;
d) einen Mittelpunktswinkel;
e) einen Halbkreis;
f) einen kleinen Kreisbogen;
g) einen großen Kreisbogen;
h) einen Bogen von 180°.

2. In einem Kreis mit dem Mittelpunkt O zeichnet mithilfe der geometrischen Instrumente und bezeichnet:
a) einen Mittelpunktswinkel von 50°;
b) einen Kreisbogen von 50°;
c) einen Kreisbogen von 90°.

3. **a)** Zeichnet einen Kreis, dann stellt den Kreisbogen AB mit einem Maß von 60° und den Kreisbogen CD mit einem Maß von 120° dar.
b) Zeichnet die Sehne, die den Bögen in Unterpunkt a) entsprechen.
c) Bestimmt mithilfe des Lineals die Länge der Sehnen und gebt an, welche länger ist.

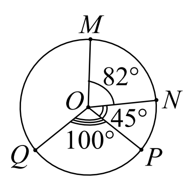
4. Die Punkte A, B, C liegen auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt O, sodass A, O und C kollinear sind und $BO \perp AC$. Bestimmt die Maße der Bögen $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{ABC}$.

5. Man betrachte auf dem Kreis mit Mittelpunkt A die verschiedenen Punkte M, N, P, sodass $\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle NAP \equiv \sphericalangle PAM$.
a) Bestimmt die Maße der Bögen MN, NP, PM.
b) Wenn MQ der Durchmesser des Kreises ist, bestimmt das Maß des kleinen Bogens und das Maß des großen Bogens PQ.

6. Auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt O sind die Punkte A, B, C, D so gewählt, dass die Bögen AB, BC, CD, DA kongruent sind.
a) Bestimmt die Maße der vier Bögen.
b) Zeigt, dass AC und BD Durchmesser des Kreises sind.
c) Beweist, dass $AC \perp BD$.

7. Die Punkte A, B, C liegen auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt O, sodass $\sphericalangle AOB = 35°$ und $OC \perp OB$.
a) Wenn B innerhalb des Winkels AOC liegt, berechnet die Maße der kleinen Bögen AB, BC, AC.
b) Wenn B außerhalb des Winkels AOC liegt, berechnet die Maße der großen Bögen AB, BC, AC.

8. Die Punkte M, N, P, Q liegen auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt O. Bestimmt unter Verwendung der Bezeichnungen in der Abbildung:
a) das Maß des Winkels MOQ;
b) das Maß des kleinen Bogens MQ und das Maß des großen Bogens NMQ.



Minitest

Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

30 Pkte. **1.** Ein Kreis hat das Maß:

A. 90°; **B.** 180°; **C.** 0°; **D.** 360°.

30 Pkte. **2.** Wenn die Punkte *C* und *D* auf einem Kreis diametral entgegengesetzt sind, dann ist das Maß des Bogens *CD*:

A. 180°; **B.** 90°; **C.** 60°; **D.** 360°.

30 Pkte. **3.** Die Punkte *E* und *F* gehören zum Kreis mit dem Mittelpunkt *O* und $\sphericalangle EOF = 90°$. Das Maß des großen Bogens *EF* ist:

A. 180°; **B.** 90°; **C.** 270°; **D.** 360°.

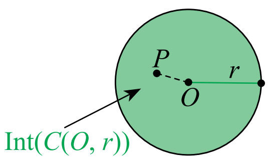
Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L3 Lage einer Geraden in Bezug auf einen Kreis. Gegenseitige Lage zweier Kreise zueinander

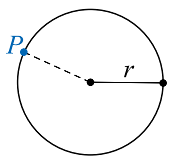
Zur Erinnerung

$C(O, r)$ sei der Kreis mit dem Mittelpunkt *O* und dem Radius *r*. Jeder Punkt *P* in der Ebene kann innerhalb des Kreises, auf dem Kreis oder außerhalb des Kreises liegen.

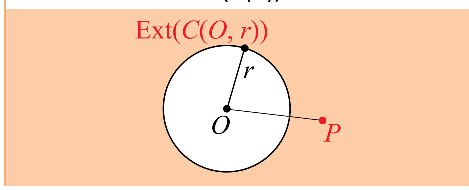
$P \in \mathrm{Int}C(O, r)$, $OP < r$



$P \in C(O, r)$, $OP = r$

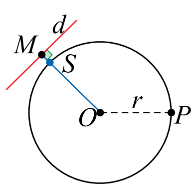
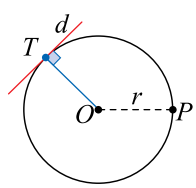
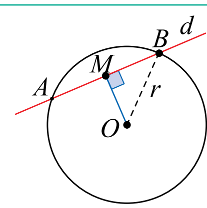


$P \in \mathrm{Ext}C(O, r)$, $OP > r$



Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Betrachten wir den Kreis $C(O, r)$ und eine beliebige Gerade *d*. Das Problem besteht darin, die Anzahl der Punkte zu bestimmen, die die Gerade und der Kreis gemeinsam haben. Intuitiv erkennen wir die folgenden drei Situationen:

Lage der Geraden *d* in Bezug auf den Kreis $C(O, r)$	*d liegt außerhalb des Kreises*	*d* ist Tangente des Kreises Punkt *T* ist der Berührungspunkt	*d* ist die Sekante des Kreises *A* und *B* sind die Punkte, in denen *d* den Kreis schneidet.
Anzahl der gemeinsamen Punkte	Die Gerade und der Kreis haben *keinen gemeinsamen* Punkt. $C(O, r) \cap d = \varnothing$	Die Gerade und der Kreis haben *genau einen gemeinsamen* Punkt. $C(O, r) \cap d = \{T\}$	Die Gerade und der Kreis haben *genau zwei gemeinsame* Punkte. $C(O, r) \cap d = \{A, B\}$
Geometrische Darstellung	 $d \subset \mathrm{Ext}C(O, r)$	 $(d \setminus \{T\}) \subset \mathrm{Ext}C(O, r)$	 $d \cap \mathrm{Int}C(O, r) = AB$
Beziehung zwischen dem Abstand von *O* zur Geraden *d* und dem Radius des Kreises	$OM \perp d$ und $OM > r$. $M \in d$	$OT \perp d$ und $OT = r$.	$OM \perp d$ und $OM < r$. $M \in d$

Bemerkungen

1. Eine Gerade kann nicht drei verschiedene Punkte mit einem Kreis gemeinsam haben. Daher sind jedwelche drei Punkte eines Kreises nicht kollinear.

2. Die Tangente eines Kreises ist senkrecht auf den Radius, auf dem sich der Berührungspunkt befindet.

Praktische Anwendung: **Gegenseitige Lage zweier Kreise zueinander**

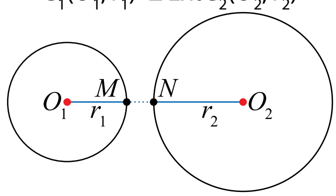
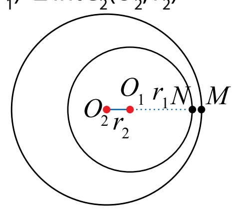
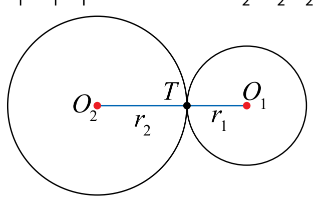
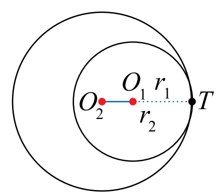
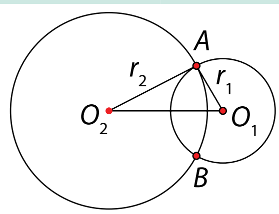
Benötigte Materialien: zwei Kreise $C_1(O_1, r_1)$, $C_2(O_2, r_2)$ mit $r_1 < r_2$ und mit den Radien kleiner als 5 cm, aus Draht oder anderem Material, deren Mittelpunkt auf einem Durchmesser aus demselben Material markiert ist, ein Lineal, ein A4-Blatt.

Schritt 1. Legt Punkt O_1 auf dem A4-Blatt fest, platziert und fixiert dann den Kreis $C_1(O_1, r_1)$ auf dem Blatt.

Schritt 2. Verschiebt den Kreis $C_2(O_2, r_3)$ auf der Ebene des Blattes, indem ihr den Abstand O_1O_2 ändert, und bestimmt die Anzahl der Punkte, die die beiden Kreise in jedem Einzelfall gemeinsam haben.

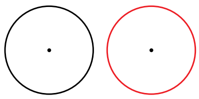
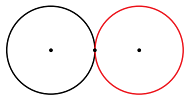
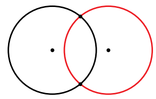
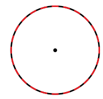
Schritt 3. Fertigt in eurem Heft mithilfe des Zirkels je eine Zeichnung für jeden identifizierten Fall an.

Die oben beschriebene Aktivität hilft uns, Folgendes zu erkennen:

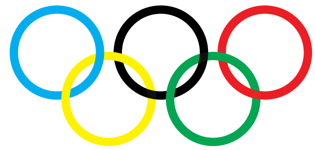
Anzahl der gemeinsamen Punkte und Lage der beiden Kreise	*Geometrische Darstellung*	
0 Punkte ***Disjunkte (außerhalb voneinander liegende oder ineinander liegende) Kreise*** $C_1(O_1, r_1) \cap C_2(O_2, r_2) = \varnothing$	**1.** Jeder Kreis ist im Äußeren des anderen Kreises eingeschlossen. $C_2(O_2, r_2) \subset ExtC_1(O_1, r_1)$ und $C_1(O_1, r_1) \subset ExtC_2(O_2, r_2)$  $O_1O_2 > r_1 + r_2$	**2.** Der Kreis mit dem kleineren Radius wird in den anderen Kreis eingeschlossen. $C_1(O_1, r_1) \subset IntC_2(O_2, r_2)$  $0 \le O_1O_2 < r_2 - r_1$ Wenn O_1 und O_2 zusammenfallen, werden die Kreise *konzentrische Kreise* genannt.
1 Punkt ***Berührende (tangente) Kreise*** $C_1(O_1, r_1) \cap C_2(O_2, r_2) = \{T\}$	**1.** *Sich von außen berührende* (*außentangente*) Kreise: wenn alle Punkte des einen Kreises, mit Ausnahme des gemeinsamen, außerhalb des anderen Kreises liegen. $(C_2(O_2, r_2) \setminus \{T\}) \subset ExtC_1(O_1, r_1)$ und $(C_1(O_1, r_1) \setminus \{T\}) \subset ExtC_2(O_2, r_2)$  $O_1O_2 = r_1 + r_2$	**2.** *Sich von innen berührende* (*innentangente*) Kreise: wenn alle Punkte des Kreises mit kleinerem Radius, mit Ausnahme des gemeinsamen Punktes, innerhalb des anderen Kreises liegen. $(C_1(O_1, r_1) \setminus \{T\}) \subset IntC_2(O_2, r_2)$  $O_1O_2 = r_2 - r_1$
2 gemeinsame Punkte ***Sich schneidende (sekante) Kreise*** $C_1(O_1, r_1) \cap C_2(O_2, r_2) = \{A, B\}$	 $O_1O_2 > r_2 - r_1$ und $O_1O_2 < r_1 + r_2$	

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Ein besonders interessanter Fall ist der der gegenseitigen Lagen, die zwei kongruente Kreise einnehmen können, nämlich:

kongruente außerhalb voneinander liegende Kreise	kongruente sich von außen berührende Kreise	kongruente sich schneidende Kreise	kongruente (identische) konzentrische Kreise
			

Anwendung: Die beigefügte Abbildung ist eine kleinere Kopie der olympischen Flagge. Wir markieren die fünf olympischen Kreise mit: *Bl, Schw, R, Ge, Gr,* je nach *Farbe*.



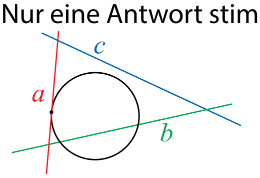
a) Identifiziert Paare von außerhalbliegenden Kreisen in der Abbildung und gebt ihre Anzahl an.
b) Identifiziert Paare von sich schneidenden Kreisen in der Abbildung und gebt ihre Anzahl an.
c) Bestimmt, ob es zwischen den fünf Kreisen sich berührende Kreise gibt.

Lösung: **a)** Es gibt sechs Paare von außerhalbliegenden Kreisen: $Bl \cap Schw = Bl \cap R = Bl \cap Gr = Schw \cap R = Ge \cap Gr = Ge \cap R = \varnothing$.
b) Es gibt vier Paare von sich schneidenden Kreisen: $\mathrm{card}(Bl \cap Ge) = \mathrm{card}(Ge \cap Schw) = \mathrm{card}(Schw \cap Gr) = \mathrm{card}(Gr \cap R) = 2$
c) Es gibt kein Kreispaar in der Abbildung, das genau einen gemeinsamen Punkt hat, also enthält die olympische Flagge keine sich berührenden Kreise.

Ein wenig Geschichte. Das von Pierre de Coubertin geschaffene Symbol für den olympischen Geist, die olympische Flagge, wurde bereits 1913 fertiggestellt, wurde aber erst 1920 bei den Olympischen Spielen in Antwerpen gehisst. Die olympische Flagge besteht aus fünf kongruenten Kreisen in verschiedenen Farben, die aneinandergereiht sind. Die fünf Farben und ein weißer Hintergrund werden seit diesen Jahren in den Flaggen der an den Olympischen Spielen teilnehmenden Länder verwendet.

Übungen und Aufgaben

1. Schaut euch die nebenstehende Abbildung an und wählt dann den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt. Nur eine Antwort stimmt.



a) Eine Gerade, die Sekante des Kreises ist, ist
A. *a*; **B.** *b*; **C.** *c*.
b) Eine Gerade, die Tangente des Kreises ist, ist:
A. *a*; **B.** *b*; **C.** *c*.
c) Eine Gerade außerhalb des Kreises ist:
A. *a*; **B.** *b*; **C.** *c*.

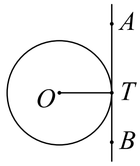
2. Schreibt mithilfe von mathematischen Symbolen die Beziehung zwischen dem Radius des Kreises und dem Abstand vom Mittelpunkt des Kreises zur Geraden für jeden Fall in Aufgabe 1 auf.

3. Durch den Punkt P außerhalb des Kreises $C(O, r)$ stellt dar und bezeichnet:
a) Gerade d_1 außerhalb des Kreises;
b) Gerade d_2, Tangente an den Kreis;
c) Gerade d_3, Sekante des Kreises.

4. Es sei der Kreis mit Mittelpunkt *O* und dem Durchmesser 8,4 cm. Legt einen Punkt *A* auf dem Kreis fest, konstruiert die Gerade *BA*, Tangente des Kreises, und bestimmt::
a) das Maß des Winkels *OAB*;
b) den Abstand vom Mittelpunkt des Kreises zur Geraden *BA*.

5. Zeichnet die sich schneidenden Kreise C_1 und C_2 mit den Mittelpunkten O_1, O_2 und den Radien $r, R, r < R$.
Beweist, dass:
a) $O_1O_2 > R - r$; **b)** $O_1O_2 < R + r$.
c) Wiederholt die Unterpunkte **a)** und **b)** für den numerischen Fall $r = 1{,}5$ cm, $R = 3{,}5$ cm.

6. In der Abbildung ist die Gerade AB im Punkt T Tangente an den Kreis mit dem Mittelpunkt O.



a) Bestimmt mithilfe des Winkelmessers die Maße der Winkel ATO und BTO.

b) Schreibt ab und füllt die Lücken so aus, dass ihr wahre Aussagen erhaltet.

b$_1$) $\sphericalangle ATO = \ldots°$; **b$_2$)** $\sphericalangle BTO = \ldots°$;

b$_3$) Die Aussage „$\sphericalangle ATO = \sphericalangle BTO = 90°$" ist ein ... Satz.

7. Ein Kreis hat den Mittelpunkt A und den Radius 3,5 cm. Stellt die Geraden a, b, c dar und gebt die Lage jeder Geraden in Bezug auf den Kreis an, wobei bekannt ist, dass:

a) der Abstand von Punkt A zur Geraden a 5 cm beträgt;

b) der Abstand von Punkt A zur Geraden b 35 mm;

c) der Abstand von Punkt A zur Geraden c 0,2 dm beträgt.

8. Zeichnet zwei Kreise, die … sind:

a) konzentrisch;

b) disjunkt;

c) sich von innen berührend;

d) sekant;

e) scih von außen berührend;

f) sich von außen berührend und kongruent.

9. Zeichnet zwei Kreise mit dem Radius von 2 cm bzw. 7 cm. Berechnet den Abstand zwischen den Mittelpunkten der Kreise, wenn sie:

a) sich von innen berühren;

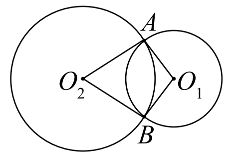
b) sich von außen berühren.

10. Betrachtet zwei Kreise mit den Mittelpunkten O und Q und den Radien 4 cm bzw. R cm, wobei R eine natürliche Zahl ist. Bestimmt die Werte, die R annehmen kann, damit die beiden Kreise außerhalbliegend sind und $OQ = 9$ cm ist.

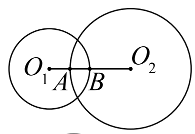
11. In einem Vergnügungspark fahren zwei kleine Züge auf Gleisen in Form von Kreisen, von denen einer einen Durchmesser von 72 m und der andere einen Durchmesser von 48 m hat. Die Punkte O_1 und O_2 sind die Mittelpunkte der Kreise, A und B sind die gemeinsamen Punkte der Kreise, und O_1A, O_1B, O_2A, O_2B sind die Parkgassen.

a) Berechnet, welche Entfernung Andreis Bruder zurücklegt, wenn er mehrere Fotos macht und sich dabei auf der Strecke $O_1 - A - O_2 - B - O_1$ bewegt.

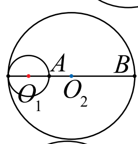
b) Beweist, dass $O_1O_2 < 60$ m.



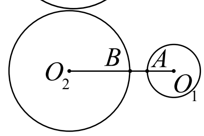
12. Es sei der Kreis $C_1(O_1, r)$ und der Kreis $C_2(O_2, R)$. Berechnet anhand der Daten aus den folgenden Abbildungen die Länge der Strecke AB für jeden Fall.

a)


$r = 4$ cm,
$R = 6$ cm,
$O_1O_2 = 8$ cm

b)


$r = 2$ cm,
$R = 6$ cm

c)


$r = 2$ cm,
$R = 7$ cm,
$O_1O_2 = 12$ cm

Minitest

Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

30 Pkte. **1.** Die Sekante eines Kreises schneidet den Kreis:

A. in einem einzigen Punkt;
B. in zwei verschiedenen Punkten;
C. in drei verschiedenen Punkten;
D. in einer unendlichen Anzahl von Punkten.

30 Pkte. **2.** Die Tangente an einen Kreis und der Radius im Berührungspunkt sind:

A. senkrecht aufeinander;
B. parallel zueinander;
C. überlagert;
D. entgegengesetzte Halbgeraden.

30 Pkte. **3.** $C_1(O_1, r_1)$ und $C_2(O_2, r_2)$ mit $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 9$ cm und $O_1O_2 = 13$ cm sind:

A. sekante Kreise;
B. von innen berührende Kreise;
C. von außen berührende Kreise;
D. außerhalbliegende Kreise.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

ABSCHLIEßENDE BEWERTUNG

I. *Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.*

5 Pkte. **1.** Innerhalb des Winkels $\sphericalangle AOB = 130°$ betrachtet man die Punkte C und D mit $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 83°$. Das Maß des Winkels COD ist:

A. 30°; **B.** 36°; **C.** 34°; **D.** 32°.

5 Pkte. **2.** AOB, BOC, COA sind Winkel um den Punkt O, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = 135^\circ$. Dann ist:

A. $AO \perp OB$; **B.** $BO \perp OC$; **C.** $AO \perp OC$; **D.** $CO \parallel AB$.

5 Pkte. **3.** Beiderseits der Geraden AB nimmt man die Punkte C und D an, sodass $CA \perp AB$, $DB \perp AB$. Die wahre Beziehung ist:

A. $AC \parallel BD$; **B.** $AC \perp BD$; **C.** $AB \parallel CD$; **D.** $AB \perp CD$.

5 Pkte. **4.** Zwei parallele Geraden bilden mit einer Sekante Stufenwinkel mit den Maßen $(3 - x)°$ und $102°$. Die Zahl x ist:

A. 24; **B.** 32; **C.** 42; **D.** 34.

5 Pkte. **5.** Punkt A ist der symmetrische Punkt von B in Bezug auf die Gerade g und $AB = 7{,}2$ cm. Der Abstand von Punkt A zur Geraden g ist:

A. 2,7 cm; **B.** 3,6 cm; **C.** 4,8 cm; **D.** 14,4 cm.

5 Pkte. **6.** Sei die Strecke $AB = 16$ cm und die Zahlen $r = 6{,}9$ cm, $R = 9{,}6$ cm. Die Kreise $C(A, r)$ und $C(B, R)$ sind:

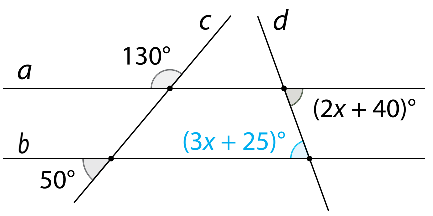
A. sich schneidende Kreise; **B.** außerhalbliegende Kreise; **C.** innentangente Kreise; **D.** außentangente Kreise.

II. *Schreibt die vollständigen Lösungen auf.*

1. Beachtet die unten dargestellte Konfiguration. Beantwortet anhand der vorgelegten Daten die folgenden Fragen:

10 Pkte. **a)** bestimmt, ob die Geraden a und b parallel sind;

10 Pkte. **b)** bestimmt den Wert der Zahl x.



2. Die Winkel AOB und COD sind anliegend und OM und ON sind ihre Winkelhalbierenden. Es ist bekannt, dass $\sphericalangle AOB = 30^\circ + \sphericalangle BOC$ und $\sphericalangle MON = 75^\circ$.

15 Pkte. **a)** Berechnet die Maße der Winkel AOB und COD;

10 Pkte. **b)** Beweist, dass die Winkelhalbierende des Winkels CON senkrecht auf die Gerade OM steht.

3. Betrachtet man einen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $r = 4$ cm und eine Gerade a. Der Abstand vom Punkt O, dem Mittelpunkt des Kreises, zur Geraden a ist d cm, $d \in \{2, 4, 6, 8\}$. Wähle d so aus, dass die Gerade a:

5 Pkte. **a)** Sekante des Kreises;

5 Pkte. **b)** Tangente des Kreises;

5 Pkte. **c)** außerhalb des Kreises ist.

Bemerkung: Arbeitszeit: 50 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

6. DAS DREIECK

6.1 Das Dreieck. Die Konstruktion eines Dreiecks

L1 Das Dreieck. Einteilung. Umfang

Spezifische Kompetenzen: 1.6; 2.6; 3.6; 4.6; 5.6; 6.6

Zur Erinnerung

Unabhängig von den einzelnen Punkten A und B nennen wir *Strecke AB* (oder *Strecke BA*) die Menge aller Punkte M, die auf der Geraden AB zwischen A und B liegen. Die Punkte A und B sind die Enden der Strecke AB.
Der Umfang einer geometrischen Figur ist die Summe der Längen ihrer Seiten.
Das Innere eines Winkels ABC ist die Menge aller Punkte, die zum Schnittpunkt der durch AB begrenzten Halbebene, die den Punkt C enthält, und der durch BC begrenzten Halbebene, die den Punkt A enthält, gehören.

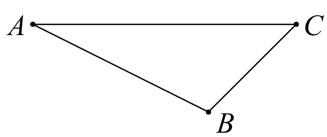
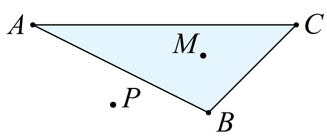
Wir lösen und beobachten

Das Dreieck ist das Motiv vieler Gegenstände in unserem Leben. Von klein auf erkennen wir Gegenstände in der Form eines Dreiecks, wir identifizieren ihre Elemente (Spitzen, Seiten, sogar Winkel).

Beispiel

a) Gebt die Anzahl der dreieckigen Teile an, die für die Bildung des Puzzles im ersten Bild notwendig waren.
b) Erkennt die Dreiecke auf dem zweiten Bild.

Drei verschiedene nicht kollineare Punkte A, B, C können die Strecken AB, AC, BC und das Dreieck ABC bilden.

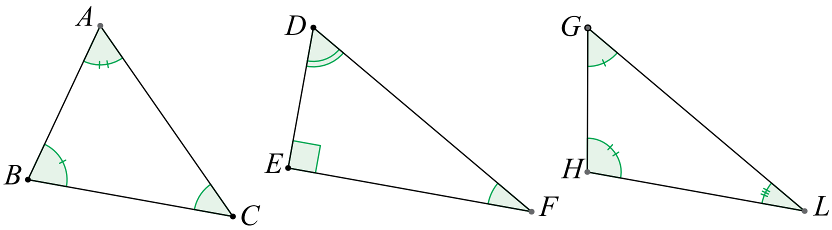
Definition und Schreibweise	*Geometrische Darstellung*	*Elemente des Dreiecks und ihre Anzahl*
Die Menge aller Punkte der Strecken AB, BC und CA, zusammen mit ihren Endpunkten bilden das Dreieck ABC. Wir schreiben ΔABC oder ΔACB oder ΔBAC und lesen Dreieck ABC oder Dreieck ACB oder Dreieck BCA.		3 *Spitzen*: die Punkte A, B, C; 3 *Seiten*: die Strecken AB, AC, BC; 3 *Winkel*: $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ABC$ oder $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$.
In mathematischer Sprache ausgedrückt:	$\Delta ABC = AB \cup BC \cup AC \cup \{A, B, C\}$.	
Die Menge aller Punkte, die zum Inneren aller Winkel des Dreiecks ABC gehören, bildet *das Innere des Dreiecks* und wird mit $Int(\Delta ABC)$ bezeichnet.		$M \in \text{Int}(\sphericalangle A)$, $M \in \text{Int}(\sphericalangle B)$ und $M \in \text{Int}(\sphericalangle C)$, folglich $M \in \text{Int}(\Delta ABC)$. $P \in \text{Ext}(\Delta ABC)$.
Die Punkte, die nicht zum Dreieck oder seinem Inneren gehören, bilden das Äußere des Dreiecks.	$\text{Int}(\Delta ABC) = \text{Int}(\sphericalangle A) \cap \text{Int}(\sphericalangle B) \cap \text{Int}(\sphericalangle C)$ Wenn $P \notin \Delta ABC$ und $P \notin \text{Int}(\Delta ABC)$, dann $P \in \text{Ext}(\Delta ABC)$.	

Umfang des Dreiecks

Wenn die Seitenlängen des Dreiecks ABC, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ sind, dann ist der Umfang des Dreiecks ABC die Summe $a + b + c$. Wir schreiben $U_{\Delta ABC} = a + b + c$.

Bemerkung: In der Praxis stoßen wir auf Probleme, bei denen wir den halben Umfang eines Dreiecks benötigen, d. h. die Zahl $U_{\Delta ABC} = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Aufgabe **1.** Benutze den Winkelmesser, um die Winkel der Dreiecke *ABC*, *DEF* und *GHL* zu messen, und fülle dann das entsprechende Feld in der folgenden Tabelle aus.



ΔABC	ΔDEF	ΔGHL
$\sphericalangle A = 60°$	$\sphericalangle D = 60°$	$\sphericalangle G = 50°$
$\sphericalangle B = 75°$	$\sphericalangle E = 90°$	$\sphericalangle H = 100°$
$\sphericalangle C = 45°$	$\sphericalangle F = 30°$	$\sphericalangle L = 30°$

Wir merken uns

Einteilung von Dreiecken nach Winkelmaßen

Nach den Winkelmaßen ist ein Dreieck:
- *spitzwinklig*, wenn alle drei Winkel *spitz* sind;
- *rechtwinklig*, wenn einer der Winkel ein *rechter* Winkel ist;
- *stumpfwinklig*, wenn einer der Winkel ein *stumpfer* Winkel ist.

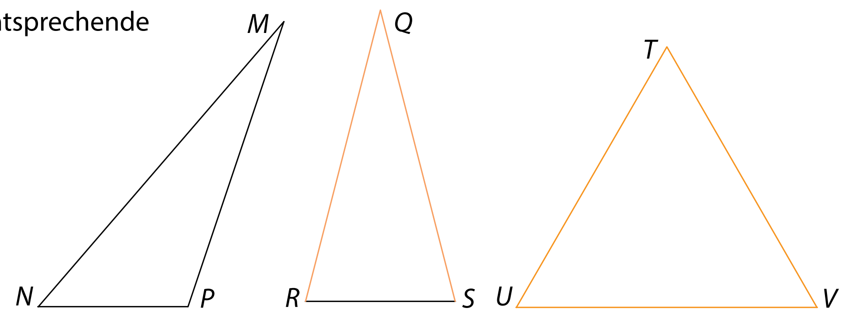
Mathematisch ausgedrückt:
Nach den Winkelmaßen ist ΔABC:
- *spitzwinklig, wenn* $\sphericalangle A < 90^\circ$, $\sphericalangle B < 90^\circ$ und $\sphericalangle C < 90^\circ$;
- *rechtwinklig, wenn* $\sphericalangle A = 90^\circ$ oder $\sphericalangle B = 90^\circ$ oder $\sphericalangle C = 90^\circ$;
- *stumpfwinklig*, wenn $\sphericalangle A > 90^\circ$ oder $\sphericalangle B > 90^\circ$ oder $\sphericalangle C > 90^\circ$.

Bemerkung: In einem rechtwinkligen Dreieck wird die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite *Hypotenuse* genannt, und die Seiten, die den rechten Winkel bilden, werden als *Katheten* bezeichnet.

Wenn das Dreieck *DEF* rechtwinklig ist und $\sphericalangle E = 90°$, dann ist die Seite *DF* die Hypotenuse und die Seiten *ED* und *EF* sind die Katheten.

Aufgabe **2.** Messt mit dem Messlineal die Seiten der Dreiecke *MNP, QRS, TUV* und tragt sie ins entsprechende Feld der Tabelle ein.

ΔMNP	ΔQRS	ΔTUV
$NP = 2$ cm	$QR = 4$ cm	$TU = 4$ cm
$PM = 4$ cm	$RS = 2$ cm	$UV = 4$ cm
$MN = 5$ cm	$QS = 4$ cm	$TV = 4$ cm



Wir merken uns

Einteilung von Dreiecken nach Seitenlängen

Nach den Seitenlängen ist ein Dreieck:
- *beliebig* oder *unregelmäßig*, wenn die Längen seiner Seiten verschieden sind;
- *gleichschenklig*, wenn zwei seiner Seiten kongruent sind;
- *gleichseitig*, wenn alle drei Seiten kongruent sind.

Mathematisch ausgedrückt:
Nach den Seitenlängen ist ΔABC:
- *beliebig* oder *unregelmäßig,* wenn $AB \neq BC$, $BC \neq AC$ und $AC \neq BC$.
- *gleichschenklig*, wenn $AB \equiv BC$ oder $BC \equiv AC$ oder $AC \equiv AB$.
- *gleichseitig*, $AB \equiv BC \equiv AC$.

Bemerkungen: **1.** Wenn ΔABC gleichschenklig ist, $AB = BC$, dann wird die Seite *AC die Basis/Grundlinie* des Dreiecks genannt.
2. Jedes gleichseitige Dreieck ist gleichschenklig

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Nach den Messungen in Aufgabe 2 und dem Ausfüllen der Tabelle ergibt sich folgendes Ergebnis:

- In ΔABC, $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 75°$ und $\sphericalangle C = 45°$, also ΔABC ist ein *spitzwinkliges* Dreieck.
- In ΔDEF, $\sphericalangle E = 90°$, also ΔDEF ist ein *rechtwinkliges* Dreieck.
- În ΔGHL, $\sphericalangle H = 100°$, also ΔGHL ist ein *stumpfwinkliges* Dreieck.
- In ΔMNP, $NP = 2$ cm, $PM = 4$ cm, $MN = 5$ cm, d. h., $MN \neq NP$, $NP \neq MP$ und $MN \neq MP$, also ΔMNP ist ein *beliebiges/unregelmäßiges* Dreieck.
- In ΔQRS betragen $QR = 4$ cm, $RS = 2$ cm, $QS = 4$ cm, d. h., $QR = QS$, also ΔQRS eist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis RS.
- In ΔTUV betragen $TU = 4$ cm, $UV = 4$ cm, $TV = 4$ cm, d. h., $TU = UV = TV$, also ist ΔTUV ein *gleichseitiges* Dreieck.

Die Umfänge und die halben Umfänge der Dreiecke *MNP, QRS, TUV* sind:

$U_{\Delta MNP} = 2\text{ cm} + 4\text{ cm} + 5\text{ cm} = 11\text{ cm}$, $U_{\Delta QRS} = 4\text{ cm} + 4\text{ cm} + 2\text{ cm} = 10\text{ cm}$, $U_{\Delta TUV} = 4\text{ cm} + 4\text{ cm} + 4\text{ cm} = 12\text{ cm}$.

$$U_{\triangle MNP} = \frac{U_{\triangle MNP}}{2} = 5{,}5\text{ cm};\ U_{\triangle AQRS} = \frac{U_{\triangle QRS}}{2} = 5\text{ cm};\ U_{\triangle TUV} = \frac{U_{\triangle TUV}}{2} = 6\text{ cm}.$$

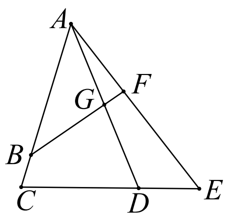
Übungen und Aufgaben

1. Es seien *A, B, C, D* verschiedene Punkte. Stellt die Dreiecke, die in jedem Fall gebildet werden können, geometrisch dar und notiert sie:

a) Die Punkte *A, B, C* sind kollinear und $D \notin AB$;

b) Drei der Punkte *A, B, C, D* sind nicht kollinear.

2. Verwendet die angegebenen Bezeichnungen und bestimmt aufgrund der sorgfältigen Betrachtung der Konfiguration:



a) die Anzahl der dargestellten Dreiecke;

b) die Dreiecke, bei denen die Strecke *CD* eine Seite ist;

c) die Dreiecke, bei denen einer der Winkel *DAF* ist.

3. Zeichnet das Dreieck *DEF* und erwähnt:

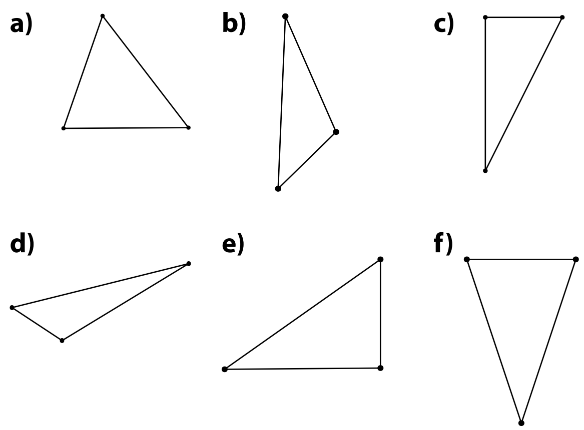
a) alle Möglichkeiten, das Dreieck zu notieren;

b) die Eckpunkte, Seiten und Winkel des Dreiecks;

c) die an die Seite *EF* anliegenden Winkel;

d) die Seite, die dem Winkel *DEF* gegenüberliegt.

4. Betrachtet die abgebildeten Dreiecke, messt eventuell die Winkel und wählt dann den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt. Nur eine Antwort ist richtig.



4.1 Spitzwinklige Dreiecke sind in folgenden Abbildungen dargestellt:

A. a), c) und d); **C.** a) und f);
B. b) und f); **D.** c) und e).

4.2 Stumpfwinklige Dreiecke sind in folgenden Abbildungen dargestellt:

A. c) und e); **C.** a), b) und f);
B. b) und d); **D.** b) und e).

4.3 Rechtwinklige Dreiecke sind in folgenden Abbildungen dargestellt:

A. c) und d); **C.** a) und c);
B. a), c) und e); **D.** c) und e).

5. Zeichnet je zwei Dreiecke für jeden der Fälle:

a) sie haben eine gemeinsame Spitze, die mit M bezeichnet wird;

b) sie haben eine gemeinsame Seite, die Strecke NP;

c) das Innere des einen Dreiecks ist im Inneren des anderen enthalten;

d) sie haben einen gemeinsamen Winkel ABC;

e) sie haben disjunkte (voneinander verschiedene) Innere.

6. Bestimmt die Art des Dreiecks ABC (gleichschenklig, gleichseitig, unregelmäßig, spitzwinklig, rechtwinklig, stumpfwinklig) in den folgenden Fällen:

a) $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 3$ cm;

b) $AB = 5$ cm, $BC = 0{,}5$ dm, $AC = 50$ mm;

c) $AB = 6$ cm, $BC = 6{,}6$ cm, $AC = 6{,}(6)$ cm;

d) $\sphericalangle BAC = 90°$;

e) $\sphericalangle A = 33°$, $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 122°$, $\sphericalangle C = 58°$;

f) $\sphericalangle ACB = 6000'$.

7. Berechnet den Umfang des Dreiecks MNP, wenn bekannt ist, dass:

a) $MN = 8$ cm, $NP = 5$ cm, $NP = 10$ cm;

b) $MN = 20$ cm, $NP = 2{,}5$ dm, $NP = 0{,}15$ m;

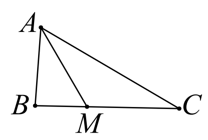
c) $MN = NP = NP = 0{,}01$ km;

d) der halbe Umfang des Dreiecks 40 cm beträgt.

8. Die kongruenten Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks sind 14 cm lang, und der Umfang des Dreiecks beträgt 35 cm. Berechnet die Länge der dritten Seite des Dreiecks.

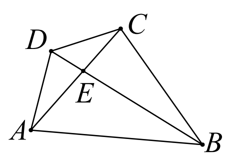
9. Der halbe Umfang eines gleichseitigen Dreiecks beträgt 21 cm. Berechnet die Länge einer Seite des Dreiecks.

10. Der Punkt M befindet sich auf der Seite BC des Dreiecks ABC. Wir wissen, dass der Umfang des Dreiecks ABM 40 cm, der Umfang des Dreiecks ACM 54 cm und der Umfang des Dreiecks ABC 60 cm beträgt. Berechnet die Länge der Strecke AM.



Minitest

1. in der dargestellten Konfiguration sind die Punkte A, E, C und B, E, D kollinear.



15 Pkte. **a)** Schreibt alle abgebildeten Dreiecke auf.

15 Pkte. **b)** Schreibt die abgebildeten Dreiecke auf, die die Strecke BC als Seite haben.

15 Pkte. **c)** Schreibt die abgebildeten Dreiecke auf, in denen ein Winkel ABD ist.

30 Pkte. **2.** Ein gleichschenkliges Dreieck hat einen Umfang von 20 cm und eine Seite von 9 cm. Berechnet die Längen der anderen Seiten des Dreiecks. Gebt alle möglichen Fälle an.

15 Pkte. **3.** Bestimme die Art des Dreiecks FGH, wenn $\sphericalangle F = 68°$, $\sphericalangle F + \sphericalangle G = 158°$, $\sphericalangle G + \sphericalangle H = 112°$.

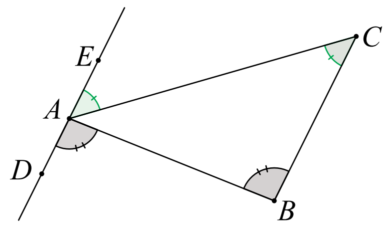
Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Die Summe der Winkelmaße eines Dreiecks. Außenwinkel eines Dreiecks

Zur Erinnerung

Zwei parallele Geraden bilden mit einer Sekante *kongruente innere Wechselwinkel, kongruente äußere Wechselwinkel, kongruente Stufenwinkel,* supplementäre *innere* Winkel *auf derselben Seite der Sekante*, supplementäre *äußere* Winkel *auf derselben Seite der Sekante*.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen



Aufgabe 1. Gegeben sind das Dreieck *ABC* und die Parallele *DE* durch *A* zu *BC*, wobei *D* und *E* auf verschiedenen Seiten des Punktes A liegen, wie in der nebenstehenden Abbildung.

a) Beweist, dass die Winkel *EAC* und *ACB* kongruent sind.
b) Beweist, dass die Winkel *DAB* und *ABC* kongruent sind.
c) Ermittelt mithilfe der in a) und b) bewiesenen Kongruenzen die Summe der Winkelmaße *BAC, ABC, BCA*.

Beweis

a) Die parallelen Geraden *DE* und *BC* bilden mit der Sekante *AB* kongruente innere Wechselwinkel, also $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ABC$.
b) Dieselben parallelen Geraden bilden kongruente innere Wechselwinkel mit der Sekante *AC*, also $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle BCA$.
c) Die Punkte *E*, *A*, *D* sind kollinear, d. h., $\sphericalangle DAE = 180°$. Die Winkel *EAC* und *CAB* und auch die Winkel *CAB* und *DAB* sind anliegend, also, $\sphericalangle EAC + \sphericalangle CAB + \sphericalangle DAB = \sphericalangle DAE = 180°$.
Aus a) und b) ergibt sich: $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = \sphericalangle DAB + \sphericalangle CAB + \sphericalangle EAC$. Mit dem Ergebnis in c) erhält man $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 180°$ oder $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$, wobei $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$ die Maße der Winkel des Dreiecks *ABC* sind.

Mit der obigen Anwendung haben wir das folgende wichtige Ergebnis nachgewiesen:

Lehrsatz
Die Summe der Winkelmaße in einem beliebigen Dreieck beträgt 180°.

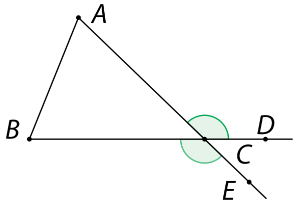
Mathematisch ausgedrückt:
Im Dreieck *ABC* gilt: $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$.

Aufgabe 2. *ABC* sei ein Dreieck.

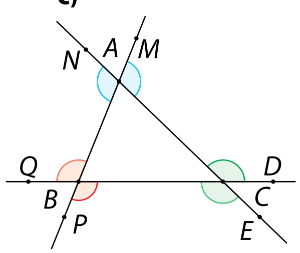
a) Zeichnet den Strahl *CD* entgegengesetzt dem Strahl *CB* und den Strahl *CE* entgegengesetzt dem Strahl *CA*.
b) Markiert die an den Winkel *ACB* (Winkel *C* des Dreiecks) anliegenden und supplemänteren Winkel.
c) Wiederholt a) und b) für die Winkel *A* und *B* des Dreiecks *ABC*. Notiert die erhaltenen Strahlen wie folgt: *AM* entgegengesetzt zu *AB*, *AN* entgegengesetzt zu *AC* bzw. *BP* entgegengesetzt zu *BA* und *BQ* entgegengesetzt zu *BC*.
d) Bestimmt das Verhältnis zwischen den markierten Winkeln und begründet die Antwort.

Lösung

a) und **b)**



c)



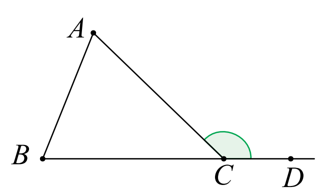
d) *B*, *C*, *D* sind kollinear, *A, C, E* sind kollinear, d. h., die Winkel *ACD* und *BCE* sind Scheitelwinkel, also $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BCE$.
Die markierten Winkel werden als Außenwinkel des Dreiecks *ABC* bezeichnet.
Es treten Kongruenzen auf:
$\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BCE$, $\sphericalangle CBP \equiv \sphericalangle ABQ$, $\sphericalangle BAN \equiv \sphericalangle CAM$.

Wir merken uns

Jedes Dreieck hat drei Paare von Außenwinkeln.
Die Außenwinkel, die demselben Scheitelpunkt entsprechen, sind kongruent.

Definition. Ein anliegender und supplementärer Winkel eines Winkels des Dreiecks wird als *Außenwinkel* des Dreiecks bezeichnet.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge



Anwendung 1. Das Dreieck *ABC* ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt. Der Punkt *D* liegt auf der rechten Seite von *BC*, sodass *C* zwischen *B* und *D* liegt. Vergleicht das Maß des Winkels *ACD* mit der Summe $\sphericalangle A + \sphericalangle B$.

Lösung: Die Winkel *BCA* und *ACD* sind anliegend und supplementär, also $\sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD = 180°$.

Aber die Summe der Winkel eines Dreiecks ist 180° $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle BCA = 180°$.
Es folgt, dass $\sphericalangle ACD = \sphericalangle A + \sphericalangle B$.

Mit der obigen Anwendung haben wir das folgende wichtige Ergebnis nachgewiesen:

Lehrsatz der äußeren Winkel eines Dreiecks

Das Maß eines Außenwinkels eines Dreiecks ist gleich der Summe der Maße der nichtanliegenden Winkel des Dreiecks.

In mathematischer Sprache:

Wenn ACD der Außenwinkel des Dreiecks ABC ist, dann ist $\sphericalangle ACD = \sphericalangle A + \sphericalangle B$.

Anwendung 2. Jedes Dreieck hat mindestens zwei spitze Winkel.

Beweis: Es sei ΔABC. Wir nehmen an, dass das Dreieck weniger als zwei spitze Winkel hat. Dann sind mindestens zwei Winkel stumpf oder rechtwinklig. Sei $\sphericalangle A \geq 90°$ und $\sphericalangle B \geq 90°$. Dann ergibt sich $\sphericalangle A + \sphericalangle B \geq 180°$ was der bewiesenen Aussage $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$ mit $\sphericalangle C > 0°$ widerspricht. Daraus folgt, dass die Vermutung falsch ist, also die Aussage „mindestens zwei Winkel eines Dreiecks sind spitz" ist wahr.

Anwendung 3. Die spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind komplementär.
Beweis: Es sei ΔABC rechtwinklig mit $\sphericalangle A = 90°$.
Da $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$, ist $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180° - 90° = 90°$, also folgt, dass $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle C$ komplementär sind.

Übungen und Aufgaben

1. Seien $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ die Maße der Winkel des Dreiecks ABC. Bestimmt für jede der folgenden Aufgaben die Maße der unbekannten Winkel:
a) $\sphericalangle A = 50°$, $\sphericalangle B = 60°$;
b) $\sphericalangle B = 67°$, $\sphericalangle C = 76°$;
c) $\sphericalangle B = 100°$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$;
d) $\sphericalangle C = 34°20'$, $\sphericalangle B = 2 \cdot \sphericalangle C$;
e) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$;
f) $\sphericalangle A = 2 \cdot \sphericalangle B = 6 \cdot \sphericalangle C$.

2. Gebt die Art jedes Dreiecks aus Übung 1 an (spitzwinklig, rechtwinklig, stumpfwinklig).

3. Sandu zeichnet das Dreieck DEF, in dem das Maß des Winkels D 48° beträgt. Alin sagt, dass die beiden anderen Winkel 70° und 72° sein könnten. Paul sagt, dass die beiden anderen Winkel 64° und 68° sein könnten. Wer hat recht? Begründet eure Antwort.

4. Es sei das Dreieck MNP. Tragt die entsprechenden Winkelmaße in die leeren Kästchen ein:

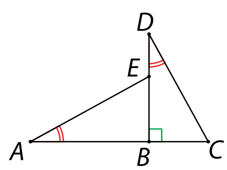
$\sphericalangle M$	$\sphericalangle N$	$\sphericalangle P$
$75°$	$46°$	
	$90°$	$45°$
	$\sphericalangle M + 12°$	$\sphericalangle N + 24°$

5. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und tragt in das leere Kästchen den Buchstaben ***W*** ein, wenn die Aussage wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

Aussage	***W/F***
Wenn $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90°$, dann $\sphericalangle C = 90°$.	
Wenn $\sphericalangle B + \sphericalangle C > 90°$, dann $\sphericalangle A < 90°$.	
Wenn $\sphericalangle C + \sphericalangle A < 90°$, dann $\sphericalangle B < 90°$.	
Wenn $\sphericalangle A \geq 60°$, $\sphericalangle B \geq 60°$, $\sphericalangle C \geq 60°$, dann $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C$.	

6. Bestimmt, ob das Dreieck ABC in jedem Fall spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig ist:
a) $\sphericalangle A = 45°$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$;
b) $\sphericalangle B = 25°$, $\sphericalangle C = 62°$;
c) $\sphericalangle C = 30°$, $\sphericalangle A = 24° + \sphericalangle B$.

7. In der folgenden Abbildung ist $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBD = 90°$, die Punkte B, E, D sind kollinear und $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$.



a) Beweist, dass $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle AEB$.
b) Wenn $\sphericalangle C = 60°$, bestimmt das Maß des Winkels $\sphericalangle A$.

8. Es sei das Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 56°$, $\sphericalangle B = 78°$. Berechnet die Maße der Außenwinkel des Dreiecks.

9. Bestimmt die Winkelmaße eines Dreiecks, wobei bekannt ist, dass sie mit drei verschiedenen, durch 18 teilbaren, natürlichen Zahlen in Sexagesimalgrad angegeben sind.

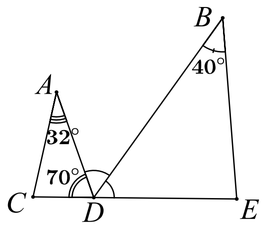
10. Die Winkel *AOB* und *COD* sind Scheitelwinkel, $O \in AD$, $\sphericalangle AOB = 50^\circ$, $\sphericalangle OCD = 80^\circ$ und $AB \parallel CD$.

a) Zeichnet ein Bild, das der Aussage entspricht.

b) Bestimmt das Maß des Winkels *ADC*.

c) Beweist, dass $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BAO + \sphericalangle ABO$.

11. In der nebenstehenden Konfiguration ist *B* ein Punkt auf der Winkelhalbierenden von *ADE*. Auf der Verlängerung der Seite *CD* des Dreiecks *ACD* bezeichnet man mit *E* den Punkt, für den $\sphericalangle DBE = 40^\circ$ gilt. Es ist bekannt, dass $\sphericalangle CAD = 32^\circ$ und $\sphericalangle ADC = 70^\circ$ ist.



a) Berechnet die Maße der Winkel *CDE, ACD* und *BEC*.

b) Bestimmt, ob die Geraden *AD* und *BE* parallel oder sekant verlaufen. Begründet.

12. Zwei der Außenwinkel eines Dreiecks haben die Maße 99° und 137°. Berechnet die Maße der Winkel des Dreiecks.

13. Bestimmt die Winkelmaße des Dreiecks *DEF*, wenn bekannt ist, dass $\sphericalangle D = \sphericalangle E$, und der Außenwinkel mit dem Scheitel in Punkt *F* das Maß von 100° hat.

14. Der Strahl *BD* ist die Winkelhalbierende des Winkels *ABC*, und die Parallele durch den Punkt *A* zur Gerade *BD* schneidet die Gerade *BC* im Punkt *E*.

a) Fertigt eine Zeichnung an, die den Daten der Aufgabe entspricht.

b) Beweist, dass $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle AEB$.

c) Für $\sphericalangle BAE = 78^\circ$ berechnet die Maße der Winkel des Dreiecks *ABE*.

15. Auf der Seite *AB* des Dreiecks *ABC* sei der Punkt *P*, sodass $\sphericalangle BCP = 2 \cdot \sphericalangle ACP$, $\sphericalangle APC = 116^\circ$ und $\sphericalangle B = 56^\circ$.

a) Berechnet die Maße der Winkel *BCP* und *CAP*.

b) Beweist, dass die Senkrechte im Punkt *B* auf *BC* parallel zur Geraden *AC* ist.

Minitest

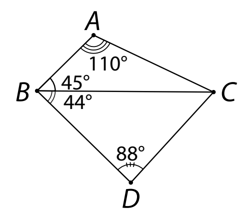
1. Die Punkte *M* und *N* liegen auf der Seite *BC* des Dreiecks ΔABC, $\sphericalangle BAC = 100^\circ$, $\sphericalangle AMB = 90^\circ$ und $\sphericalangle MAN = \sphericalangle CAN = 20^\circ$. Schreibt in eure Hefte ab und füllt die Lücken so aus, dass ihr wahre Aussagen erhaltet.

20 Pkte. **a)** Das Maß des Winkels *ABC* ist … ° .

20 Pkte. **b)** Ein Außenwinkel des Dreiecks *ABN* ist … .

20 Pkte. **c)** Die Berechnung des Maßes für den Winkel *ANC* ergibt … °.

30 Pkte. **2.** Die Strecke *BC* ist die gemeinsame Seite der Dreiecke *ABC* und *DBC*. Berechnet das Maß des Winkels *ACD* mithilfe der Notationen in der Zeichnung.



Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L3 Konstruktion von Dreiecken

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Bei einem Dreieck *ABC* können wir mit geometrischen Mitteln die Längen der drei Seiten und die Maße der drei Winkel messen.
Wir wollen herausfinden, wie viele der sechs Elemente wir brauchen, um ein Dreieck zu bilden.
Wir wissen, dass die Summe der Winkelmaße eines Dreiecks 180° ist, also genügt es, zwei Winkel zu kennen, um den dritten zu bestimmen.

Aufgabe 1. **a)** Prüft mithilfe der Tatsache, dass der Kreis alle Punkte enthält, die einen konstanten Abstand zu einem festen Punkt haben, ob es ein Dreieck MNP mit den Seiten $MN = 1$ cm, $NP = 2$ cm, $MP = 4$ cm gibt.

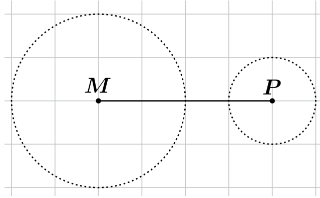
b) Prüft, ob es ein Dreieck QRS mit den Seiten $QR = 1$ cm, $RS = 2$ cm, $QS = 3$ cm gibt.

c) Prüft, ob es ein Dreieck DEF mit den Seiten $DE = 3$ cm, $DF = 2$ cm, $EF = 1{,}5$ cm gibt.

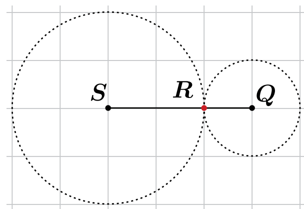
d) Berechnet die Summen $DE + EF$, $DF + EF$, $DE + DF$.

e) Vergleicht $DE + EF$ mit DF, vergleicht $DF + EF$ mit DE, dann vergleicht $DE + DF$ mit EF.

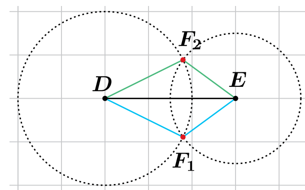
Lösung: **a)** Man kostruiert die Strecke $MP = 4$ cm. Wenn das Dreieck MNP existiert, dann ist N 1 cm von M und 2 cm von P entfernt. Daher würde N sowohl auf dem Kreis mit Mittelpunkt M und Radius 2 cm als auch auf dem Kreis mit Mittelpunkt P und Radius 1 cm liegen. Konstruiert die beiden Kreise und stellt fest, dass sie keine gemeinsamen Punkte haben.
Daraus folgt, dass *es keinen* Punkt in der Ebene auf beiden Kreisen gibt, weil *es kein* Dreieck gibt, in dem $MN + NP < MP$ ist.



b) Man konstruiert die Strecke $SQ = 3$ cm. Konstruiert man den Kreis mit dem Mittelpunkt S und dem Radius 2 und den Kreis mit dem Mittelpunkt Q und dem Radius 1, so schneiden sie sich im Punkt R, der auf der Gerade SQ liegt. Das heißt, es gibt kein Dreieck, in dem $SR + RQ = SQ$ ist.
$QR = 1$ cm, $RS = 2$ cm, $QS = 3$ cm, d. h., $QS = QR + RS$, folglich sind die Punkte Q, R, S kollinear, können also nicht Eckpunkte eines Dreiecks sein.



c) ***Schritt 1.*** Konstruiert die Strecke $DE = 3$ cm und die Kreise $C_1(D, 2\text{ cm})$ und $C_2(E, 1{,}5\text{ cm})$.
Schritt 2. Markiert mit F_1 und F_2 die Punkte, an denen sich die beiden Kreise schneiden.
Schritt 3. Zeichne die Seiten des Dreiecks DEF_1 oder DEF_2.
Jedes der Dreiecke DEF_1 und DEF_2 hat Seiten mit den erforderlichen Längen.
Schlussfolgerung: Man kann die Dreiecke DEF_1 und DEF_2 unter den gegebenen Bedingungen konstruieren.



d) $DE + EF = 4{,}5$ cm; $DF + EF = 3{,}5$ cm; $DE + DF = 5$ cm.

e) Mithilfe der Berechnungen in d) ergibt sich $DE + EF > DF$; $DF + EF > DE$; $DE + DF > EF$.

Lehrsatz (Dreiecksungleichung)
In einem Dreieck ist die Summe der Längen von zwei beliebigen Seiten größer als die Länge der dritten Seite.

Wenn das Dreieck ABC existiert, dann ist $AB + BC > AC$; $AB + AC > BC$; $AC + BC > AB$.
Wenn a, b, c positive Zahlen sind, sodass $a + b > c$; $a + c > b$; dann gibt es ein Dreieck, für das die Längen der Seiten a, b, c sind, ausgedrückt in der gleichen Längeneinheit.

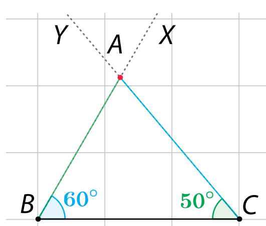
Bemerkung: Um zu prüfen, ob es ein Dreieck gibt, dessen Seitenlängen in derselben Einheit durch die positiven Zahlen $a < b < c$ ausgedrückt werden können, genügt es zu prüfen, ob $a + b > c$ ist.

Aufgabe 2. **a)** Konstruiert das Dreieck ABC mit $BC = 3$ cm, $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ und $\sphericalangle ACB = 50^\circ$.

b) Konstruiert das Dreieck MNP mit $MN = 3$ cm, $\sphericalangle NMP = 30^\circ$ und $MP = 2$ cm.

Lösung

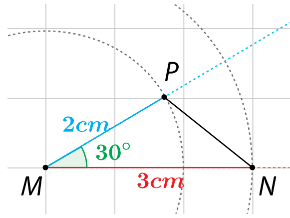
a) ***Schritt 1.*** Konstruiert die Strecke $BC = 3$ cm.
Schritt 2. Konstruiert auf derselben Seite der Geraden BC die Strahlen BX und CY, sodas $\sphericalangle CBX = 60^\circ$ und $\sphericalangle BCY = 50^\circ$.
Schritt 3. Notiert mit A den Punkt, in dem sich die Strahlen BX und CY schneiden. Dieser Punkt existiert, weil die Summe der Winkelmaße kleiner als 180° ist.
Schritt 4. Zeichnet die Seiten AB und AC.



b) ***Schritt 1.*** Man fixiert den Punkt *M* und konstruiert einen Winkel von 30° mit dem Scheitelpunkt *M*.

Schritt 2. Auf einer Seite des Winkels fixiert man den Punkt *N* so, dass $MN = 3$ cm ist, und auf der anderen Seite den Punkt *P* so, dass $MP = 2$ cm ist. Wir haben die Seiten *MN* und *MP* dargestellt.

Schritt 3. Zeichnet die Strecke NP, die die dritte Seite des Dreiecks darstellt.



Bei den Lösungen der Aufgaben 1 und 2 haben wir drei verschiedene Situationen gefunden, in denen es möglich ist, ein Dreieck zu konstruieren, wenn man nur drei der sechs Elemente kennt.

Wir merken uns

Ein Dreieck kann in einem der folgenden drei Fälle konstruiert werden:

1. Die Längen aller drei Seiten, für die die Ungleichheit des Dreiecks gilt, sind bekannt. (Fall **SSS**)
2. Die Längen von zwei Seiten und das Maß des Winkels zwischen ihnen sind bekannt. (Fall **SWS**)
3. Die Maße von zwei Winkeln, deren Summe der Maße kleiner als 180° ist, und die Länge der durch ihre Scheitelpunkte bestimmten Seite sind bekannt. (Fall **WSW**).

Bemerkungen: **1.** Für den SSS-Fall ist die Ungleichheit des Dreiecks wesentlich.
2. Wenn die Maße von zwei Winkeln bekannt sind, ist die Existenz des Dreiecks im WSW-Fall durch die Bedingung gewährleistet, dass ihre Summe kleiner als 180° ist, wobei das Maß des dritten Winkels dem Supplementwinkel der Summe der beiden Winkel entspricht.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Gelöste Aufgabe 1. Andreas und Christian wohnen in derselben Stadt und besuchen dieselbe Schule. Die Entfernung zwischen Andreas' Haus und der Schule beträgt 1500 m und die Entfernung zwischen Christians Haus und der Schule beträgt 1100 m. Andreas sagt, er wohne nicht weiter als 400 m von Christian entfernt.

a) Bestimmt, ob es möglich ist, dass der Abstand zwischen den Häusern der beiden Kollegen weniger als 400 m beträgt. Begründet eure Antwort.

b) Gebt an, in welchem Fall Andreas 400 m von Christian entfernt wohnt.

Lösung

a) *A, C, S* seien die Punkte, die den Häusern der beiden Kollegen und der Schule auf dem Stadtplan entsprechen. Dann ist $AS = 1500$ m und $CS = 1100$ m. Wenn *A, C, S* nicht kollinear sind, dann ist $AC + CS > AS$, d. h., $AC + 1100 > 1500$, also $AC > 400$. Die beiden Kollegen wohnen mehr als 400 m voneinander entfernt, d. h., Andrei wohnt nicht innerhalb einer Entfernung von 400 m.

b) Wenn die Punkte *A, C, S* kollinear sind, dann sind drei Ordnungsfälle möglich, von denen es für die Aufgabe relevant ist, ob *C* zwischen *A* und *S* liegt, d. h., $AC + CS = AS$, also $AC = 400$ m.

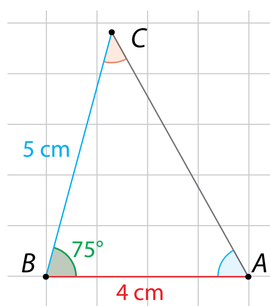
Gelöste Aufgabe 2.

a) Konstruiert ein Dreieck *ABC* mit $AB = 4$ cm, $\sphericalangle ABC = 75°$, $BC = 5$ cm.

b) Messt die anderen drei Elemente des konstruierten Dreiecks.

c) Schreibt die Winkel des Dreiecks in fallender Reihenfolge ihrer Maße auf.

d) Schreibt die Seiten des Dreiecks in fallender Reihenfolge ihrer Längen auf.



Lösung: **a)** Konstruiert einen Winkel *B* von 75°. Markiert auf den Schenkeln des Winkels die Punkte *A* und *C*, sodass $AB = 4$ cm und $AC = 5$ cm betragen. Zeichnet die Seite *AC*.

b) Messt die Winkel *A* und *C* mit dem Winkelmesser, dann messt die Seite *AC* mit dem Messlineal. Ihr erhaltet: $\sphericalangle BAC$ ist ungefähr 61°, $\sphericalangle ACB$ ist ungefähr 44° und *AC* ist ungefähr 5,5 cm.

c) $\sphericalangle B > \sphericalangle A > \sphericalangle C$.

d) $AC > BC > AB$.

Schlussfolgerung: In jedem Dreieck steht dem größeren Winkel die größere Seite und dem kleineren Winkel die kleinere Seite gegenüber.
In jedem Dreieck steht der größeren Seite der größere Winkel und der kleineren Seite der kleinere Winkel gegenüber.

Übungen und Aufgaben

1. Stellt die nicht kollinearen Punkte A, B, C so dar, dass $AB = 3$ cm, $\sphericalangle ABC = 50°$, $BC = 4$ cm.

2. Konstruiert mithilfe geometrischer Instrumente das Dreieck ABC, in dem:
a) $AB = 4$ cm, $\sphericalangle ABC = 75°$, $BC = 5$ cm;
b) $\sphericalangle ABC = 50°$, $BC = 6$ cm, $\sphericalangle ACB = 60°$;
c) $AB = 7$ cm, $BC = 9$ cm, $AC = 12$ cm.

3. Es seien die Strecken $DE = 5$ cm und $EF = 8$ cm. Zeichnet das Dreieck DEF für $\sphericalangle DEF \in \{30°, 90°, 120°\}$.

4. Die Strecke MN ist 6 cm lang. Konstruiert das Dreieck MNP, wenn bekannt ist, dass $\sphericalangle MNP = 80°$ und $\sphericalangle NMP = 65°$.

5. Ein gleichschenkliges Dreieck hat eine Seitenlänge von 4 cm und eine Seitenlänge von 7 cm. Konstruiert das Dreieck unter Berücksichtigung aller möglichen Fälle.

6. Konstruiert ein gleichseitiges Dreieck mit einem Umfang von 0,24 m.

7. Zwei Winkel haben die Maße von 87° bzw. 63°. Berechnet das Maß des dritten Winkels, sodass ein Dreieck konstruiert werden kann, dessen Winkel diese Maße haben.

8. Konstruiert ein Dreieck mit den Winkelmaßen 40°, 75° und 65°. Entscheidet, ob es einzigartig ist.

9. Gebt an, in welcher der folgenden Situationen das Dreieck ABC nicht konstruiert werden kann, und begründet eure Wahl.
a) $\sphericalangle A = 120°$, $AB = 5$ cm, $\sphericalangle B = 60°$;
b) $\sphericalangle B = 88°$, $BC = 7$ cm, $\sphericalangle C = 77°$;
c) $AB = 11$ cm, $BC = 11$ cm, $AC = 22$ cm;
d) $AB = BC = 0{,}5$ dm, $AC = 9$ cm.

10. Wir betrachten die Strecken $AB = 5$ cm, $CD = 7$ cm, $EF = n$ cm, $n \in \mathbb{N}$.
Bestimmt den kleinsten und den größten Wert, den n annehmen kann, damit ein Dreieck mit diesen Strecken konstruiert werden kann.

11. Konstruiert ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis BC, wobei $\sphericalangle A = 90°$ und $AB = 4{,}5$ cm.

12. **a)** Es sei das Dreieck MNP mit $MN = 6$ cm, $NP = 10$ cm, $MP = 8$ cm. Schreibt die Winkel des Dreiecks in steigender Reihenfolge ihrer Maße auf.
b) Es sei das Dreieck DEF mit $\sphericalangle D = 72°$, $\sphericalangle E = 48°$. Schreibt die Seiten des Dreiecks in fallender Reihenfolge ihrer Längen auf.

Minitest

20 Pkte. **1.** Konstruiert das Dreieck ABC mit $AB = 3$ cm, $\sphericalangle A = 105°$, $AC = 5$ cm.

30 Pkte. **2.** Konstruiert das gleichschenklige Dreieck DEF mit $DE = 4$ cm und $EF = 10$ cm.

40 Pkte. **3.** Für das Dreieck ABC gilt: $\sphericalangle A = 50°$, $\sphericalangle B = 88°$, $AB = 15$ cm. Füllt das entsprechende Feld mit dem Buchstaben ***W*** aus, wenn die Aussage wahr ist, und mit ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

Aussage	*W/F*
$\sphericalangle C = 31°$	
$AC > BC$	

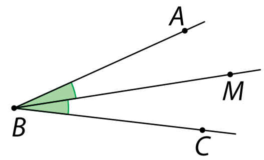
Aussage	*W/F*
$AC < 15$ cm	
$U_{ABC} > 45$ cm	

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

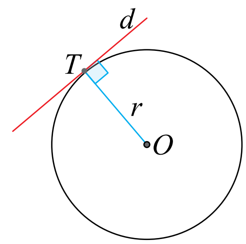
6.2 Wichtige Linien im Dreieck

L1 Die Winkelhalbierenden der Winkel eines Dreiecks. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Zur Erinnerung



Wenn $\sphericalangle ABC$ ein eigentlicher Winkel ist und $M \in Int(\sphericalangle ABC)$ sodass $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MBC$, dann ist der Strahl *BM* die Winkelhalbierende des Winkels *ABC*.
Wenn $\sphericalangle ABC$ ein eigentlicher Winkel ist und *BM* die Winkelhalbierende des Winkels *ABC* ist, dann ist $M \in Int(\sphericalangle ABC)$ und $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MBC$.



Die Gerade *d* ist Tangente im Punkt *T* an den Kreis $C(O, r)$, wenn $d \cap C(O, r) = \{T\}$.
Wenn *d* den Kreis im Punkt *T* tangiert, dann ist $OT \perp d$.

Der Abstand vom Mittelpunkt des Kreises zu einer Tangente an den Kreis ist gleich dem *Radius des Kreises*.

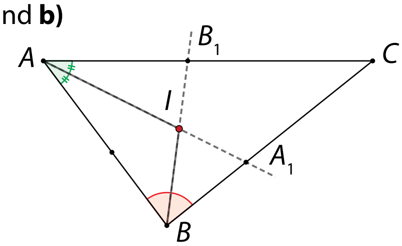
Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Anwendung 1. Stellt ein Dreieck ABC dar.

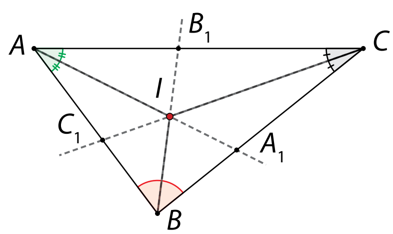
a) Konstruiert die Winkelhalbierende AA_1 des Winkels *BAC*, $A_1 \in BC$, und die Winkelhalbierende BB_1 des Winkels *ABC*, $B_1 \in AC$.
b) Beschriftet mit *I* den Punkt, in dem sich AA_1 und BB_1 schneiden.
c) Konstruiert den Strahl *CI* und bezeichnet mit C_1 den Punkt, in dem er die Seite *AB* schneidet.
d) Messt die Winkel *ACI* und *BCI* und stellt den Zusammenhang zwischen ihren Maßen her.

Lösung

a) und **b)**



c)



d) Aus der Messung ergibt sich intuitiv, dass, wenn AA_1 und BB_1 die Winkelhalbierenden der Winkel *A* bzw. *B* des Dreiecks *ABC* sind, dann ist $\sphericalangle ACI = \sphericalangle BCI$, d. h., der Strahl *CI* ist die Winkelhalbierende des Winkels *C*.

Wir merken uns

Für jedwelches Dreieck *ABC schneiden sich* die *Winkelhalbierenden* seiner Winkel in einem Punkt, der gewöhnlich mit *I* bezeichnet wird.

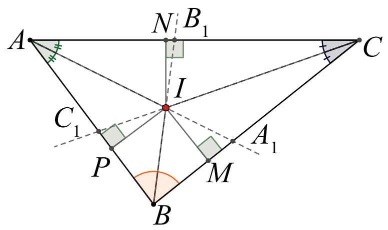
Wenn AA_1, BB_1, CC_1 die Winkelhalbierenden der Winkel *A*, *B* bzw. *C*, sind, dann existiert *I*, sodass $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{I\}$.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 2. **a)** Zeichnet ein Dreieck *ABC*, dann die Winkelhalbierenden AA_1, BB_1, CC_1. Beschriftet den Punkt, in dem sich die Winkelhalbierenden schneiden, mit *I*.
b) Konstruiert $IM \perp BC$, $IN \perp AC$, $IP \perp AB$, $M \in BC$, $N \in AC$, $P \in AB$.
c) Messt die Strecken *IM*, *IN*, *IP* und entscheidet, ob der Punkt *I* von den drei Seiten des Dreiecks *ABC* gleich weit entfernt ist.
d) Konstruiert den Kreis mit dem Mittelpunkt *I* und dem Radius *IM*.

Lösung

a) und **b)**



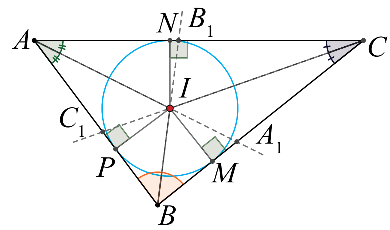
c) Die Messung der Strecken ergibt:

IM = *IN* = *IP*, also sind die Punkte *M*, *N*, *P* von *I* gleich weit entfernt.

Dann enthält der Kreis *C*(*I*, *IM*) die Punkte *N* und *P*.

Die Seiten des Dreiecks *ABC* sind *Tangenten* an den Kreis *C*(*I*, *IM*).

d)



Wir merken uns

In jedem Dreieck *ABC* ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, bezeichnet mit *I*, gleich weit von seinen Seiten entfernt.
Der Kreis *C*(*I*, *r*), wobei *r* der Abstand von *I* zu einer Seite des Dreiecks ist, wird als Inkreis des Dreiecks *ABC* bezeichnet.
Die drei Seiten des Dreiecks sind Tangenten an den Kreis *C*(*I*, *r*).

Übungen und Aufgaben

1. Stellt das Dreieck *ABC* dar und zeichnet dann die Winkelhalbierenden ein, wenn das Dreieck *ABC*:
a) ein spitzwinkliges Dreieck ist;
b) ein rechtwinkliges Dreieck ist;
c) ein stumpfwinkliges Dreieck ist.

2. Stellt das Dreieck *DEF* dar und zeichnet dann die Winkelhalbierenden ein, wenn das Dreieck *DEF*:
a) ein gleichschenkliges Dreieck ist;
b) ein gleichseitiges Dreieck ist;
c) ein beliebiges Dreieck ist.

3. Es sei das Dreieck *MNP* und *MS* die Winkelhalbierende des Winkels *NMP*, $S \in NP$.
a) Wenn $\sphericalangle NMP = 100°$, berechnet die Maße der Winkel *NMS* und *PMS*.
b) Wenn $\sphericalangle SMN = 40°30'$, berechnet die Maße der Winkel *SMP* und *NMP*.

4. Es sei das Dreieck *ABC* und *I* ein Punkt im Inneren des Dreiecks.
Übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken so aus, dass ihr wahre Aussagen erhaltet:
a) Wenn *AI* die Winkelhalbierende des Winkels *BAC* ist, *BI* die Winkelhalbierende des Winkels *ABC* ist, dann ist *CI* … .
b) Wenn $\sphericalangle BAI \equiv \sphericalangle CAI$ und $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle ABI$, dann ist $\sphericalangle ACI \ldots \sphericalangle BCI$.

5. Es sei das Dreieck *DEF*, in dem $\sphericalangle D = 68°$, $\sphericalangle E = 86°$ und *FM* die Winkelhalbierende des Winkels *DFE* ist, $M \in DE$.
a) Berechnet die Maße der Winkel *DFE, DFM* und *EFM*.
b) Zeigt, dass das Dreieck *DMF* stumpfwinklig ist.

6. Auf der Seite *BC* des Dreiecks *ABC* wird der Punkt *D* so angenommen, dass $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$.
Wenn $\sphericalangle BAD = 44°$, $\sphericalangle ADC = 117°$, bestimmt die Maße der Winkel des Dreiecks *ABC*.

7. Die Dreiecke *ABC* und *DBC* haben die Spitzen *A* und *D* auf verschiedenen Seiten bezüglich der Geraden *BC*. Da wir wissen, dass $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DCB$ und dass AD die Winkelhalbierende des Winkels *BAC* ist, beweist, dass *DA* die Winkelhalbierende des Winkels *BDC* ist.

8. Es sei *I* der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks *MNP*.
a) Wenn $\sphericalangle IMP = 31°$, $\sphericalangle INM = 29°$, berechnet die Maße der Winkel des Dreiecks *MNP*.
b) Wenn $\sphericalangle MNP = 80°$, $\sphericalangle IMP = 34°$, berechnet die Maße der Winkel *MPN* und *MIP*.

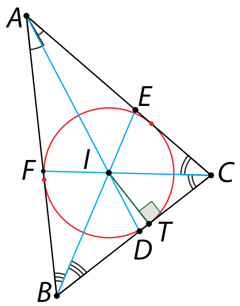
9. Das Dreieck *ABC* ist rechtwinklig mit $\sphericalangle BAC = 90°$. Berechnet das Maß des stumpfen Winkels, der durch die Winkelhalbierenden der Winkel *ABC* und *ACB* gebildet wird.

10. **a)** Konstruiert das Dreieck *ABC* mit $\sphericalangle A = 30°$, $\sphericalangle B = 60°$, $AB = 8$ cm.
b) Konstruiert die Winkelhalbierenden der Winkel des Dreiecks *ABC*, markiert den Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks und zeichnet diesen Kreis.

Minitest

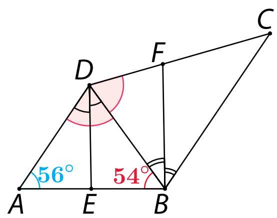
1. Betrachtet die folgende Anordnung und schreibt in das freie Feld den Buchstaben ***W***, wenn die Aussage wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

5 × 6 Pkte.



	Aussage	***W/F***
a)	*AD* ist die Winkelhalbierende des Winkels *BAC* des Dreiecks *ABC*.	
b)	*I* ist der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks *ABC*.	
c)	Die Winkelhalbierende des Winkels *ABC* enthält den Punkt *I*.	
d)	Die Winkelhalbierenden der Winkel des Dreiecks *ABC* schneiden sich nicht.	
e)	*IT* ist der Radius des Inkreises des Dreiecks *ABC*.	
f)	$\sphericalangle BAC = 2 \cdot \sphericalangle BIC$.	

2. In der nebenstehenden Zeichnung ist eine Skizze des Grundstücks *ABCD* dargestellt. Der Strahl *DE* ist die Winkelhalbierende des Winkels *ADB*, der Strahl *BF* ist die Winkelhalbierende des Winkels *CBD*, $\sphericalangle DAB = 56°$, $\sphericalangle ABD = 54°$. Die Winkel *ADB* und *BDC* sind kongruent, die Geraden *DE* und *BF* sind parallel.



30 Pkte. **a)** Bestimmt die Maße der Winkel *ADB, BDE* und *BCD*.

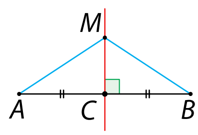
30 Pkte. **b)** Bestimmt und begründet, ob *BD* die Winkelhalbierende des Winkels *ABC* ist.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

Zur Erinnerung

Definition. Die Gerade, die senkrecht zu *AB* verläuft und deren Mitte enthält, wird als Mittelsenkrechte der Strecke *AB* bezeichnet.



Wir haben durch Messungen herausgefunden, dass *die Mittelsenkrechte* einer Strecke die Menge der Punkte in der Ebene ist, *die gleich weit* von den Enden der Strecke *entfernt sind*.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 1. Stellt ein beliebiges Dreieck *ABC* dar.

a) Konstruiert die Mittelsenkrechte d_1 der Seite *BC* und die Mittelsenkrechte d_2 der Seite *AC*. Bezeichnet $\{M\} = d_1 \cap BC$ und $\{N\} = d_2 \cap AC$.

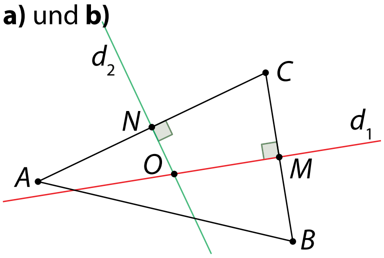
b) Bezeichnet mit *O* den Punkt, in dem sich d_1 und d_2 schneiden.

c) Konstruiert die Gerade d_3, die von *O* senkrecht zur Seite *AB* verläuft, und bezeichnet $\{P\} = d_3 \cap AB$.

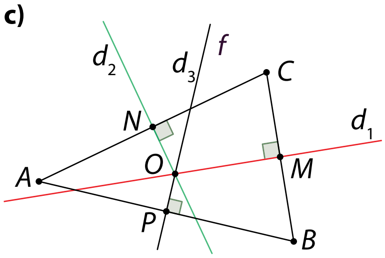
d) Messt die Strecken *PA* und *PB* und entscheidet, ob d_3 die Mittelsenkrechte der Seite *AB* ist.

Lösung

a) und **b)**



c)



d) Die Mittelsenkrechten d_1 und d_2 der Seiten *BC* bzw. *AC* schneiden sich im Punkt *O* (ihre Parallelität impliziert die Kollinearität der Punkte *A, B* und *C*).

Wir überprüfen durch Messung, dass die Senkrechte von *O* zu *AB* die Mitte der Strecke *AB* enthält, also ist d_3 die Mittelsenkrechte der Seite *AB*.

Wir merken uns

Für jedwelches Dreieck *ABC* gilt, dass sich *die Mittelsenkrechten* seiner Seiten *in einem Punkt schneiden*, der gewöhnlich mit *O* bezeichnet wird.	Wenn d_1, d_2, d_3 die Mittelsenkrechten der Seiten *BC*, *AC*, *AB* sind, dann gibt es *O*, sodass $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{O\}$.

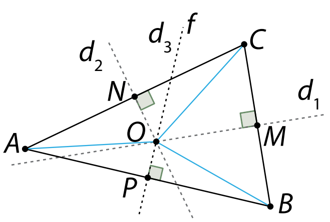
Anwendung 2. **a)** Zeichnet ein *spitzwinkliges* Dreieck *ABC*, dann die Mittelsenkrechten d_1, d_2, d_3. Beschriftet den Punkt, in dem sich die Mittelsenkrechten schneiden, mit *O*.

b) Messt die Entfernungen *OA, OB, OC* und entscheidet, ob der Punkt *O* von den drei Spitzen des Dreiecks *ABC* gleich weit entfernt ist.

c) Konstruiert den Kreis mit dem Mittelpunkt *O* und dem Radius *OA*, den sogenannten *Umkreis* des Dreiecks *ABC*.

d) Bestimmt intuitiv, ob der Punkt *O*, der Mittelpunkt des Umkreises, im Inneren des Dreiecks *ABC* liegt.

Lösung: **a)**



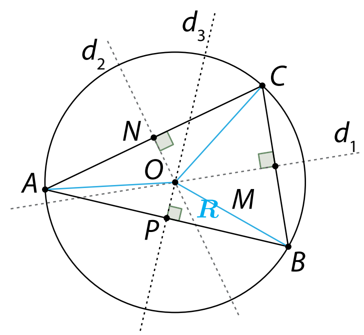
b)

OA = *OB* = *OC*, also sind die Punkte *A*, *B*, *C* von *O* gleich weit entfernt.

Dann enthält der Kreis *C*(*O*, *OA*) die Punkte *B* und *C*.

Die Seiten des Dreiecks *ABC* sind *Sehnen* des Kreises *C*(*O*, *OA*).

c)



d) *Der Mittelpunkt des Umkreises* des spitzwinkligen Dreiecks *ABC* befindet sich im Inneren des Dreiecks: $O \in \text{Int}(\Delta ABC)$.

Wir merken uns

In jedem Dreieck *ABC* ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, bezeichnet mit *O*, von den Spitzen des Dreiecks gleich weit entfernt.
Der Kreis *C*(*O, R*), wobei *R* der Abstand von *O* zu einer Ecke des Dreiecks ist, wird als *Umkreis* des Dreiecks *ABC* bezeichnet.
Die drei Seiten des Dreiecks sind Sehnen des Umkreises.

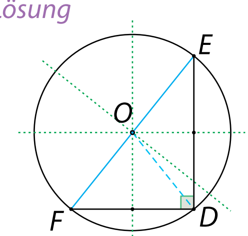
Anwendung 3

a) Konstruiert die Mittelsenkrechten der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks *DEF*, $\sphericalangle D = 90^\circ$.

b) Bestimmt intuitiv die Lage des Punktes *O*, des Schnittpunkts der Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks. Leitet ab, dass *O* der Mittelpunkt der Seite *EF* ist, d. h. der Mittelpunkt der Hypotenuse.

c) Konstruiert *den Umkreis* des Dreiecks *DEF*.

Lösung



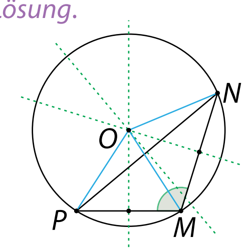
Anwendung 4

a) Konstruiert die Mittelsenkrechten der Seiten des stumpfwinkligen Dreiecks MNP, $\sphericalangle M > 90^\circ$.

b) Bestimmt intuitiv die Lage des Punktes O, des Schnittpunkts der Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks. Leitet daraus ab, dass O *außerhalb des* Dreiecks MNP liegt.

c) Konstruiert den Umkreis des Dreiecks MNP.

Lösung.



Schlussfolgerung

1. Wenn ABC ein *spitzwinkliges Dreieck* ist, dann liegt der Mittelpunkt des Umkreises im Inneren des Dreiecks.
2. Wenn ABC ein *rechtwinkliges Dreieck* ist, dann fällt der Mittelpunkt des Umkreises in den Mittelpunkt der Hypotenuse des Dreiecks.
3. Wenn ABC *ein stumpfwinkliges Dreieck* ist, dann liegt der Mittelpunkt des Umkreises *außerhalb des* Dreiecks.

Übungen und Aufgaben

1. **a)** Zeichnet eine Strecke AB von 4 cm und konstruiert mit dem Lineal und dem Zeichendreieck die Mittelsenkrechte der Strecke.
b) Zeichnet eine Strecke CD und konstruiert mit dem Lineal und dem Zirkel die Mittelsenkrechte der Strecke.

2. Zeichnet die Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks ABC in jedem der Fälle:
a) das Dreieck ABC ist spitzwinklig;
b) das Dreieck ABC ist rechtwinklig;
c) das Dreieck ABC ist stumpfwinklig.

3. Zeichnet die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks DEF, wenn es:
a) ein gleichschenkliges Dreieck ist;
b) ein gleichseitiges Dreieck ist;
c) ein beliebiges Dreieck ist.

4. Konstruiert das Dreieck ABC, die Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks und den Umkreis für jede der Situationen:
a) $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm, $\sphericalangle A = 60^\circ$;
b) $BC = 6$ cm, $\sphericalangle B = 50^\circ$, $\sphericalangle C = 100^\circ$;
c) $AB = BC = AC = 10$ cm.

5. Im Dreieck DEF ist $DE = 5$ cm, DM ist die Mittelsenkrechte der Seite EF, $M \in EF$, $FM = 3$ cm, $DM = 4$ cm.
a) Messt die Länge der Seite DF.
b) Berechnet den Umfang des Dreiecks DEF.

6. Sei das rechtwinklige Dreieck ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, und sei der Punkt P der Symmetriepunkt von B in Bezug auf die Gerade AC. Prüft, ob die Gerade AC die Mittelsenkrechte der Seite BP des Dreiecks BCP ist.

7. Im Dreieck ABC schneiden sich die Mittelsenkrechten der Seiten AB und BC im Punkt O. Das Dreieck BOC ist gleichseitig und hat einen Umfang von 30 cm. Findet die Länge der Strecke AO.

8. Konstruiert ein Dreieck ABC, bei dem $AB = 5$ cm ist und der Punkt C in der Mitte der Strecke AB liegt, 6 cm von der Geraden AB entfernt.

9. Die Mittelsenkrechte der Seite MN des Dreiecks MNP schneidet die Seite MP im Punkt A und die Seite NP im Punkt B.
a) Prüft durch Messung, ob die Dreiecke AMN und BMN gleichschenklig sind.
b) Wenn $U_{AMN} = 24$ cm und $U_{BMN} = 28$ cm, beweist, dass $AB > 2$ cm ist.

Minitest

1. Füllt die Lücken so aus, dass ihr richtige Aussagen erhaltet.

10 Pkte. A_1: Jeder Punkt auf der Mittelsenkrechten einer Strecke ist von den Endpunkten der Strecke … entfernt.

10 Pkte. A_2: Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks sind … .

10 Pkte. A_3: Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks wird … genannt und ist von den Eckpunkten des Dreiecks … entfernt.

10 Pkte. A_4: Der Kreis, der die Eckpunkte eines Dreiecks enthält, wird … genannt.

2. Sei xOy ein Winkel und die Punkte A, B mit $A \in Ox$, $B \in Oy$. Die Mittelsenkrechten der Strecken OA und OB schneiden sich im Punkt C. Begründet folgende Aussagen.

25 Pkte. **a)** Das Dreieck ACO ist gleichschenklig.

25 Pkte. **b)** Der Punkt C ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABO.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

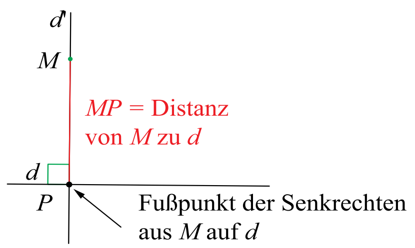
L3 Die Höhen im Dreieck. Der Schnittpunkt der Höhen

Zur Erinnerung

Zwei Geraden stehen *senkrecht* aufeinander, wenn sie einen *rechten Winkel* bilden.

Wenn M ein Punkt außerhalb der Geraden d ist, ist die Distanz von dem Punkt M zur Geraden d die Länge der Strecke MP, wobei P der Fußpunkt der Senkrechten aus M auf d ist.

Wenn $M \in d$, ist die Distanz von M zu d gleich 0.



Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

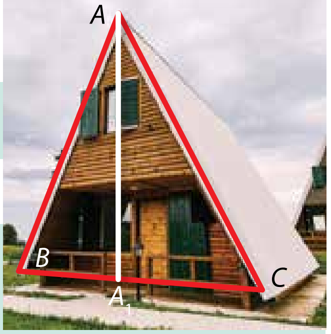
Die Fassade der nebenstehend abgebildeten Hütte hat die Form eines Dreiecks.

Wenn wir erfahren wollen, wie hoch die Hütte ist, können wir die Distanz von der Spitze des Dreiecks zu seiner Grundlinie messen, also die *Höhe des Dreiecks* erfahren.

Definition. Die *Höhe* eines Dreiecks ABC ist die positive Zahl, die der Distanz von einer der Spitzen des Dreiecks zur gegenüberliegenden Seite entspricht.

Indem wir die Definition der Entfernung eines Punktes zu einer Geraden verwenden, können wir wie folgt umformulieren:

Die *Höhe* eines Dreiecks ist die *Länge der Strecke*, die eine Spitze des Dreiecks mit dem Fußpunkt der Senkrechten aus dem Punkt auf die gegenüberliegende Seite verbindet.

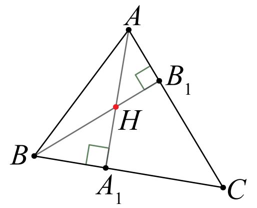


Bemerkung: Wir verwenden den Begriff *Höhe* des Dreiecks sowohl für die *Strecke* zwischen einer Spitze des Dreiecks und dem Fußpunkt der Senkrechten aus der Spitze auf die gegenüberliegende Seite als auch für die Länge dieser Strecke. Aus dem Kontext können wir entnehmen, ob es um die Höhe als Strecke oder als Längenmaß geht.

In der Abbildung ist $AA_1 \perp BC$, folglich ist eine Höhe des Dreiecks die *Strecke* AA_1, aber auch die *Länge der Strecke* AA_1, also die Entfernung von der Spitze A zur gegenüberliegenden Seite BC.
Um die Höhen eines Dreiecks zu zeichnen, verwenden wir eine der Methoden der Konstruktion einer Senkrechten aus einem Punkt auf eine gegebene Gerade, sei es mithilfe des Geodreiecks oder mit dem Zirkel und dem Lineal.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 1

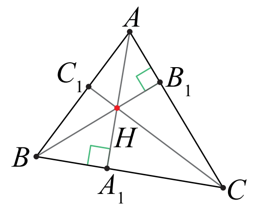


Gegeben ist das beliebige Dreieck ABC.

a) Konstruiert mithilfe des rechten Winkels des Geodreiecks $AA_1 \perp BC$, $A_1 \in BC$, danach $BB_1 \perp AC$, $B_1 \in AC$. Bezeichnet mit H den Punkt, in dem die Geraden AA_1 und BB_1 sich schneiden.

b) Konstruiert die Gerade CH und bezeichnet mit C_1 den Punkt, in dem diese die Seite AB schneidet.

c) Messt den Winkel CC_1A oder CC_1B und bestimmt, ob $CC_1 \perp AB$.

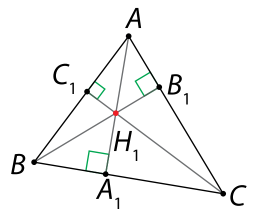


Lösung: **c)** $\sphericalangle CC_1A = \sphericalangle BC_1C = 90^\circ$, folglich $CC_1 \perp AB$, also ist CC_1 eine Höhe des Dreiecks.

Wir merken uns

In jedem Dreieck ABC *schneiden sich* die Unterstützungsgeraden seiner *Höhen* in einem Punkt, der *Orthozentrum* (Höhenschnittpunkt) genannt und in der Regel mit H bezeichnet wird.
Wenn AA_1, BB_1, CC_1 die Höhen des Dreiecks sind, dann existiert H, sodass $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{H\}$.

Unter Verwendung der geometrischen Darstellung der Höhen im *spitzwinkligen Dreieck ABC*, die sich im *Orthozentrum H* schneiden, leitet intuitiv ab, dass das Orthozentrum zum Inneren des Dreiecks ABC gehört.

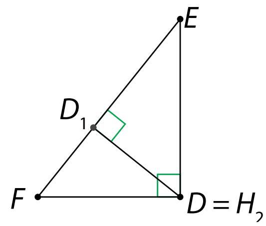


Wenn das ΔABC spitzwinklig und H_1 das Orthozentrum (der Höhenschnittpunkt) des Dreiecks ist, dann $H_1 \in \mathrm{Int}(\Delta ABC)$.

Anwendung 2

a) Konstruiert die Höhen des *rechtwinkligen Dreiecks DEF*, $\sphericalangle D = 90^\circ$. Bezeichnet mit H_2 den Höhenschnittpunkt.

b) Bestimmt intuitiv die Lage des Höhenschnittpunkts H_2. Schlussfolgert, dass der *Höhenschnittpunkt* mit dem Scheitel des rechten Winkels des Dreiecks DEF übereinstimmt.



Lösung

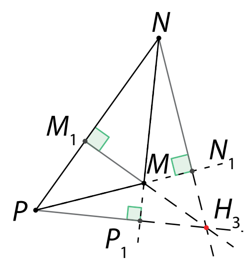
a) Im Dreieck DEF ist ED die Höhe aus E, FD ist die Höhe aus F. Wenn DD_1 die Höhe aus D_1 ist, $DD_1 \cap ED \cap FD = \{H_2\} = \{D\}$.

b) H_2 fällt mit D zusammen.

Anwendung 3

a) Konstruiert die Höhen des *stumpfwinkligen Dreiecks MNP*, $\sphericalangle M > 90°$. Bezeichnet mit H_3 den Höhenschnittpunkt.

b) Bestimmt intuitiv die Lage des Punktes H_3. Schlussfolgert, dass der *Höhenschnittpunkt* sich außerhalb des Dreiecks befindet.



Lösung

a) Im Dreieck MNP sind die Höhen aus N, P und M die Strecken: NN_1, PP_1 bzw. MM_1, und ihre Unterstützungsgeraden schneiden sich in H_3. $MM_1 \cap NN_1 \cap PP_1 = \{H_3\}$.

b) Wir stellen fest, dass $H_3 \in \mathrm{Ext}(\Delta ABC)$.

Wir merken uns

1. In einem *sptizwinkligen* Dreieck befindet sich der Höhenschnittpunkt im *Inneren* des Dreiecks.
2. In einem *rechtwinkligen* Dreieck fällt der Höhenschnittpunkt mit dem Scheitel des rechten Winkels zusammen.
3. In einem *stumpfwinkligen* Dreieck befindet sich der Höhenschnittpunkt *außerhalb* des Dreiecks.

Übungen und Aufgaben

1. Stellt je ein Dreieck dar und zeichnet die Höhen mithilfe der geometrischen Instrumente für jeden der Fälle:
a) Das Dreieck ist spitzwinklig.
b) Das Dreieck ist rechtwinklig.
c) Das Dreieck ist stumpfwinklig.

2. Übertragt die Aussagen ins Heft und ergänzt sie richtig.
A_1: Der Höhenschnittpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks befindet sich im … des Dreiecks.
A_2: Der Höhenschnittpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks fällt mit dem … zusammen.
A_3: Der Höhenschnittpunkt eines stumpfwinkligen Dreiecks befindet sich … des Dreiecks.

3. **a)** Konstruiert das Dreieck ABC mit $AB = 6$ cm, $\sphericalangle ABC = 55^\circ$, $BC = 7$ cm.
b) Konstruiert die Höhen AM, BN und CP des Dreiecks ABC mithilfe des Geodreiecks und bezeichnet den Höhenschnittpunkt mit H.
c) Übertragt die Tabelle in eure Hefte und schreibt in die leeren Kästchen den Buchstaben ***W***, wenn die Aussage wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

Aussage	***W/F***
M ist der Fußpunkt der Senkrechten aus A auf BC.	
$AN \perp BC$.	
$\sphericalangle CPA = 90^\circ$.	
$AM \cap BN \cap CP = \{H\}$.	

4. Auf der Seite EF des Dreiecks DEF, mit $\sphericalangle DEF = 65^\circ$, wird der Punkt L angenommen, sodass $\sphericalangle EDL = 25^\circ$. Beweist, dass die Strecke DL eine Höhe des Dreiecks DEF ist.

5. Konstruiert das stumpfwinklige Dreieck ABC mit $\sphericalangle BAC > 90^\circ$. Stellt die Höhen BM und CN des Dreiecks dar und bezeichnet ihren Schnittpunkt mit H. Zeigt, dass:
a) $AH \perp BC$;
b) $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACN$.

6. Das Dreieick MNP ist rechtwinklig, $\sphericalangle MNP = 90^\circ$, und A ist ein Punkt auf der Seite MN. Die Senkrechte aus A auf MP schneidet NP in B. Zeigt, dass A der Höhenschnittpunkt des Dreiecks BMP ist.

7. Sei das Dreieck ABC mit $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ und der Höhe AD.
a) Zeigt, dass die Winkel ABD und CAD kongruent sind.
b) Bestimmt für $\sphericalangle CAD = 28^\circ$ die Maße der Winkel des Dreiecks ABD.

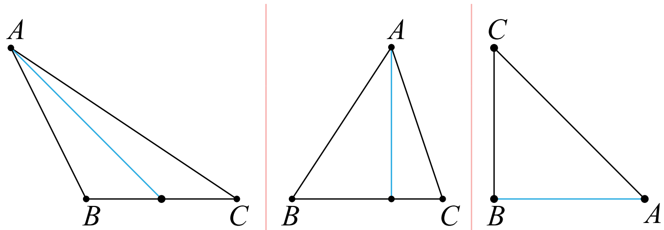
8. Zeichnet ein Dreieck DEF mit $\sphericalangle D = 57^\circ$ und $\sphericalangle E = 75^\circ$.
a) Berechnet die Maße der Winkel, die die Seiten des Dreiecks mit der Höhe DM bilden.
b) Bestimmt das Maß des spitzen Winkels, der von den Höhen EN und FP gebildet wird.

9. Im stumpfwinkligen Dreieck ABC mit $\sphericalangle ACB = 120^\circ$ ist AD die Höhe des Dreiecks und $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CAD$.
a) Erstellt eine Zeichnung entsprechend den Angaben.
b) Beweist, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

10. Es sei das Dreieck ABC mit $\sphericalangle B = 45^\circ$, $\sphericalangle C = 60^\circ$ und AD ist die Höhe des Dreiecks.
a) Berechnet die Maße der Winkel BAD und CAD.
b) Konstruiert das Dreieck ABC, wenn bekannt ist, dass $AD = 5$ cm. Beschreibt alle Etappen, die ihr in der Erstellung der Konstruktion durchlaufen habt.

Minitest

30 Pkte. **1.** Die blau gefärbte Strecke ist keine Höhe im Dreieck ABC in der Zeichnung:
A. a); **B.** b); **C.** c); **D.** b) und c)



a) b) c)

60 Pkte. **2.** Im Dreieck ABC, $\sphericalangle ABC = 50^\circ$, $\sphericalangle ACB = 70^\circ$, ist AD die Höhe des Dreiecks, $E \in BC$, und AE ist die Winkelhalbierende des Winkels BAC, $E \in BC$. Bestimmt das Maß des Winkels DAE.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L4 Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

Zur Erinnerung

Der Mittelpunkt der Strecke AB ist der Punkt M, der sich auf der Strecke AB in gleicher Entfernung von den Endpunkten befindet. ($AM = MB$).

Wenn M auf der Strecke AB liegt und $MA \equiv MB$, dann ist M deren Mitte.

Wenn $AB = 20$ cm und M die Mitte der Strecke AB ist, dann ist $AM = MB = 10$ cm.
Wenn $AB = 20$ cm und $AM = MB = 10$ cm ist, dann ist M die Mitte der Strecke AB.

Wenn M die Mitte der Strecke AB ist, dann sind A und B symmetrisch in Bezug auf M.

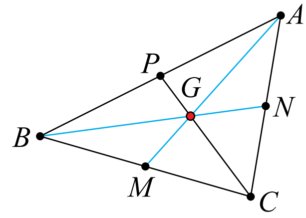
Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Definition. *Die Seitenhalbierende* eines Dreiecks ist die Strecke, die durch einen Eckpunkt des Dreiecks und die Mitte der gegenüberliegenden Seite bestimmt wird.

Anwendung 1. **a)** Stellt ein Dreieck ABC dar und zeichnet die Seitenhalbierenden AM und BN. Beschriftet ihren Schnittpunkt mit G.

b) Zeichnet den Strahl CG und markiert seinen Schnittpunkt mit der Seite AB mit P.

c) Messt mit dem Messlineal die Strecken PA und PB und bestimmt, ob AP der Schwerpunkt des Dreiecks ist.



Lösung: **c)** $PA = PB$, also ist CP die Seitenhalbierende des Dreiecks.

Wir merken uns

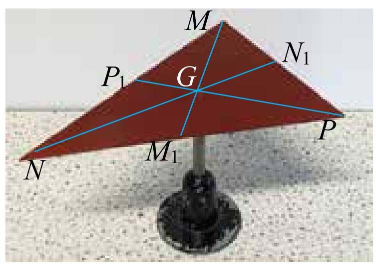
In jedem Dreieck *fallen die Seitenhalbierenden* in einem Punkt *zusammen*, der *Schwerpunkt* des Dreiecks genannt und in der Regel mit G bezeichnet wird.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 2

a) Schneidet eine dreieckige Fläche MNP aus Karton aus, zeichnet die Seitenhalbierenden MM_1, NN_1, PP_1 des Dreiecks ein und beschriftet mit G den Schwerpunkt des Dreiecks.

b) Versucht, die Schnittfläche in einer horizontalen Position zu halten, indem ihr sie nur auf dem Punkt G abstützt, wie in der Abbildung gezeigt.



Intuitiv ist der Schwerpunkt einer Fläche der Punkt, an dem die Fläche so abgestützt werden kann, dass sie in einer horizontalen Lage im Gleichgewicht bleibt.

In der Praxis ist die Kenntnis der Lage des Schwerpunkts einer homogenen Fläche für die Bestimmung ihres Gleichgewichts unerlässlich.

Übungen und Aufgaben

1. Zeichnet ein Dreieck und seine Seitenhalbierenden mithilfe der geometrischen Werkzeuge in jedem der Fälle:

a) Das Dreieck ist spitzwinklig.

b) Das Dreieck ist rechtwinklig.

c) Das Dreieck ist stumpfwinklig.

2. Im Dreieck ABC seien AD, BE die Seitenhalbierenden des Dreiecks und $AD \cap BE = \{G\}$. Übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken so aus, dass die Aussagen wahr sind.

A_1: Der Punkt D ist ... der Seite BC.
A_2: Wenn $AC = n \cdot AE$, dann ist n gleich … .
A_3: Der Punkt G wird … des Dreiecks ABC genannt.

3. Zeichnet das Dreieck ABC, seine Seitenhalbierenden AD, BE, CF und markiert den Schwerpunkt des Dreiecks mit G.

a) Messt die Längen der Strecken AD, AG, GD in Millimetern mit einem Messlineal. Füllt die folgende Tabelle mit den aus den Messungen gewonnenen Daten aus:

AD	AG	GD	$\frac{AG}{AD}$	$\frac{GD}{AD}$

b) Messt mit dem Messlineal die Strecken BD, BG, GE bzw. CF, CG, GF. Tragt die erhaltenen Daten in die folgende Tabelle ein:

BE	BG	GE	$\frac{BG}{BE}$	$\frac{GE}{BE}$
CF	CG	GF	$\frac{CG}{GF}$	$\frac{CF}{GF}$

c) Schreibt anhand der Ergebnisse eurer Messungen den Buchstaben ***W***, wenn die Aussage wahr ist, und den Buchstaben ***F***, wenn die Aussage falsch ist, in das leere Feld.

Aussage	***W/F***	Aussage	***W/F***
A_1: $AG = \frac{2}{3} \cdot AD$		A_3: $\frac{AG}{AD} = \frac{BG}{BE} = \frac{CG}{CF} = \frac{2}{3}$	
A_2: $BE = 2 \cdot GE$		A_4: $CF = 3 \cdot GF$	

Bemerkung: Aufgabe 3 bestätigt durch Messung das folgende wichtige Ergebnis, das später bewiesen wird: In jedem Dreieck liegt der *Schwerpunkt* auf jeder Seitenhalbierenden bei *zwei Dritteln von der Spitze* und *einem Drittel von der Grundlinie*.

4. Die Strecken AM, BN, CP sind die Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC, und der Punkt G ist der Schwerpunkt des Dreiecks. Berechnet anhand des obigen Ergebnisses:

a) die Längen der Strecken AG und GM, wenn $AM = 24$ cm.

b) die Länge der Strecke BN, wenn $BG = 12$ cm.

c) die Längen der Strecken CG und CP, wenn $GP = 4$ cm.

5. **a)** Konstruiert das rechtwinklige Dreieck DEF mit $\sphericalangle EDF = 90°$, $DE = 6$ cm, $DF = 8$ cm.

b) Konstruiert die der Hypotenuse EF entsprechende Seitenhalbierende DM und messt die Längen der Strecken DM und EF mit dem Messlineal.

c) Gebt an, welche der folgenden Beziehungen wahr ist:

A. $DM = EF$; **C.** $DM = \frac{EF}{3}$;

B. $DM = \frac{EF}{2}$; **D.** $DM = 2EF$.

6. Zeichnet einen Kreis mit dem Mittelpunkt O und markiert die Punkte A, B, C so, dass BC Durchmesser ist, auf dem Kreis.

a) Bestimmt das Maß des Winkels BAC mithilfe des Winkelmessers.

b) Leitet aus den Ergebnissen der Aufgaben 5 und 6 ab, ob die folgenden Aussagen stimmen:

- „In jedem rechtwinkligen Dreieck hat die Seitenhalbierende der Hypotenuse eine Länge, die der halben Länge der Hypotenuse entspricht."
- „Wenn die entsprechende Seitenhalbierende einer Seite die Hälfte der Länge dieser Seite ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig."

7. Die Dreiecke ABP und ABQ sind rechtwinklig, $\sphericalangle APB = \sphericalangle AQB = 90°$, und der Punkt C ist der Mittelpunkt der Strecke AB. Beweist, dass $CP \equiv CQ$.

Minitest

1. Betrachtet das Dreieck ABC. Übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken aus, um richtige Aussagen zu erhalten.

10 Pkte. **a)** Wenn der Punkt M die Mitte der Seite BC ist, dann ist AM ... des Dreiecks ... .

10 Pkte. **b)** Wenn BN die Seitenhalbierende des Dreiecks ABC ist, dann ist der Punkt N ... der Seite ... .

10 Pkte. **c)** Wenn AM und BN Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC sind, und $AM \cap BN = \{G\}$, dann ist G ... des Dreiecks ... .

10 Pkte. **d)** Wenn AM die Seitenhalbierende des Dreiecks ABC ist, $BM = 3 \cdot x$ cm und $CM = (x + 8)$ cm, dann ist $x = ...$.

2. MA und NB seien die Seitenhalbierenden des Dreiecks MNP und G sein Schwerpunkt. Es ist bekannt, dass $MG = 7$ cm und $BG = 14$ cm.

25 Pkte. **a)** Berechnet die Längen der Strecken MA und NB.

25 Pkte. **b)** Beweist, dass die Dreiecke ABG und MNG gleichschenklig sind.

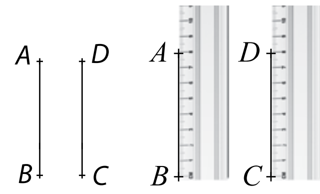
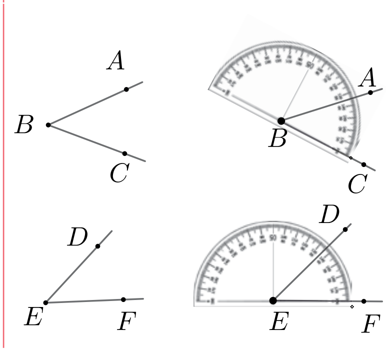
Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

6.3 Kongruenz der Dreiecke

L1 Kongruenz beliebiger Dreiecke

Zur Erinnerung

Zwei geometrische Figuren sind *kongruent*, wenn sie durch Überlagerung *übereinstimmen*.

Aussage	*In mathematischer Sprache*	*Geometrische Darstellung*
Zwei Strecken AB und CD sind dann und nur dann kongruent, wenn sie die gleiche Länge haben.	Wenn $AB \equiv CD$ ist, dann $AB = CD$. Wenn $AB = CD$, dann $AB \equiv CD$.	 $AB \equiv CD$ $AB = CD = 6$ cm
Zwei Winkel ABC und DEF sind dann und nur dann kongruent, wenn sie das gleiche Maß haben.	Wenn $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$, dann $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$. Wenn $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, dann $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$.	

Wir lösen und beobachten

Wir wollen herausfinden, was zwei *kongruente Dreiecke* kennzeichnet, d. h. zwei Dreiecke, die *durch Überlagerung übereinstimmen*.

Praktische Aktivität 1. Benötigte Materialien: zwei Transparentfolien, Marker, Schreibgerät für das Heft.

Schritt 1. Zeichnet auf eine Transparentfolie ein Dreieck ABC.

Schritt 2. Legt die zweite Transparentfolie über die erste und „kopiert“ das abgebildete Dreieck. Beschriftet das neue Dreieck mit $A_1B_1C_1$, sodass sich A mit A_1, B mit B_1, C mit C_1 überlagern. Bestimmt intuitiv, ob die Dreiecke kongruent sind.

Schritt 3. Trennt die beiden Folien voneinander, beobachtet und schreibt die *Zusammenhänge* zwischen den Elementen der Dreiecke auf.

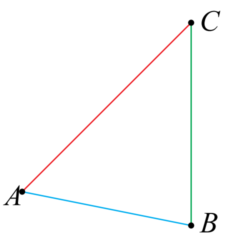
Schritt 4. Bestimmt durch Überlagerung, ob die entsprechenden Elemente der beiden Dreiecke kongruent sind.

Schritt 5. Dreht eines der Blätter so, dass A mit B_1 und der Strahl AB mit dem Strahl B_1C_1 übereinstimmen

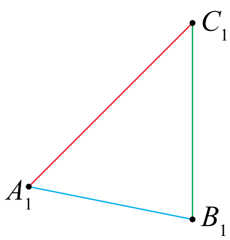
Schritt 6. Bestimmt, ob das Dreieck ABC durch Überlagerung mit dem Dreieck $B_1C_1A_1$ übereinstimmt.

Lösung

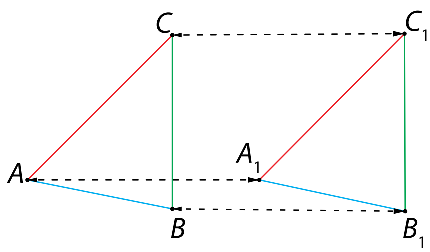
Schritt 1



Schritt 2



Schritt 3

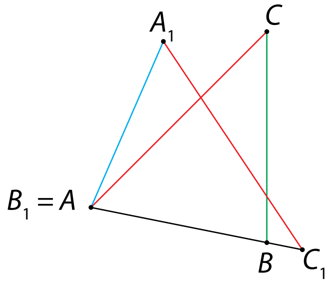


Einander entsprechende Elemente	
ΔABC	$\Delta A_1B_1C_1$
$\sphericalangle A$	$\sphericalangle A_1$
$\sphericalangle B$	$\sphericalangle B_1$
$\sphericalangle C$	$\sphericalangle C_1$
AB	A_1B_1
AC	A_1C_1
BC	B_1C_1

Schritt 4

$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A_1$,
$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B_1$,
$\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C_1$
$AB \equiv A_1B_1$,
$AC \equiv A_1C_1$,
$BC \equiv B_1C_1$.

Schritt 5



Schritt 6

ΔABC und $\Delta B_1C_1A_1$ überlagern sich nicht.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Definition

Zwei Dreiecke $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ sind kongruent, wenn alle einander entsprechenden Elemente kongruent sind.

Mathematisch ausgedrückt:

Wenn $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, dann $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C_1$, $AB \equiv A_1B_1$, $AC \equiv A_1C_1$, $BC \equiv B_1C_1$.
Wenn $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C_1$, $AB \equiv A_1B_1$, $AC \equiv A_1C_1$, $BC \equiv B_1C_1$, dann $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

Praktische Anwendung 1 zeigt, dass es möglich ist, dass $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, aber $\Delta ABC \not\equiv \Delta B_1C_1A_1$, d. h., bevor wir die Beziehung zwischen zwei kongruenten Dreiecken schreiben, müssen wir ihre einander entsprechenden Elemente identifizieren.

Wir merken uns

1. Wenn wir uns auf ein Dreieck beziehen, ist die Reihenfolge, in der wir die Eckpunkte lesen, nicht wesentlich. So kann das Dreieck mit den Eckpunkten *A, B, C* in jeder der folgenden Formen geschrieben werden: ΔABC, ΔCBA, ΔACB, ΔBCA, ΔBAC, ΔCAB.
2. Wenn wir uns auf die *Kongruenz von Dreiecken* beziehen, ist es wichtig, dass bei der Beschriftung der beiden Dreiecke die Reihenfolge der einander entsprechenden Elemente eingehalten wird.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Gelöste Aufgabe

Betrachtet die kongruenten Dreiecke *ABC* und *MNP*.

a) Wenn $AB = 10$ cm, $MP = 8$ cm, $BC = 9$ cm, berechnet den Umfang des Dreiecks *MNP*.
b) Wenn $\sphericalangle A = 74^\circ$ und $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle P$, berechnet das Maß des Winkels *B*.

Lösung	*Beweis*
a) Voraussetzung: $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, $AB = 10$ cm, $MP = 8$ cm, $BC = 9$ cm *Schlussfolgerung:* $U_{\Delta MNP}$	Aus $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ ergibt sich: $AB \equiv MN$, $AC \equiv MP$, $BC \equiv NP$, d. h. $MN = 10$ cm, $NP = 9$ cm, $MP = 8$ cm und $U_{\Delta MNP} = MN + NP + MP = 27$ cm.
b) Voraussetzung: $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, $\sphericalangle A = 74^\circ$ und $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle P$ *Schlussfolgerung:* $\sphericalangle B$	Aus $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ ergibt sich: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$. Wir erhalten $\sphericalangle M = \sphericalangle A = 74^\circ$. Dann ist $\sphericalangle N + \sphericalangle P = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$. Aus $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle P$, $\sphericalangle N = \sphericalangle P = 53^\circ$. Aber $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, d. h., $\sphericalangle B = 53^\circ$.

Übungen und Aufgaben

1. Die Dreiecke ABC und DEF sind kongruent. Übertragt in eure Hefte und füllt die gestrichelten Felder aus, sodass ihr wahre Beziehungen erhaltet:
   a) $AB \equiv \ldots$; **c)** $\ldots \equiv DF$;
   b) $\sphericalangle A \equiv \ldots$; **d)** $\ldots \equiv \sphericalangle DFE$.

2. Die Dreiecke ABC und MNP sind kongruent.
   a) Argumentiert, dass die Schreibung $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ äquivalent ist mit der Schreibung $\Delta\, ACB \equiv \Delta\, MPN$.
   b) Nennt zwei weitere Möglichkeiten, die Kongruenz zweier Dreiecke richtig zu schreiben, und stellt diese vor.

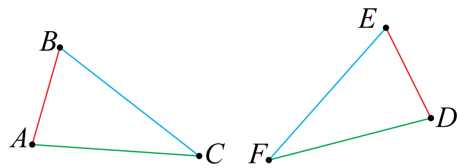
3. Das Dreieck ABC hat die Eigenschaft, dass $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$.
   a) Schreibt die Kongruenz der entsprechenden Seiten auf.
   b) Beweist anhand der Ergebnisse von Punkt a), dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
   c) Wenn der Umfang des Dreiecks ABC 40 cm und $BC = 18$ cm ist, berechnet die Längen der Seiten AB und AC.

4. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und tragt ein ***W*** ein, wenn die Aussage wahr ist, und ein ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

Aussage	***W/F***
A_1: Wenn $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, DEF$, dann $U_{\Delta ABC} = U_{\Delta DEF}$.	
A_2: Wenn $U_{\Delta ABC} = U_{\Delta DEF}$, dann $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, DEF$.	
A_3: Wenn zwei Dreiecke kongruent sind, dann haben sie kongruente Winkel.	
A_4: Wenn zwei Dreiecke jeweils kongruente Winkel haben, dann sind sie kongruent.	

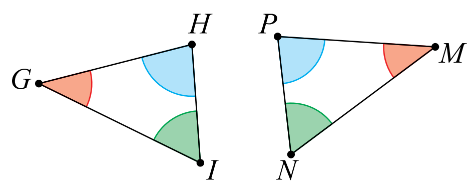
5. Das Dreieck DEF hat die Eigenschaft, dass $\Delta DEF \equiv \Delta EFD$.
   a) Schreibt die Kongruenz der entsprechenden Seiten und die Kongruenz der entsprechenden Winkel auf.
   b) Leitet mithilfe der Ergebnisse von Unterpunkt a) die Art des Dreiecks DEF ab.
   c) Bestimmt das Maß des Winkels DFE.

6. **a)** In der unten stehenden Zeichnung sind zwei kongruente Dreiecke dargestellt, und die Paare kongruenter Seiten sind in der gleichen Farbe dargestellt. Wählt die richtige Schreibweise ihrer Kongruenz.



A. $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$; **B.** $\Delta ABC \equiv \Delta DFE$; **C.** $\Delta FDE \equiv \Delta CBA$.

   b) In der folgenden Zeichnung sind zwei kongruente Dreiecke dargestellt, und die Paare von kongruenten Winkeln sind mit der gleichen Farbe markiert. Wählt die richtige Schreibweise aus den folgenden Angaben aus.



A. $\Delta GHI \equiv \Delta MNP$; **B.** $\Delta GIH \equiv \Delta MNP$; **C.** $\Delta PMN \equiv \Delta IHG$.

7. Im Dreieck ABC ist $\sphericalangle C$ ein rechter Winkel und $\sphericalangle B = 36°$. Wenn $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, gebt die Maße der Winkel D und F an.

Minitest

1. Zeichnet auf ein Blatt Papier ein Quadrat $ABCD$ und zeichnet die Strecke AC. Schneidet die quadratische Fläche $ABCD$ aus und faltet sie entlang der Geraden AC.

15 Pkte. **a)** Gebt an, ob sich die Punkte B und D überlagern.

15 Pkte. **b)** Bestimmt intuitiv, ob die Dreiecke ABC und ADC kongruent sind.

15 Pkte. **c)** Schreibt die Kongruenz der einander entsprechenden Elemente der beiden Dreiecke auf.

2. Das Dreieck ABC hat die Eigenschaft $\Delta ABC \equiv \Delta BCA$.

15 Pkte. **a)** Schreibt die entsprechenden kongruenten Seiten auf.

30 Pkte. **b)** Wenn $AB + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{3} = 11$ cm, berechnet den Umfang des Dreiecks ABC.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Kongruenzkriterien für beliebige Dreiecke

Zur Erinnerung

In der Praxis sind sowohl die mathematischen Eigenschaften, die kongruente Figuren haben, als auch einige *hinreichende Bedingungen*, mit denen man die Kongruenz geometrischer Figuren beweisen kann, nützlich. Für Strecken und Winkel kennen wir die folgenden Ergebnisse:

Bei positiven Zahlen a, b, c, mit $a + b > c$, $a + c > b$ und $b + c > a$, gibt es ein einziges Dreieck ABC mit $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. (Konstruktionsfall SSS)

Sind zwei positive Zahlen a und b und das Maß eines Winkels $\alpha°$ gegeben, so gibt es ein einziges Dreieck ABC mit $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle ACB = \alpha°$. (Konstruktionsfall SWS)

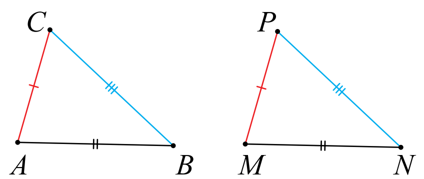
Wenn die Maße von zwei Winkeln $\alpha°$ und $\beta°$, mit $\alpha° + \beta° < 180°$ und die positive Zahl a gegeben sind, dann gibt es ein einziges Dreieck ABC mit $BC = a$, $\sphericalangle ABC = \alpha°$ und $\sphericalangle ACB = \beta°$. (Konstruktionsfall WSW)

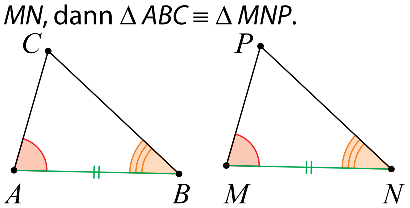
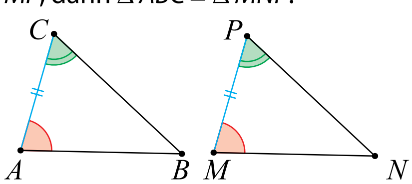
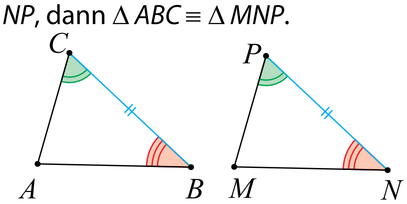
Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Wenn zwei Dreiecke laut Definition kongruent sind, ergeben sich sechs Paare von kongruenten Elementen, die als entsprechende Elemente der beiden Dreiecke bezeichnet werden. Wir wollen herausfinden, wie viele Paare von kongruenten entsprechenden Elementen ausreichen, um zu beweisen, dass zwei Dreiecke kongruent sind.
Die oben genannten Konstruktionsfälle legen die Einzigartigkeit des konstruierten Dreiecks nahe, unabhängig von seiner Lage in der Ebene. Kongruente Dreiecke sind Dreiecke, die genau die gleichen Maße der entsprechenden Elemente haben, aber unterschiedliche Positionen in der Ebene haben können.

Daraus leiten wir ab, dass es für den Beweis der Kongruenz zweier Dreiecke ausreicht, dass sie mit demselben Fall konstruiert werden können und die gleichen Abmessungen der in der Konstruktion verwendeten Elemente haben.

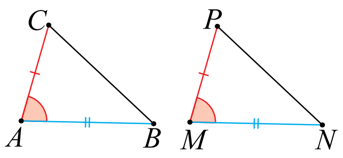
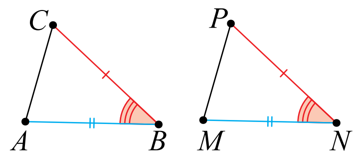
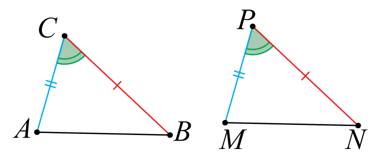
Mit dieser Argumentation erhalten wir die folgenden Kriterien (Fälle) der Kongruenz von Dreiecken:

Kriterium	*Geometrische Darstellung*
1. SSS-Kongruenzfall Wenn in zwei Dreiecken alle einander entsprechenden Seiten kongruent sind, dann sind die Dreiecke kongruent.	Wenn $AB \equiv MN$, $BC \equiv NP$ und $AC \equiv MP$, dann $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$. 
2. WSW-Kongruenzfall Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und die ihr anliegenden Winkel kongruent sind, dann sind die Dreiecke kongruent.	

In mathematischer Sprache		
Wenn $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$ und $AB \equiv MN$, dann $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$. 	Wenn $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ und $AC \equiv MP$, dann $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$. 	Wenn $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ und $BC \equiv NP$, dann $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$. 

3. Der SWS-Kongruenzfall

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der durch sie bestimmte Winkel kongruent sind, dann sind die Dreiecke kongruent.

In mathematischer Sprache		
Wenn $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $AB \equiv MN$ und $AC \equiv MP$, dann $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$	Wenn $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, $BC \equiv NP$ und $AB \equiv MN$, dann $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$.	Wenn $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$, $AC \equiv MP$ und $BC \equiv NP$, dann $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$.
		

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Gelöste Aufgabe. Die Strecken AB und CD haben denselben Mittelpunkt M, und C liegt außerhalb der Geraden AB.

a) Beweist, dass $\Delta\, MAC \equiv \Delta\, MBD$ und $\Delta\, MAD \equiv \Delta\, MBC$.

b) Leitet aus dem Ergebnis von Punkt a) ab, dass $AD \equiv BC$ und $AC \equiv BD$.

c) Beweist, dass die Dreiecke CAD und DBC kongruent sind.

d) Begründet anhand der oben dargestellten Ergebnisse die Parallelität: $AD \parallel CB$ und $AC \parallel BD$.

Voraussetzung:

$AB \cap CD = \{M\}$,

$MA \equiv MB$ und

$MC \equiv MD$.

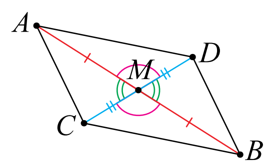
Schlussfolgerung:

a) $\Delta MAC \equiv \Delta MBD$ und $\Delta MAD \equiv \Delta MBC$.

b) $AC \equiv BD$ und $AD \equiv BC$.

c) $\Delta CAD \equiv \Delta DBC$.

d) $AD \parallel CB$ und $AC \parallel BD$



Beweis

a) Aus der Voraussetzung folgt, dass $MA \equiv MB$. (1)
Die Winkel AMC und BMD sind Scheitelwinkel, also $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle BMD$. (2)
Aus der Voraussetzung folgt: $MC \equiv MD$. (3)
Aus (1), (2) und (3) folgt für den Fall der SWS-Kongruenz $\Delta\, MAC \equiv \Delta\, MBD$.
Aus der Voraussetzung folgt: $MA \equiv MB$. (4)
Die Winkel AMD und BMC sind Scheitelwinkel, also $\sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle BMC$. (5)
Aus der Voraussetzung folgt: $MD \equiv MC$. (6)
Aus (4), (5) und (6) folgt für den Kongruenzfall SWS: $\Delta\, MAD \equiv \Delta\, MBC$.

b) Aus $\Delta\, MAC \equiv \Delta\, MBD$ ergibt sich $AC \equiv BD$, und aus $\Delta MAD \equiv \Delta MBC$ ergibt sich $AD \equiv BC$.

c) Aus b) wissen wir, dass $AC \equiv BD$ und $AD \equiv BC$. Aber $CD \equiv CD$ (gemeinsame Seite). Aus dem SSS-Kongruenzfall folgt $\Delta\, CAD \equiv \Delta\, DBC$.

d) Die in c) gezeigte Kongruenz ergibt $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle CDB$ und $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle DCB$. Die Geraden AC und DB bilden mit der Sekante CD kongruente innere Wechselwinkel, d. h., $AC \parallel BD$. Analoges gilt für die Geraden AD und CB mit der Sekante CD, was $AD \parallel CB$ ergibt.

Portfolioaufgabe

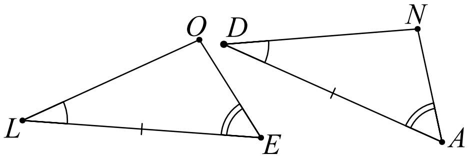
Die Strecken AC und BD schneiden sich im Punkt M. Wenn bekannt ist, dass $AB \equiv CD$ und $AB \parallel CD$, beweist, dass:

a) der Punkt M der gemeinsame Mittelpunkt der Strecken AC und BD ist;

b) die Geraden AD und BC parallel zueinander sind.

Übungen und Aufgaben

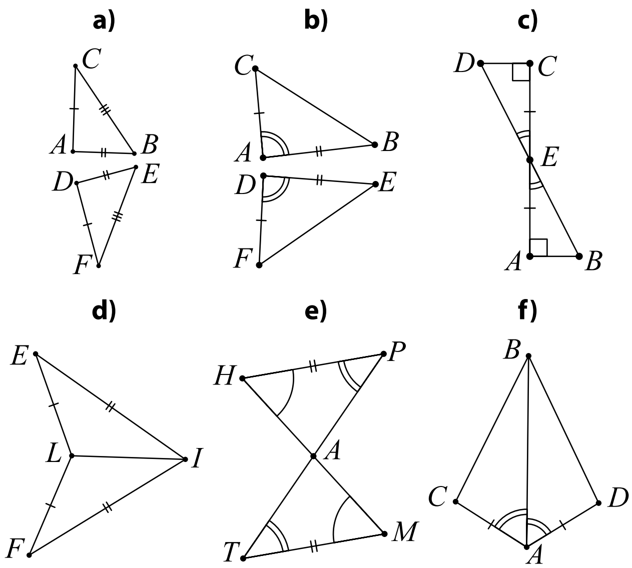
1. In der nebenstehenden Abbildung sind die Elemente der beiden Dreiecke, von denen wir wissen, dass sie kongruent sind, gleich markiert.



a) Schreibt die Kongruenzen auf, die den Markierungen in der Zeichnung entsprechen.

b) Ermittelt, ob die Dreiecke kongruent sind, gebt das verwendete Kongruenzkriterium (Fall) an und schreibt die Beziehung zwischen ihnen auf.

2. In jeder der folgenden Konfigurationen sind zwei kongruente Dreiecke dargestellt. Die entsprechenden Elemente der beiden Dreiecke (Seiten und Winkel), von denen wir wissen, dass sie kongruent sind, sind mit identischen Symbolen gekennzeichnet.



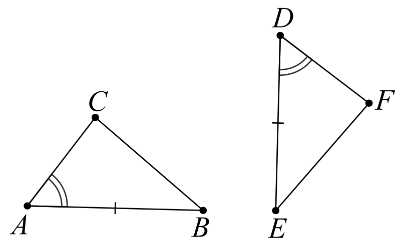
Tragt anhand der Markierungen in den Zeichnungen für jeden Unterpunkt x in das Kästchen ein, das dem Kongruenzkriterium der Dreiecke entspricht.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
SSS	×					
SWS						
WSW						

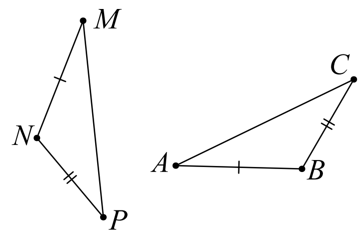
3. Oana und Petra müssen beweisen, dass die Dreiecke *ABC* und *DEF* kongruent sind. Sie haben bereits gezeigt, dass $AB \equiv DE$ und $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$.

a) Wenn Oana das SWS-Kriterium anwendet, gebt an, welche Kongruenz sie noch beweisen muss.

b) Wenn Petra das WSW-Kriterium anwendet, gebt an, welche Kongruenz sie noch beweisen muss.



4. Adrian muss beweisen, dass die Dreiecke *ABC* und *MNP* kongruent sind. Er hat bereits gezeigt, dass $AB \equiv MN$ und $BC \equiv NP$ *sind*. Er stellt fest, dass er nicht genügend Daten hat, um zu beweisen, dass $AC \equiv MP$ ist. Gebt an, welchen Kongruenzfall er verwenden könnte und welche Kongruenz er noch beweisen muss, um diesen Fall anzuwenden.



5. Es treten folgende Kongruenzen auf:
$\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ und $\Delta\, DEF \equiv \Delta\, PQR$.

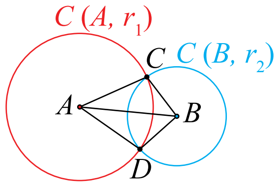
Bestimmt die Winkelmaße des Dreiecks *ABC* unter Berücksichtigung von $\sphericalangle F = 54°$ und $\sphericalangle Q = 72°$.

6. **a)** Zwei gleichschenklige Dreiecke haben kongruente Grundlinien und gleiche Umfänge. Beweist, dass die Dreiecke kongruent sind.

b) Zwei gleichseitige Dreiecke haben gleiche Umfänge. Beweist, dass die Dreiecke kongruent sind.

7. Das Dreieck *ABC* ist gleichschenklig und der Punkt *M* ist die Mitte der Basis *BC*. Gebt an, ob die Dreiecke *ABM* und *ACM* kongruent sind und wenn ja, gebt den Fall der Kongruenz an.

8. Die Kreise $C(A, r_1)$ und $C(B, r_2)$ schneiden sich in den Punkten C und D.
Beweist, dass die Dreiecke ABC und ABD kongruent sind.



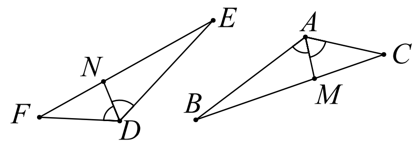
9. Das Dreieck DEF ist ein beliebiges Dreieck und A ist die Mitte der Seite DE. Die Senkrechte in A auf die Gerade DE schneidet die Seite DF im Punkt M und die Gerade EF im Punkt N.

a) Fertigt eine Zeichnung entsprechend den Daten der Aufgabe an.

b) Beweist, dass: $\Delta ADM \equiv \Delta AEM$; $\Delta ADN \equiv \Delta AEN$; $\Delta DMN \equiv \Delta EMN$.

10. D sei die Mitte der Seite AB des Dreiecks ABC und Q sei die Mitte der Seite MN des Dreiecks MNP.
Zeigt, dass, wenn $\Delta BCD \equiv \Delta NPQ$, dann $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

11. In nebenstehender Zeichnung ist $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, M ist ein Punkt auf der Seite BC, N ist ein Punkt auf der Seite EF. Wenn AM die Winkelhalbierende des Winkels BAC und DN die Winkelhalbierende des Winkels EDF ist, beweist, dass $\Delta ABM \equiv \Delta DEN$.



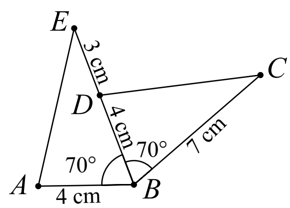
12. Der Punkt M ist die Mitte der Seite BC des Dreiecks ABC, und der Punkt N ist die Mitte der Seite EF des Dreiecks DEF. Wenn $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, dann $\Delta ACM \equiv \Delta DFN$.

13. Der Punkt O befindet sich im Inneren des Dreiecks ABC und $\Delta AOB \equiv \Delta BOC \equiv \Delta COA$.

a) Beweist, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

b) Berechnet das Maß des Winkels AOB.

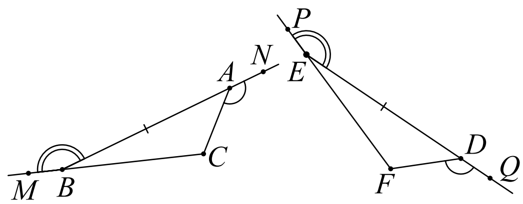
14. In der dargestellten Konfiguration sind die Längen der Strecken in Zentimetern angegeben. Zeigt, dass die dargestellten Dreiecke kongruent sind.



15. Auf den Verlängerungen der Seiten AB und AC des Dreiecks ABC werden die Punkte P und Q angenommen, sodass $AP \equiv AB$ und $AQ \equiv AC$. Beweist, dass $\Delta ABC \equiv \Delta APQ$.

Minitest

30 Pkte. **1.** In der folgenden Abbildung sind kongruente Winkel und Strecken gleich markiert. Zeigt, dass $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.



2. Stellt einen spitzen Winkel xOy dar und nehmt auf seinen Seiten die Punkte $A, B \in Ox$, $C, D \in Oy$ an, sodass: $OA = 2{,}5$ cm, $AB = 5{,}5$ cm, $OD = 8$ cm, $OB > OA$, $OC < OD$ und $\sphericalangle OBC \equiv \sphericalangle ODA$.

30 Pkte. **a)** Beweist, dass $\Delta ADO \equiv \Delta CBO$.

30 Pkte. **b)** Berechnet die Länge des Strecke OC.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L3 Kongruenzkriterien für rechtwinklige Dreiecke

Zur Erinnerung

Ein Dreieck, das einen rechten Winkel hat, wird als *rechtwinkliges Dreieck* bezeichnet.	ΔABC ist rechtwinklig, wenn $\sphericalangle A = 90^\circ$ oder $\sphericalangle B = 90^\circ$ oder $\sphericalangle C = 90^\circ$.
Die spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind komplementär.	Wenn ΔABC rechtwinklig ist und $\sphericalangle A = 90^\circ$, dann $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 90^\circ$.
In einem rechtwinkligen Dreieck werden die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als *Hypotenuse* und die Seiten, die den rechten Winkel bilden, als *Katheten* des Dreiecks bezeichnet.	Wenn ΔABC rechtwinklig ist und $\sphericalangle A = 90^\circ$, dann ist BC die Hypotenuse, und AB und AC sind die Katheten des Dreiecks.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Wenn wir uns auf zwei rechtwinklige Dreiecke beziehen, haben wir bereits eine der Kongruenzbeziehungen der entsprechenden Elemente, nämlich die *Kongruenz von rechten Winkeln*. Dann nehmen wir die SWS- und WSW-Kongruenzkriterien von Dreiecken wieder auf.

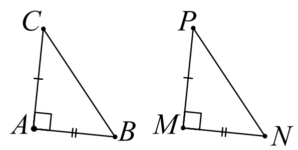
Betrachtet die rechtwinkligen Dreiecke ABC und MNP mit $\sphericalangle A = \sphericalangle M = 90^\circ$. Dann sind die Seiten AB und AC Katheten, und BC ist die Hypotenuse im Dreieck ABC, MN und MP sind Katheten, und NP ist die Hypotenuse im Dreieck MNP.

Wenn ein spitzer Winkel bekannt ist, dann ist der zweite sein Komplement, also ist er bekannt.

Der SWS-Kongruenzfall wird zum **KK-Fall** (Kathete – Kathete) und kann wie folgt formuliert werden::

(KK)

Wenn zwei rechtwinklige Dreiecke kongruente Katheten haben, dann sind die Dreiecke kongruent.



Wenn $AB \equiv MN$ und $AC \equiv MP$, dann $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

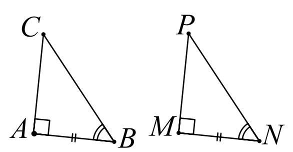
Der Kongruenzfall WSW führt zu zwei unterschiedlichen Situationen.

1. Handelt es sich um eine Kathete, so wird daraus der **KW-Fall** (Kathete – spitzer Winkel). Er kann wie folgt formuliert werden.

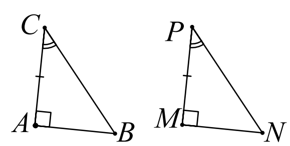
(KW)

a) Wenn bei zwei rechtwinkligen Dreiecken jeweils eine Kathete und der anliegende spitze Winkel kongruent sind, dann sind die Dreiecke kongruent.

Wenn $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$ und $AB \equiv MN$, dann $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

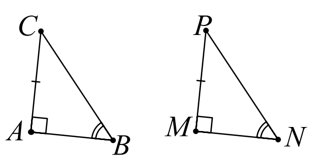


Wenn $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ und $AC \equiv MP$, dann $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

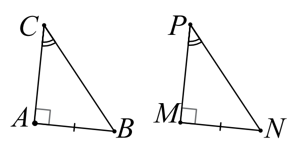


b) Wenn bei zwei rechtwinkligen Dreiecken jeweils eine Kathete und der ihr gegenüberliegende spitze Winkel kongruent sind, dann sind die Dreiecke kongruent

Wenn $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$ und $AC \equiv MP$, dann $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.



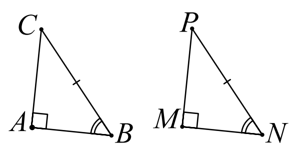
Wenn $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ und $AB \equiv MN$, dann $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.



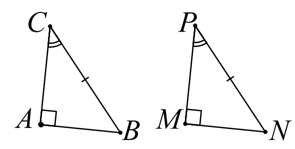
Wenn die Zielseite die Hypotenuse ist, wird sie zum HW-Fall (Hypotenuse – spitzer Winkel). Es wird wie folgt formuliert:

(HW)
Wenn zwei rechtwinklige Dreiecke die Hypotenusen und einen spitzen Winkel haben, die jeweils kongruent sind, dann sind die Dreiecke kongruent.

Wenn $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$ *und* $BC \equiv NP$, dann $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$.

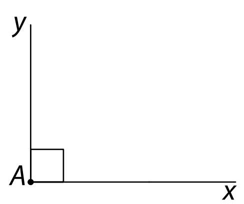


Wenn $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ *und* $BC \equiv NP$, dann $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$.

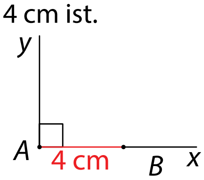


Praktische Anwendung

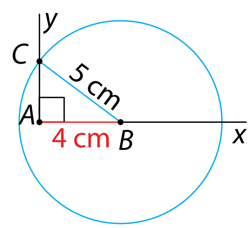
Schritt 1. Konstruiert den rechten Winkel xAy.



Schritt 2. Markiert auf dem Ax-Schenkel des Winkels den Punkt B so, dass $AB = 4$ cm ist.



Schritt 3. Konstruiert den Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius 5 cm und bezeichnet $\{C\} = \mathcal{C}(B, 5\text{ cm}) \cap Ay$.

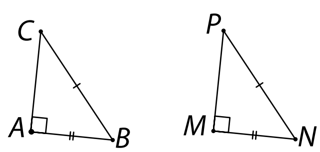


Ihr habt das einzigartige rechtwinklige Dreieck mit einer Kathete von 4 cm und einer Hypotenuse von 5 cm konstruiert.

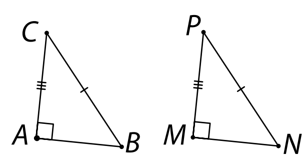
Die obige Konstruktion liefert uns ein neues Kongruenzkriterium für rechtwinklige Dreiecke, den Fall HK (Hypotenuse – Kathete), der wie folgt formuliert werden kann:

(HK)
Wenn zwei rechtwinklige Dreiecke kongruente Hypotenusen und je eine entsprechende kongruente Kathete haben, dann sind die Dreiecke kongruent.

Wenn $BC \equiv NP$ und $AB \equiv MN$, dann ist $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.



Wenn $BC \equiv NP$ und $AC \equiv MP$, dann ist $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, MNP$.

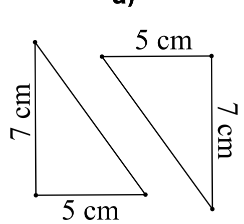


Bemerkung: Alle Kriterien wurden unter der Annahme $\sphericalangle A = \sphericalangle M = 90°$ formuliert.

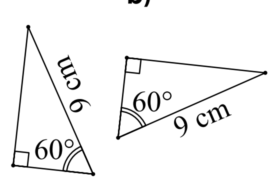
Übungen und Aufgaben

1. In jeder der folgenden Konfigurationen sind zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke dargestellt.

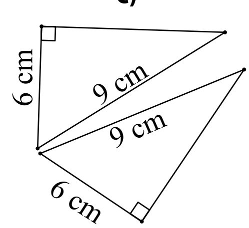
a)



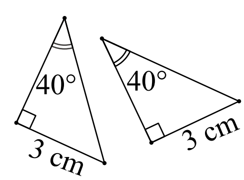
b)



c)



d)

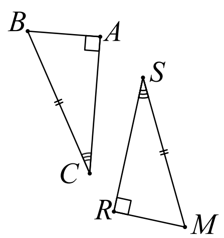


Tragt unter Verwendung der Daten aus den geometrischen Darstellungen für jeden Unterpunkt *x* in das Kästchen ein, das dem Kongruenzkriterium entspricht.

Fall	**a)**	**b)**	**c)**	**d)**
WH				
KW				**x**
HK				
KK				

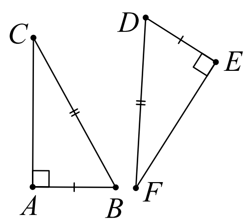
2. In den folgenden Darstellungen sind die kongruenten Elemente gleich gekennzeichnet.
Übertragt die Aussagen in eure Hefte und füllt die Lücken so aus, dass ihr richtige Aussagen erhaltet.

a)



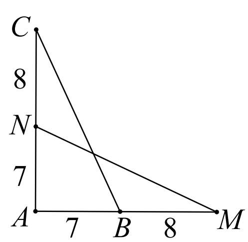
Die beiden Dreiecke sind nach dem Kongruenzfall … kongruent und wir schreiben $\Delta ABC \equiv \ldots$.

b)



Die beiden Dreiecke sind kongruent nach dem Kongruenzfall … und wir schreiben $\Delta\, ABC \equiv \ldots$.

3. In der nebenstehenden Abbildung sind die Dreiecke *ABC* und *ANM* rechtwinklig, und die Längen der Strecken sind in Zentimetern angegeben.



a) Folgende Kongruenz tritt auf:

A. $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, AMN$; **C.** $\Delta BCA \equiv \Delta MAN$;
B. $\Delta\, ACB \equiv \Delta NAM$; **D.** $\Delta ABC \equiv \Delta ANM$.

b) In Unterpunkt a) wurde der Kongruenzfall verwendet:

A. HK. **B.** KK. **C.** HW. **D.** KW.

4. Die Punkte *A, B, C* sind in dieser Reihenfolge kollinear und $AC = 2 \cdot BC$. Auf den Senkrechten in den Punkten *A* und *C* auf die Gerade *AC* liegen die Punkte *M* bzw. *N*, sodass $AM \equiv CN$. Beweist, dass:

a) $\Delta MAB \equiv \Delta NCB$;

b) $\Delta ACN \equiv \Delta CAM$.

5. Betrachtet einen Punkt *P* auf der Winkelhalbierenden des eigentlichen Winkels *xOy*. Wenn der Abstand von dem Punkt *P* zu der Geraden *Ox* 4,5 cm beträgt, berechnet den Abstand von dem Punkt *P* zu der Geraden *Oy*.

6. Die Dreiecke *ABC* und *DEF* sind kongruent, und *AM* und *DN* sind Höhen.

a) Beweist, dass $\Delta\, ACM \equiv \Delta\, DFN$.

b) Wenn man weiß, dass *P* der Symmetriepunkt von *A* in Bezug auf die Gerade *BC* und *Q* der Symmetriepunkt von *D* in Bezug auf die Gerade *EF* ist, beweist, dass $\Delta\, ABP \equiv \Delta\, DEQ$.

7. Es sei ein Dreieck *ABC*, $AB \neq AC$ und *M* sei die Mitte der Seite *BC*. Konstruiert $BD \perp AM$, $D \in AM$ und $CE \perp AM$, $E \in AM$. Beweist, dass $\Delta\, BDM \equiv \Delta\, CEM$.

8. Das Dreieck *MNP* ist rechtwinklig und $\sphericalangle MNP \equiv \sphericalangle MPN$. Die Senkrechte in *N* auf die Gerade *NP* schneidet *MP* im Punkt *A*, und die Senkrechte in *P* auf die Gerade *NP* schneidet *MN* im Punkt *B*.

a) Erstellt mit geometrischen Werkzeugen eine Zeichnung, die den Daten der Aufgabe entspricht.

b) Berechnet die Maße der Winkel *MNP* und *MPN*.

c) Zeigt, dass $\Delta\, ANP \equiv \Delta\, BPN$.

9. Der Winkel *ABC* ist ein rechter Winkel und *D* ist ein Punkt auf der Strecke *AC*. Bezeichnet den Fußpunkt der Senkrechten von *D* auf die Gerade *AB* mit *M* und den Fußpunkt der Senkrechten von *D* auf die Gerade *BC* mit *N*. Beweist, das:

a) $DM \parallel BC$ und $DN \parallel AB$;

b) $\Delta BDM \equiv \Delta DBN$.

Minitest

4 × 10 Pkte. 1. Die Dreiecke ABC und MNP sind rechtwinklig $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ und $\sphericalangle NMP = 90^\circ$.
Ordnet dem Buchstaben in Spalte A, der die Menge der Kongruenzen der entsprechenden Elemente angibt, die Zahl in Spalte B zu, die das Kongruenzkriterium der Dreiecke ABC und MNP angibt.

A	**B**
a. $AB \equiv MN$, $AC \equiv MP$	**1.** HK
b. $AC \equiv MP$, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MNP$	**2.** HW
c. $BC \equiv NP$, $AB \equiv MN$	**3.** KK
d. $BC \equiv NP$, $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle MPN$	**4.** KW

2. ABC sei ein Dreieck und CD die Winkelhalbierende des Winkels C, $D \in AB$. Die Senkrechte vom Punkt A auf CD schneidet CD in P und BC in E.

25 Pkte. **a)** Zeigt, dass $\Delta ACP \equiv \Delta ECP$.

25 Pkte. **b)** Bestimmt, ob die Winkel DAC und CED kongruent sind. Begründet eure Antwort.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L4 Die Methode der kongruenten Dreiecke

Zur Erinnerung

Geometrie, die auf logischem Denken beruht, arbeitet mit mathematischen Sätzen, Definitionen, Axiomen und Lehrsätzen.
Ein mathematischer *Satz* ist eine Aussage, die *entweder wahr oder falsch* ist.
Axiome sind Aussagen, die als wahr akzeptiert werden, ohne dass es eines Beweises bedarf.
Lehrsätze sind wahre Aussagen, die auf der Grundlage von Axiomen und anderen bereits bewiesenen Aussagen formuliert und bewiesen werden.

Lehrsätze versichern uns, dass, wenn bestimmte Informationen (die Voraussetzung/des Lehrsatzes) wahr sind, auch andere Informationen (die Schlussfolgerung des Lehrsatzes) wahr sind.

Im Allgemeinen haben Lehrsätze die Form: Wenn ***Voraussetzung***, dann ***Schlussfolgerung***.

Indem man die Schlussfolgerung mit der Voraussetzung oder einem Teil der Voraussetzung vertauscht, erhält man *Kehrsätze* der Lehrsätze.
Wenn der Kehrsatz wahr ist, wird er zu einem Lehrsatz und wird als *Kehrsatz* des Lehrsatzes bezeichnet, aus dem er gebildet wurde; dies wird als *direkter Lehrsatz* bezeichnet.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Wenn sowohl der direkte Lehrsatz als auch der Kehrsatz des Lehrsatzes auftreten, können sie in einer einzigen Aussage der Form *Satz* 1, wenn und nur wenn *Satz* 2 formuliert werden.
Diese Formulierung setzt voraus, dass folgende Sätze gleichzeitig wahr sind:
Wenn *Satz* 1, dann *Satz* 2 und
Wenn *Satz* 2, dann *Satz* 1.
Der Beweis eines Lehrsatzes vom Typ „… wenn und nur wenn …“ impliziert den Beweis beider Sätze (direkt und reziprok).

Beispiel:
Sei d die Mittelsenkrechte der Strecke AB und M ein Punkt in der Ebene. Der Lehrsatz gilt:
a) Wenn $M \in d$, dann $MA \equiv MB$.
b) Wenn $MA \equiv MB$, dann $M \in d$.

Die beiden Aussagen können ersetzt werden durch:
$M \in d$, wenn und nur wenn $MA \equiv MB$.

Bemerkung: Das obige Beispiel gibt uns die Charakterisierung von Punkten auf der Mittelsenkrechten einer Strecke, die wir in einer der folgenden Lektionen *beweisen* werden.
Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist die Menge aller Punkte in der Ebene, die in gleichem Abstand zu den Endpunkten der Strecke liegen.

Die Methode der kongruenten Dreiecke gibt uns nützliche Werkzeuge an die Hand, um die Kongruenz von Strecken oder Winkeln zu beweisen, die wir benötigen, und um wichtige Lehrsätze zu beweisen.

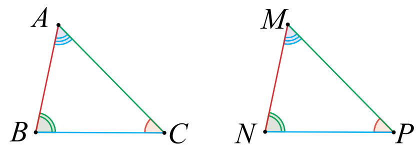
Um mit der Methode der kongruenten Dreiecke die Kongruenz zweier Strecken oder zweier Winkel zu beweisen, muss man folgende Schritte durchlaufen:
Schritt 1. Wir bestimmen zwei Dreiecke so, dass jedes eine der beiden Strecken als Seite und einen der beiden Winkel als Winkel hat.
Schritt 2. Wir beweisen, dass die beiden Dreiecke kongruent sind, indem wir einen der Kongruenzfälle verwenden.
Schritt 3. Wir leiten ab, dass die Seiten oder Winkel der beiden Dreiecke kongruent sind, und somit die betreffenden Strecken oder Winkel kongruent sind.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Ein nützliches Ergebnis bei der Anwendung der Methode der kongruenten Dreiecke ist in Anwendung 1 gegeben.

Anwendung 1. In *kongruenten Dreiecken* stehen sich *kongruente* Seiten und *kongruente Winkel* gegenüber.

Lösung: Es seien die kongruenten Dreiecke ABC und MNP.
Voraussetzung: $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$
Schlussfolgerung: Kongruente Seiten stehen kongruenten Winkeln gegenüber.

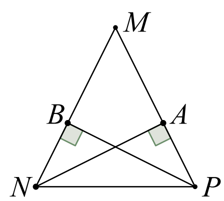


Beweis: Wenn $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, wie definiert, erhält man die Kongruenzen: $AB \equiv MN$, $AC \equiv MP$, $BC \equiv NP$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$. In der nachstehenden Tabelle werden die betreffenden Kongruenzen hervorgehoben.

$\Delta ABC \equiv \Delta MNP$				
Seite des ΔABC	Gegenüberliegender Winkel	Seite des ΔMNP	Gegenüberliegender Winkel	Die entsprechenden Seiten sind dann und nur dann kongruent, wenn die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel kongruent sind.
AB	$\sphericalangle C$	MN	$\sphericalangle P$	$AB \equiv MN$, wenn und nur wenn $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$.
AC	$\sphericalangle B$	MP	$\sphericalangle N$	$AC \equiv MP$, wenn und nur wenn $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$.
BC	$\sphericalangle A$	NP	$\sphericalangle M$	$BC \equiv NP$, wenn und nur wenn $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$.

Bemerkung: Das obige Ergebnis gilt nur für *kongruente Dreiecke*!

Anwendung 2. Im Dreieck MNP, $NA \perp MP$, $A \in MP$, $PB \perp MN$, $B \in MN$ und $NA \equiv PB$.
Beweist, dass $MN \equiv MP$.



Voraussetzung: ΔMNP, $NA \perp MP$, $A \in MP$, $PB \perp MN$, $B \in MN$ und $NA \equiv PB$.
Schlussfolgerungt: $MN \equiv MP$.
Beweis. Wir betrachten die rechtwinkligen Dreiecke ΔMAN und ΔMBP.

$$\left.\begin{array}{l} NA \equiv PB \text{ (aus der Voraussetzung)} \\ \sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle BMP \text{ (gemeinsamer Winkel)} \end{array}\right\} \overset{KW}{\Rightarrow} \Delta MAN \equiv \Delta MBP \Rightarrow MN \equiv MP.$$

Übungen und Aufgaben

1. Übertragt die Aussagen in eure Hefte und ergänzt die Lücken, um richtige Aussagen zu erhalten.
   a) In kongruenten Dreiecken stehen sich kongruente Seiten und kongruente … gegenüber.
   b) In kongruenten Dreiecken stehen sich kongruente Winkel und kongruente … gegenüber.
   c) Wenn $\Delta CDS \equiv \Delta EFT$, dann sind $DS \equiv$ ... und ... $\equiv \sphericalangle TFE$.

2. In einem Kreis mit Mittelpunkt O sind die Sehnen AB und BC kongruent. Zeigt, dass $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC$.

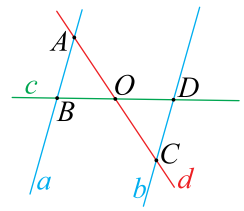
3. Die Punkte A, B und C sind in dieser Reihenfolge kollinear, und die Punkte D und E liegen in verschiedenen Halbebenen, die durch die Gerade AC begrenzt werden, sodass $\Delta ABD \equiv \Delta ABE$. Zeigt, dass $CD \equiv CE$.

4. Es seien die Dreiecke ABC und DEF, sodass $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$, $AB = DE = 8$ cm, $AC = 10$ cm, $EF = 6$ cm. Berechnet den Umfang des Dreiecks ABC.

5. Verlängert die Seiten AB und AC des Dreiecks ABC um die Strecken $AD \equiv AB$ und $AE \equiv AC$.
   Beweist, dass:
   a) $\Delta ABC \equiv \Delta ADE$; **b)** $DE \parallel BC$.

6. Konstruiert von der Spitze A des spitzwinkligen Dreiecks ABC aus $AD \perp AB$, $AD \equiv AB$ und $AE \perp AC$, $AE \equiv AC$, sodass D und C von AB getrennt sind und B und E von AC getrennt sind.
   Beweist, dass $\Delta ABE \equiv \Delta ADC$.

7. In der unten stehenden Abbildung sind die Geraden a und b parallel zueinander und die Geraden c und d sind Sekanten dieser Parallelen. Beweist anhand der Bezeichnungen in der Abbildung und der Kongruenz $AB \equiv CD$, dass der Punkt O die Mitte der Strecke BD ist.



8. Durch die Mitte M der Strecke AB verläuft eine Gerade d. Die Senkrechten in A und B auf die Gerade AB schneiden die Gerade d in den Punkten P bzw. Q, und die Senkrechte in M auf die Gerade d schneidet BQ im Punkt C. Beweist, dass:
   a) $PM \equiv QM$;
   b) $\sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle PCM$.

9. Die Punkte A, B, C seien in dieser Reihenfolge kollinear. Man betrachte auf derselben Seite der Geraden AC die Strahlen AM und CN, die auf parallelen Geraden liegen, sodass $\Delta ABM \equiv \Delta CNB$.
   a) Zeigt, dass $AM \perp BC$.
   b) Berechnet das Maß des Winkels MBN.

10. Konstruiert durch die Eckpunkte eines beliebigen Dreiecks DEF Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten und erhaltet das Dreieck ABC, $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Zeigt, dass:
   a) $\Delta AEF \equiv \Delta DFE$;
   b) der Punkt D die Mitte der Strecke BC ist.

Minitest

30 Pkte. 1. Im Dreieck ABC liegt der Punkt D auf der Seite AB und der Punkt E auf der Seite AC. Die Geraden BE und CD schneiden sich im Punkt F, $BF \equiv CF$ und $DF \equiv EF$. Beweist, dass $BD \equiv CE$.

2. Die Punkte A, B, C, D sind in dieser Reihenfolge kollinear, $AB \equiv CD$, und der Punkt E liegt außerhalb der Geraden AD, sodass $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle EDA$ und $\sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle ECB$. Beweist, dass:

30 Pkte. **a)** $\Delta EAB \equiv \Delta EDC$;

30 Pkte. **b)** $\Delta EAC \equiv \Delta EDB$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

6.4 Methode der kongruenten Dreiecke. Anwendungen

L1 Die Eigenschaft der Punkte der Winkelhalbierenden eine Winkels. Die Eigenschaft der Punkte der Mittelsenkrechten einer Strecke

Durch Anwendung der *Methode der kongruenten Dreiecke* werden wir wichtige mathematische Eigenschaften beweisen, die wir in den vorangegangenen Lektionen erahnt haben, Eigenschaften von Punkten auf der *Winkelhalbierenden* und von Punkten auf der *Mittlsenkrechten einer Strecke*.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Anwendung 1

a) Jeder Punkt der Winkelhalbierenden ist gleich weit entfernt von den Schenkeln des Winkels.

b) Wenn ein innerer Punkt eines Winkels gleich weit entfernt von den Schenkeln des Winkels ist, dann liegt er auf der Winkelhalbierenden des Winkels

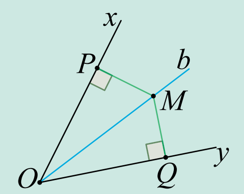
In mathematischer Sprache

Sei b die Winkelhalbierende des Winkels xOy, M ein Punkt im Inneren des Winkels und $MP \perp Ox$, $P \in Ox$, $MQ \perp Oy$, $Q \in Oy$.

a) Wenn $M \in b$, **dann** $MP \equiv MQ$.

b) Wenn $MP \equiv MQ$, **dann** $M \in b$.

Geometrische Darstellung



a) *Voraussetzung*: *b ist Winkelhalbierende des Winkels xOy und* $M \in b$.

Schlussfolgerung: $MP \equiv MQ$

Ausführlicher Beweis

In den rechtwinkligen Dreiecken MPO und MQO sind MP und MQ Seiten.
$MO \equiv MO$ (gemeinsame Hypotenuse). (1)
Aus b Winkelhalbierende des Winkels xOy und $M \in b$, folgt $\sphericalangle POM \equiv \sphericalangle QOM$. (2)
Aus (1) und (2) folgt laut Kongruenzfall *HW*, dass $\Delta MPO \equiv \Delta MQO$, falso sind die entsprechenden Elemente jeweils kongruent. Die Katheten MP und MQ sind entsprechende Seiten in den zwei Dreiecken, also $MP \equiv MQ$.

Mathematisch ausgedrückt:

In den rechtwinkligen Dreiecken MPO und MQO:

$$\left.\begin{array}{l} MO \equiv MO \text{ (gemeinsame Seite)} \\ \sphericalangle POM \equiv \sphericalangle QOM \text{ (} b \text{ Winkelhalbierende)} \end{array}\right\} \overset{HW}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow \Delta MPO \equiv \Delta MQO$.

$\Delta MPO \equiv \Delta MQO \Rightarrow MP \equiv MQ$.

b) *Voraussetzung*: b ist Winkelhalbierende des Winkels xOy, $M \in \text{Int}(\sphericalangle xOy)$ und $MP \equiv MQ$.

Schlussfolgerung: $M \in b$

Ausführlicher Beweis

In den rechtwinkligen Dreiecken ΔMPO und ΔMQO identifizieren wir die Winkel POM bzw. QOM.
$MO \equiv MO$ (gemeinsame Hypotenuse). (1)
$MP \equiv MQ$ (aus der Voraussetzung) (2)
Aus (1) und (2) folgt laut dem Kongruenzfall KH, dass $\Delta MPO \equiv \Delta MQO$, falso sind die entsprechenden Elemente jeweils kongruent. Die den Katheten MP und MQ gegenüberliegenden Winkel sind $\sphericalangle POM$ und $\sphericalangle QOM$.
Folglich: $\sphericalangle POM \equiv \sphericalangle QOM$, also $M \in b$.

Verfassung in mathematischer Sprache

In den rechtwinkligen Dreiecken MPO und MQO:

$$\left.\begin{array}{l} MO \equiv MO \text{ (gemeinsame Seite)} \\ MP \equiv MQ \text{ (aus der Voraussetzung)} \end{array}\right\} \overset{KH}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow \Delta MPO \equiv \Delta MQO$.

$\Delta MPO \equiv \Delta MQO \Rightarrow \sphericalangle POM \equiv \sphericalangle QOM$, folglich $M \in b$.

Die beiden bewiesenen Aussagen führen zu:

Lehrsatz der Eigenschaft der Punkte der Winkelhalbierenden eines Winkels

Ein innerer Punkt eines Winkels gehört der Winkelhalbierenden des Winkels an, genau dann wenn (wenn und nur wenn) er gleich weit enfernt von den Schenkeln des Winkels ist.

In mathematischer Sprache

Sei b die Winkelhalbierende des Winkels AOB, M ein Punkt im Inneren des Winkels und $MP \perp OA$, $P \in OA$, $MQ \perp OB$, $Q \in OB$.

$M \in b$, **wenn und nur wenn** $MP \equiv MQ$.

Wir merken uns

Die Winkelhalbierende eines Winkels ist die Menge der Punkte in der Ebene, die *innerhalb* des Winkels liegen und *gleich weit* von den Schenkeln des Winkels *entfernt* sind.

Anwendung 2

a) Jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Strecke ist gleich weit entfernt von den Endpunkten der Strecke.

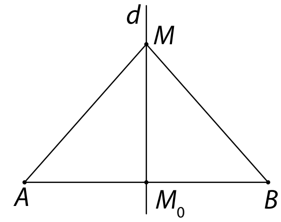
b) Jeder Punkt der Ebene, der von den Endpunkten der Strecke gleich weit entfernt ist, liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke.

In mathematischer Sprache

Sei d die Mittelsenkrechte der Strecke AB und M ein Punkt in der Ebene.

a) **Wenn** $M \in d$, **dann** $MA \equiv MB$.

b) **Wenn** $MA \equiv MB$, **dann** $M \in d$.



a) *Voraussetzung*: d Mittelsenkrechte der Strecke AB und $M \in d$.

Schlussfolgerung: $MA \equiv MB$

Ausführlicher Beweis

Wenn A, B, M kollinear sind, dann ist M die Mitte der Strecke AB, also $MA \equiv MB$.
Wenn A, B, M nicht kollinear sind, betrachten wir $\{M_0\} = AB \cap d$. Dann ist M_0 die Mitte der Strecke AB und $MM_0 \perp AB$.
In den Dreiecken MAM_0 und MBM_0 identifizieren wir:
$\sphericalangle MM_0A = \sphericalangle MM_0B = 90°$, $M_0A \equiv M_0B$ (M_0 Mitte) und $MM_0 \equiv MM_0$ (gemeinsame Seite).
Laut dem Kongruenzfall KK folgt: $\Delta MAM_0 \equiv \Delta MBM_0$.
Aus der Kongruenz der beiden Dreiecke folgt die Kongruenz der anderen drei Paare der entsprechenden Dreieckselemente.
So erhalten wir $MA \equiv MB$.

In mathematischer Sprache

Wenn A, B, M kollinear sind, dann ist M die Mitte der Strecke AB, also $MA \equiv MB$.
Wenn A, B, M nicht kollinear sind, betrachten wir: $\{M_0\} = AB \cap d$. Dann ist $MM_0 \perp AB$ und $M_0A \equiv M_0B$.
In ΔMAM_0 und ΔMBM_0, mit $\sphericalangle MM_0A = \sphericalangle MM_0B = 90°$, haben wir:

$$\left.\begin{aligned} M_0A &\equiv M_0B \\ MM_0 &\equiv MM_0 \ (\text{gemeinsame Seite}) \end{aligned}\right\} \overset{\text{KK}}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow \Delta MAM_0 \equiv \Delta MBM_0$.
$\Delta MAM_0 \equiv \Delta MBM_0 \Rightarrow MA \equiv MB$.

b) *Voraussetzung*: d Mittelsenkrechte der Strecke AB und $MA \equiv MB$.

Schlussfolgerung: $M \in d$

Ausführlicher Beweis

Wenn A, B, M kollinear sind, dann ist M die Mitte der Strecke AB, also $M \in d$.
Wenn A, B, M nicht kollinear sind, betrachten wir die Mitte der Strecke AB, M_0, und die Dreiecke MAM_0 und MBM_0, in denen wir identifizieren: $MA \equiv MB$ (aus der Voraussetzung), $M_0A \equiv M_0B$ (M_0 Mitte) und $MM_0 \equiv MM_0$ (gemeinsame Seite). Laut dem Kongruenzfall SSS folgt, dass $\Delta MAM_0 \equiv \Delta MBM_0$.
Aus der Kongruenz der beiden Dreiecke folgt die Kongruenz der anderen drei Paare der entsprechenden Dreieckselemente. So erhalten wir auch $\sphericalangle MM_0A \equiv \sphericalangle MM_0B$. (1)
$\sphericalangle MM_0A$ und $\sphericalangle MM_0B$ sind anliegend und supplementär. (2)
Aus (1) und (2) folgt $\sphericalangle MM_0A = \sphericalangle MM_0B = 90°$, d. h., $MM_0 \perp AB$, also $M \in d$.

In mathematischer Sprache

Wenn A, B, M kollinear sind, dann ist M die Mitte der Strecke AB, also $M \in d$.
Wenn A, B, M nicht kollinear sind, sei $M_0 \in AB$, $M_0A \equiv M_0B$. Dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} M_0A &\equiv M_0B \\ MM_0 &\equiv MM_0 \ (\text{gemeinsame Seite}) \\ MA &\equiv MB \ (\text{aus der Voraussetzung}) \end{aligned}\right\} \overset{\text{SSS}}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow \Delta MAM_0 \equiv \Delta MBM_0$.
$\Delta MAM_0 \equiv \Delta MBM_0 \Rightarrow \sphericalangle MM_0A \equiv \sphericalangle MM_0B$.
Da $\sphericalangle AM_0B = 180°$ und
$\sphericalangle AM_0B = \sphericalangle MM_0A + \sphericalangle MM_0B$, folgt
$\sphericalangle MM_0A = \sphericalangle MM_0B = 90°$, d. h., $MM_0 \perp AB$, also $M \in d$.

Die beiden bewiesenen Aussagen führen zu:

Lehrsatz der Eigenschaft der Punkte der Mittelsenkrechten einer Strecke

Ein Punkt gehört der Mittelsenkrechten einer Strecke an, wenn und nur wenn er von den Endpunkten der Strecke gleich weit entfernt ist.

In mathematischer Sprache

Sei d die Mittelsenkrechte der Strecke AB und M ein Punkt in der Ebene. Dann ist $M \in d$, **wenn und nur wenn** $MA \equiv MB$.

Wir merken uns

Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist die Menge der Punkte in der Ebene, die von den Endpunkten der Strecke gleich *weit entfernt* sind.

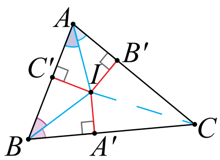
Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Wir sind nun in der Lage, zwei Ergebnisse, die wir in den vorangegangenen Lektionen durch Messen und Konstruieren mit geometrischen Instrumente erahnt haben, zu beweisen.

Anwendung 3

Die Winkelhalbierenden der Winkel eines Dreiecks treffen sich in demselben Punkt (sind in demselben Punkt konkurrent).

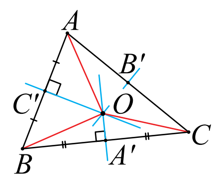
Sei I der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle BAC$ und der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle ABC$ und sei $IA' \perp BC$, $IB' \perp AC$, $IC' \perp AB$.
Da I auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle BAC$ liegt, folgt, dass $IB' \equiv IC'$.
Da I auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle ABC$ liegt, folgt, dass $IA' \equiv IC'$.
Aus $IB' \equiv IC'$ und $IA' \equiv IC'$ folgt $IB' \equiv IA'$, I liegt also auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle ACB$. Wir haben das Ergebnis von Anwendung 1 verwendet.



Anwendung 4

Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks treffen sich in demselben Punkt (sind in demselben Punkt konkurrent).

Sei O der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seite BC und der Mittelsenkrechten der Seite AB.
Da OA' die Mittelsenkrechte der Strecke BC ist, folgt, dass $OB \equiv OC$.
Da OC' die Mittelsenkrechte der Strecke AB ist, folgt, dass $OB \equiv OA$.
Aus $OB \equiv OC$ und $OB \equiv OA$ folgt: $OA \equiv OC$, also O liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke AC.



Übungen und Aufgaben

1. Das Dreieck AMN ist rechtwinklig, $\sphericalangle MAN = 90°$, und MB ist die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle AMN$, $B \in AN$. Sei C der Fußpunkt der Senkrechten aus B auf die Gerade MN. Beweist, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

2. Die Punkte A, B, P sind nicht kollinear. Die Senkrechte in A auf die Gerade AP schneidet die Senkrechte in B auf die Gerade PB im Punkt I.
a) Beweist, dass $\sphericalangle API \equiv \sphericalangle BPI$, wenn $AI \equiv BI$.
b) Wenn $\sphericalangle AIP \equiv \sphericalangle BIP$, beweist, dass $AP \equiv BP$.

3. Die Strecken AB und CD haben den Punkt O gemeinsam. Im Inneren des Winkels AOC befindet sich der Punkt M, der von den Schenkeln des Winkels AOC gleich weit entfernt ist, und im Inneren des Winkels BOD befindet sich der Punkt N, der von den Schenkeln des Winkels BOD gleich weit entfernt ist. Zeigt, dass die Punkte M, O und N kollinear sind.

4. Es sei das Dreieck ABC, $\sphericalangle ABC = 90°$, und D der symmetrische Punkt des Punktes C in Bezug auf Punkt B. Beweist, dass $AC \equiv AD$.

5. Im Dreieck ABC ist die Gerade AD die Mittelsenkrechte der Strecke BC, $D \in BC$. Auf der Strecke AD nimmt man die verschiedenen Punkte M und N an. Zeigt, dass $\sphericalangle MBN \equiv \sphericalangle MCN$.

6. Sei O ein Punkt auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB.
a) Stellt den Kreis $C(O, AO)$ geometrisch dar.
b) Beweist, dass der Punkt B auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OA liegt.

7. Die Mittelsenkrechte der Seite DE des Dreiecks DEF schneidet die Strecke DF im Punkt P, und O ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks. Beweist, dass:
a) $DF = PF + PE$;
b) die Dreiecke DOP und EOP den gleichen Umfang haben.

8. Im Dreieck ABC gilt $\sphericalangle A = 2 \cdot \sphericalangle B$, und die Mittelsenkrechte der Seite AB schneidet AB im Punkt D und BC im Punkt E. Beweist, dass:
a) $\Delta ADE \equiv \Delta BDE$;
b) AE die Winkelhalbierende des Winkels BAC ist.

Minitest

Das Dreieck *ABC* ist stumpfwinklig, $\sphericalangle ACB > 90°$, und *D* ist die Mitte der Seite *BC*.
Die Winkelhalbierende des Winkels *ACB* schneidet die Mittelsenkrechte der Seite *BC* im Punkt *E*, und *F* ist der symmetrische Punkt des Punktes *E* in Bezug auf die Gerade *AC*, $EF \cap AC = \{P\}$.

30 Pkte. **a)** Stellt die Konfiguration entsprechend den Angaben der Aufgabe geometrisch dar.

30 Pkte. **b)** Beweist, dass die Dreiecke BDE, CDE, EPC und FPC kongruent sind.

30 Pkte. **c)** Wenn *B, C, F* kollineare Punkt sind, berechnet das Maß des Winkels *ACB*.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L2 Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks

Zur Erinnerung

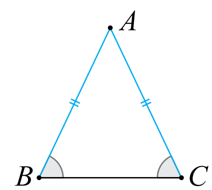
Die wichtigen Linien im Dreieck sind: die *Winkelhalbierenden* der Winkel, die *Mittelsenkrechten* der Seiten, die *Höhen* und die *Seitenhalbierenden* des Dreiecks.

Wir wenden an und erkennen Zusammenhänge

Anwendung 1

a) Beweist, dass in einem gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Basis kongruent sind.

b) Formuliert einen Kehrsatz der in a) bewiesenen Aussage und zeigt, dass sie wahr ist.



a) *Voraussetzung:* Im ΔABC gilt $AB \equiv AC$.

Schlussfolgerung: $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$.

Beweis

Wir betrachten die Dreiecke *ABC* und *ACB*: $\left.\begin{aligned} AB &\equiv AC \text{ (aus der Voraussetzung)} \\ AC &\equiv AB \text{ (aus der Voraussetzung)} \\ BC &\equiv BC \text{ (gemeinsame Seite)} \end{aligned}\right\} \overset{SSS}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta ACB \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C.$

b) Wenn zwei Winkel eines Dreiecks kongruent sind, dann ist das Dreieck gleichschenklig und die Basis wird durch die Scheitel der beiden Winkel bestimmt.

Voraussetzung: In ΔABC gilt $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$.

Schlussfolgerung: $AB \equiv AC$.

Beweis

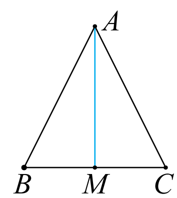
Wir betrachten die Dreiecke *ABC* und *ACB*: $\left.\begin{aligned} \sphericalangle B &\equiv \sphericalangle C \text{ (gemeinsame Winkel)} \\ BC &\equiv BC \text{ (gemeinsame Seite)} \\ \sphericalangle C &\equiv \sphericalangle B \text{ (aus der Voraussetzung)} \end{aligned}\right\} \overset{WSW}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta ACB \Rightarrow AB \equiv AC.$

Wir merken uns

Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn und nur wenn es zwei kongruente Winkel hat.

Anwendung 2

In einem gleichschenkligen Dreieck *stimmen die wichtigen Linien*, die der Basis entsprechen, überein.



Voraussetzung:

In ΔABC, $AB \equiv AC$.

Schlussfolgerung: Die Winkelhalbierende des Winkels *A*, die Mittelsenkrechte der Seite *BC*, die Seitenhalbierende aus *A* und die Höhe aus *A* liegen auf der gleichen Geraden.

Beweis: M sei die Mitte der Seite BC. Dann ist AM die Seitenhalbierende aus A. (1)

Betrachten wir die Dreiecke AMB und AMC.

$$\left.\begin{aligned} AB &\equiv AC \text{ (aus der Voraussetzung)} \\ MB &\equiv MC \text{ (}M\text{ Mitte)} \\ AM &\equiv AM \text{ (gemeinsame Seite)} \end{aligned}\right\} \overset{SSS}{\Rightarrow} \Delta AMB \equiv \Delta AMC.$$

Wir erhalten: $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MAC$, d. h., AM ist die Winkelhalbierende des Winkels A. (2)

$\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle AMC$. Aber $\sphericalangle AMB$ und $\sphericalangle AMC$ sind anliegend und supplementär, also $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMC = 90°$.

Dann ist $AM \perp BC$, AM ist die Höhe des Dreiecks. (3)

Aus $AM \perp BC$ und M Mitte der Seite BC folgt, dass AM die Mittelsenkrechte der Seite BC ist. (4)

Portfoliothema. Beweist mithilfe der Methode der kongruenten Dreiecke, dass:
Wenn zwei der Bedingungen (1), (2), (3), (4) erfüllt sind, dann ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit der Basis BC.

Wir merken uns

Um zu beweisen, dass ein Dreieck gleichschenklig ist, genügt es, wenn *zwei der wichtigen Linien des Dreiecks übereinstimmen* (Seitenhalbierende und Mittelsenkrechte oder Seitenhalbierende und Winkelhalbierende oder Seitenhalbierende und Höhe oder Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende oder Winkelhalbierende und Höhe). Die Basis (Grundlinie) des Dreiecks ist die Seite, die den übereinstimmenden wichtigen Linien entspricht.

Übungen und Aufgaben

1. Konstruiert das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis BC in den folgenden Fällen:
a) $BC = 5$ cm und $\sphericalangle B = 75°$;
b) $AB = 6$ cm und $\sphericalangle A = 50°$.

2. Das Dreieck ABC hat $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm und den Umfang von 19 cm. Beweist, dass das Dreieck gleichschenklig ist. Gebt die Basis des Dreiecks an.

3. Das Dreieck DEF hat die Winkel $\sphericalangle D = 65°$ und $\sphericalangle F = 50°$. Beweist, dass das Dreieck gleichschenklig ist. Gebt die Basis des Dreiecks an.

4. Berechnet die Maße der Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn bekannt ist, dass einer der Winkel das Maß:
a) 48°; **b)** 90°; **c)** 125° hat.

5. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit $AB \equiv AC$, und D ist ein Punkt auf der Seite BC.
Übertragt folgende Aussagen in eure Hefte und füllt die Lücken aus, sodass ihr richtige Aussagen erhaltet:
a) Wenn $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$ und $BC = 10$ cm, dann ist $CD = \ldots$ cm.
b) Wenn $BD \equiv CD$ und $\sphericalangle BAD = 20°$, dann ist $\sphericalangle BAC = \ldots°$.
c) Wenn $AD \perp BC$ und $BD = 3{,}5$ cm, dann ist $CD = \ldots$ cm und $BC = \ldots$ cm.
d) Wenn $AD \perp BC$ und $\sphericalangle B = 52°$, dann ist $\sphericalangle CAD = \ldots°$.
e) Wenn $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$, dann ist $\sphericalangle ADB = \ldots°$.
f) Wenn $\sphericalangle ADC = 90°$ und $\sphericalangle BAC = 130°$, dann $\sphericalangle BAD = \ldots°$.

6. Im Inneren des gleichschenkligen Dreiecks ABC mit der Basis BC befindet sich der Punkt P.
a) Wenn bekannt ist dass $BP \equiv CP$, beweist, dass $AP \perp BC$.
b) Wenn bekannt ist, dass $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle CAP$, beweist, dass $BP \equiv CP$.
c) Beweist, dass, wenn AP die Winkelhalbierende des Winkels BAC ist, dann ist die Halbgerade PD die Winkelhalbierende des Winkels BPC.

7. Beweist, dass in jedem gleichschenkligen Dreieck die Aussagen gelten:
a) Die Seitenhalbierenden, die den kongruenten Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks entsprechen, sind kongruent.
b) Die Höhen, die den kongruenten Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks entsprechen, sind kongruent.

8. Zeigt, dass die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks spitz sind.

9. Im Dreieck DEF ist $DE \equiv DF$ und $\sphericalangle EDF = 36°$. Die Winkelhalbierende des Winkels DEF schneidet die Seite DF im Punkt M. Beweist, dass die Dreiecke DEM und EFM gleichschenklig sind.

10. Das Dreieck APQ ist gleichschenklig. Berechnet die Länge der Seite PQ für die folgenden Daten unter Berücksichtigung aller möglichen Fälle.
a) $AP = 13$ cm, $AQ = 17{,}5$ cm;
b) $AP = 50$ mm, $AQ = 10$ cm.

11. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und D ist ein Punkt auf der Basis BC des Dreiecks. Man konstruiert $DE \perp AB$, $E \in AB$ und $DF \perp AC$, $F \in AC$. Wenn bekannt ist, dass $DE = DF$, beweist:
a) $\Delta ADE \equiv \Delta ADF$.
b) ΔDEF ist gleichschenklig.

12. Im Dreieck MNP hat der Außenwinkel mit dem Scheitel in M das Maß 135° und $\sphericalangle N = 2 \cdot \sphericalangle P$. Beweist, dass das Dreieck MNP gleichschenklig ist.

13. Eine Gerade d, die parallel zur Basis AC des gleichschenkligen Dreiecks ABC verläuft, schneidet die Seiten AB und BC in den Punkten P bzw. Q. Beweist, dass:
a) $\sphericalangle APQ \equiv \sphericalangle CQP$; **b)** $AP \equiv CQ$.

14. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit $AB = AC$. Die Halbgerade AD ist Winkelhalbierende eines Außenwinkels des Dreiecks.
a) Beweist, dass $AD \parallel BC$.
b) Berechnet die Winkelmaße des Dreiecks, wobei bekannt ist, dass $\sphericalangle CAD = 100°$.

15. Die Winkelhalbierenden der Winkel A und B des Dreiecks ABC schneiden sich im Punkt I.
Die Parallele durch I zur Geraden AB schneidet die Seite BC im Punkt M und die Seite AC im Punkt N.
a) Beweist, dass die Dreiecke AMI und BNI gleichschenklig sind.
b) Entscheide und argumentiere, ob die Gleichheit $AM + BN = MN$ stattfindet.

Minitest

1. Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.
15 Pkte. **a)** Die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 13 cm und der Umfang des Dreiecks 34 cm. Dann hat jede der anderen Seiten eine Länge von:
A. 105 mm; **B.** 11 cm; **C.** 102 mm; **D.** 15 cm.
15 Pkte. **b)** Die Strecke AD ist die Höhe des Dreiecks ABC mit $AB = AC$. Wenn $\sphericalangle BAD = 35°$, dann hat der Winkel ACD das Maß:
A. 35°; **B.** 55°; **C.** 70°; **D.** 90°.

30 Pkte. **2.** Beweist, dass in einem gleichschenkligen Dreieck die Mittelsenkrechte der Basis die der Basis des Dreiecks gegenüberliegende Ecke enthält.

30 Pkte. **3.** Berechnet die Winkelmaße des gleichschenkligen Dreiecks ABC, wenn bekannt ist, dass $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 136°$. Untersucht alle möglichen Fälle.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L3 Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks

Zur Erinnerung

Ein Dreieck wird *gleichseitiges Dreieck* genannt, wenn alle seine Seiten kongruent sind.	ΔABC ist gleichseitig, wenn $AB \equiv AC \equiv BC$.
Jedes gleichseitige Dreieck ist gleichschenklig und hat als Basis jedwelche seiner Seiten.	Wenn ΔABC gleichseitig ist, dann ist ΔABC gleichschenklig.

Der Mittelpunkt des Inkreises eines Dreiecks ist der Punkt, in dem sich die Winkelhalbierenden seiner Winkel schneiden.
Der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks ist der Punkt, in dem sich die Mittelsenkrechten seiner Seiten schneiden.
Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Punkt, in dem sich seine Seitenhalbierenden schneiden.
Das Orthozentrum (*der Höhenschnittpunkt*) eines Dreiecks ist der Punkt, in dem sich seine Höhen schneiden.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Anwendung 1
a) Die Winkel jedes gleichseitigen Dreiecks sind kongruent und haben das Maß 60°.
b) Ein Dreieck, dessen Winkel alle untereinander kongruent sind, ist ein gleichseitiges Dreieck.

a) *Voraussetzung*:
Im $\Delta\, ABC$, $AB \equiv AC \equiv BC$.

Schlussfolgerung: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60^{\circ}$.

Beweis:
$AB \equiv AC \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ (Winkel an der Basis des gleichschenkligen Dreiecks) (1)
$BA \equiv BC \Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ (Winkel an der Basis des gleichschenkligen Dreiecks) (2)
Aus (1) und (2) folgt, dass $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. Aber $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^{\circ}$, also $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60^{\circ}$.

b) *Voraussetzung*:
În $\Delta\, ABC$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C$.

Schlussfolgerung: $AB \equiv AC \equiv BC$.

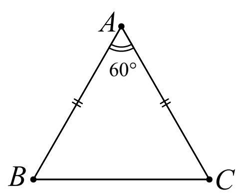
Beweis:
$\sphericalangle A = \sphericalangle B \Rightarrow \Delta\, ABC$ ist gleichschenklig mit Basis AB, d. h. $CA \equiv CB$. (1)
$\sphericalangle B = \sphericalangle C \Rightarrow \Delta\, ABC$ ist gleichschenklig mit Basis BC, d. h. $AB \equiv AC$. (2)
Aus (1) und (2) geht hervor, dass $AB \equiv AC \equiv BC$, also ΔABC gleichseitig ist.

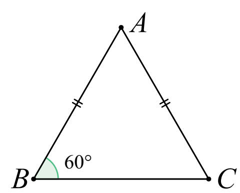
Wir merken uns

Alle Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind kongruent, und jeder hat das Maß 60°.
Ein Dreieck, dessen Winkel alle untereinander kongruent sind, ist ein gleichseitiges Dreieck.

Anwendung 2. Ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Winkel von 60° ist gleichseitig.

Interpretation der Aussage:
Sei ΔABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis BC.
Zwei Situationen sind möglich:
1. Der 60°-Winkel liegt gegenüber der Basis;
2. Der 60°-Winkel ist der Basis benachbart (anliegend).





1. Fall

Voraussetzung: Im ΔABC, $AB \equiv AC$, gilt $\sphericalangle A = 60^{\circ}$.
Schlussfolgerung: ΔABC ist gleichseitig.

Beweis: $AB \equiv AC \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ (Winkel an der Basis) (1)
Aber $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^{\circ}$, also $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 120^{\circ}$.
Aus (1) folgt $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 60^{\circ}$. Laut *Anwendung* 1 ist ΔABC gleichseitig.

2. Fall

Voraussetzung: Im ΔABC, $AB \equiv AC$ und $\sphericalangle B = 60^{\circ}$.
Schlussfolgerung: ΔABC ist gleichseitig.

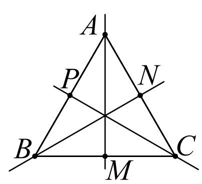
Beweis: $AB \equiv AC \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ (Winkel an der Basis), also $\sphericalangle C = 60^{\circ}$. Aber $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^{\circ}$, d. h., $\sphericalangle A + 120^{\circ} = 180^{\circ}$, also $\sphericalangle A = 60^{\circ}$. Laut *Anwendung* 1 ist ΔABC gleichseitig.

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Anwendung 3. In einem gleichseitigen Dreieck liegen die entsprechenden wichtigen Linien für jeden Eckpunkt des Dreiecks auf der gleichen Geraden.

Voraussetzung:
$\Delta\, ABC$ gleichseitig.

Schlussfolgerung: Für jeden Eckpunkt des Dreiecks liegen die Winkelhalbierende des entsprechenden Winkels, die Mittelsenkrechte und die Seitenhalbierende der gegenüberliegenden Seite sowie die Höhe dieses Eckpunkts auf derselben Geraden.



Beweis: Wir behandeln das gleichseitige Dreieck *ABC* nacheinander als gleichschenklig, mit den Basen *BC, AC* und *AB*.
M, N, P seien die Mittelpunkte der Seiten *BC, AC* bzw. *AB*.
Aus $\triangle ABC$ gleichschenklig mit der Basis *BC* folgt, dass der Strahl *AM* Winkelhalbierende ist, die Gerade *AM* Mittelsenkrechte ist, die Strecke *AM* auch Seitenhalbierende und Höhe ist. (1)
Aus $\triangle ABC$ gleichschenklig, mit Basis *AC* folgt, dass der Strahl BN Winkelhalbierende ist, die Gerade *BN* Mittelsenkrechte ist, die Strecke *BN* auch Seitenhalbierende und Höhe ist. (2)
Aus $\triangle ABC$ gleichschenklig mit Basis *AB* folgt, dass der Strahl *CP* Winkelhalbierende ist, die Gerade *CP* Mittelsenkrechte ist, die Strecke *CP* auch Seitenhalbierende und Höhe ist. (3)

Portfoliothema. Wenn zwei der wichtigen Linien des Dreiecks aus zwei Eckpunkten sich überlappen, dann ist das Dreieck gleichseitig.

Wir merken uns

Um zu beweisen, dass ein Dreieck gleichseitig ist, genügt es, dass *sich* für zwei *Eckpunkte zwei der wichtigen Linien des Dreiecks überschneiden* (Seitenhalbierende und Mittelsenkrechte oder Seitenhalbierende und Winkelhalbierende oder Seitenhalbierende und Höhe oder Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende oder Mittelsenkrechte und Höhe oder Winkelhalbierende und Höhe).

Anwendung 3 führt zu folgendem wichtigen Ergebnis:

In einem gleichseitigen Dreieck fallen der *Mittelpunkt des Inkreises* des Dreiecks, der *Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks*, der *Schwerpunkt* und das *Orthozentrum des* Dreiecks zusammen (befinden sich in demselben Punkt).

Übungen und Aufgaben

1. Konstruiert:
   a) das gleichseitige Dreieck *ABC* mit den Seiten von 4 cm;
   b) das gleichseitige Dreieck *PQR* mit der Höhe 3 cm.

2. Es sei das gleichseitige Dreieck *DEF*. Eine zur Seite *EF* parallele Gerade schneidet die Seiten *DE* und *DF* in den Punkten *M* bzw. *N*. Zeigt, dass das Dreieck *DMN* gleichseitig ist.

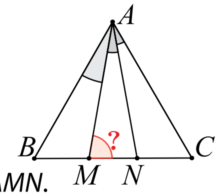
3. Im Dreieck *ABC* ist $AB = AC = 37$ cm, und der Umfang des Dreiecks beträgt 111 cm. Zeigt, dass das Dreieck *ABC* gleichseitig ist.

4. Anna und Diana betrachten die Daten über die Seitenlängen und die Winkelmaße der Dreiecke in der Tabelle.
Anna sagt, dass drei der Dreiecke gleichseitig sind. Diana sagt, dass alle Dreiecke gleichseitig sind. Gebt an, wer richtig geantwortet hat. Begründet eure Antwort.

ΔABC	$AB = 3$ cm, $BC = 30$ mm, $CA = 0{,}3$ dm
ΔDEF	$\sphericalangle D = \sphericalangle E = 2 \cdot \sphericalangle F$
ΔGHI	$GH = GI = 4{,}5$ cm und $U_{\Delta GHI} = 13{,}5$ cm
ΔLMN	$\sphericalangle L = \sphericalangle M$ und $MN = LM$

5. Beweist, dass das Dreieck, in dem die Länge jeder Seite das arithmetische Mittel der Längen der anderen Seiten ist, ein gleichseitiges Dreieck ist.

6. Die Punkte *M, N* liegen auf der Seite *BC* des gleichseitigen Dreiecks *ABC*, sodass $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle NAC$.
Berechnet das Maß des Winkels *AMN*.



7. Es sei das Dreieck *MNP* mit $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle N \equiv \sphericalangle P$. Auf den Seiten *MN, NP, PM* liegen die Punkte *A, B, C,* sodass $MA \equiv NB \equiv PC$. Beweist, dass das Dreieck *ABC* gleichseitig ist.

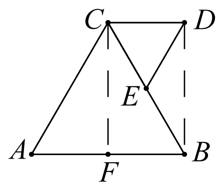
8. Die Dreiecke *DEF* und *DPQ* sind gleichseitig, $P \in DE$ und $Q \in DF$. Beweist, dass $PQ \parallel EF$.

9. Im gleichseitigen Dreieck *ABC* ist *BD* die Höhe, *CE* ist Seitenhalbierende und $BD \cap CE = \{O\}$. Beweist, dass:
   a) das Dreieck *ADE* gleichseitig ist;
   b) $AO \perp DE$;
   c) die Punkte *A, O* und die Mitte der Seite *BC* kollinear sind.

10. Man bezeichnet mit U den Umfang des gleichseitigen Dreiecks ABC und mit u den Umfang des Dreiecks mit den Eckpunkten in der Mitte der Seiten des Dreiecks ABC. Beweist, dass $U = 2 \cdot u$ ist.

11. Der Punkt A liegt auf der Strecke BC. Beiderseits der Geraden BC liegen die gleichseitigen Dreiecke ABD und ACE.
- **a)** Fertigt eine Zeichnung an, die den Daten der Aufgabe entspricht.
- **b)** Zeigt, dass die Punkte A, D und E kollinear sind.
- **c)** Zeigt, dass $\Delta ABE \equiv \Delta ADC$.

12. Die Dreiecke ABC und CDE sind gleichseitig, und die Punkte E und F sind die Mittelpunkte der Seiten BC bzw. AB.
- **a)** Zeigt, dass $CD \parallel AB$ ist.
- **b)** Beweist, dass $BD \equiv CF$.



13. Der Punkt G ist der Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks MNP, und L und K sind die Mittelpunkte der Strecken NG bzw. PG.
- **a)** Beweist, dass $\Delta\, MGL \equiv \Delta\, MGK$.
- **b)** Berechnet die Maße der Winkel des Dreiecks GLK.

Minitest

1. Übertragt die Tabelle in eure Hefte und tragt ***W*** ein, wenn die Aussage wahr ist, und ***F***, wenn die Aussage falsch ist.

4 × 10 Pkte.

Aussage	***W/F***
A_1: Wenn die Seitenhalbierende und die entsprechende Höhe einer Seite eines Dreiecks übereinstimmen, dann ist das Dreieck gleichseitig.	
A_2: Wenn für zwei Eckpunkte eines Dreiecks die Seitenhalbierende und die Höhe übereinstimmen, dann ist das Dreieck gleichseitig.	
A_3: Wenn im Dreieck ABC AD die Winkelhalbierende des Winkels BAC ist, $D \in BC$ und $BD = DC = 2$ cm, dann hat das Dreieck ABC einen Umfang von 12 cm.	
A_4: Wenn in einem Dreieck alle Seiten kongruent sind, dann sind auch alle Winkel kongruent.	

2. Die Punkte A, B und C sind in dieser Reihenfolge kollinear.

10 Pkte. **a)** Konstruiert auf der gleichen Seite der Geraden AC die gleichseitigen Dreiecke ABD und BCE.

20 Pkte. **b)** Beweist, dass die Geraden BD und CE parallel sind.

20 Pkte. **c)** Beweist, dass $\Delta\, ABE \equiv \Delta\, DBC$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

L4 Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks. Lehrsatz von Pythagoras

Wir entdecken, verstehen und veranschaulichen

Anwendung 1

Schritt 1. Konstruiert in euren Heften das rechtwinklige Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AC = 4$ cm, $\sphericalangle B = 30^\circ$.

Schritt 2. Stellt den Punkt D, den symmetrischen Punkt des Punktes C in Bezug auf die Gerade AB, dar.

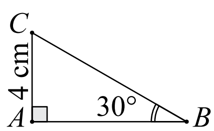
Schritt 3. Leitet die Art des Dreiecks ABD ab. Begründet.

Schritt 4. Entscheidet und argumentiert die Art des Dreiecks BCD.

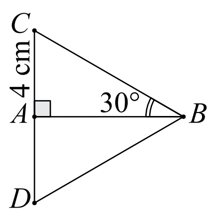
Schritt 5. Gebt an, ob $AC = \frac{BC}{2}$, ist, und begründet eure Antwort.

Lösung

Schritt 1.



Schritt 2.



Schritt 3. Wenn D der Symmetriepunkt von C in Bezug auf AB ist, haben wir $CD \perp AB$. Da $CA \perp AB$, folgt, dass C, A, D kollinear sind, und A ist der Fußpunkt der Senkrechten aus C auf AB. Aus der Symmetrie folgt auch, dass $AC \equiv AD$. Wir betrachten $\triangle ABC$ und $\triangle ABD$, rechtwinklig, $AB \equiv AB$ und $AC \equiv AD$. Laut dem Kongruenzfall KK folgt: $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$. Daraus folgt: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC = 30°$, d. h., $\triangle ABD$ ist rechtwinklig in A, mit $\sphericalangle ABD = 30°$.
Schritt 4: Aus $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ folgt: $BC \equiv BD$, also ist ΔBCD gleichschenklig. Aber $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle ABD$ sind anliegend, $\sphericalangle ABC = 30°$ und $\sphericalangle ABD = 30°$, also $\sphericalangle CBD = 60°$. ΔBCD ist gleichschenklig und hat einen Winkel von 60°, d. h. es ist gleichseitig.
Schritt 5: Im gleichseitigen Dreieck BCD gilt: $BC = CD = BD$, und A ist die Mitte der Seite CD. Daher ist $AC = \frac{CD}{2} = \frac{BC}{2}$.

Lehrsatz 1. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die dem Winkel von 30° gegenüberliegende Kathete halb so lang wie die Hypotenuse.	Wenn in ΔABC $\sphericalangle A = 90°$ und $\sphericalangle B = 30°$, dann $AC = \frac{BC}{2}$. Wenn in ΔABC $\sphericalangle A = 90°$ und $\sphericalangle C = 30°$, dann $AB = \frac{BC}{2}$.
Lehrsatz 2. (Kehrsatz des Lehrsatzes 1) Wenn in einem Dreieck eine Seite dem Winkel von 30° gegenüberliegt und ihre Länge halb so groß ist wie die einer anderen Seite, dann ist das Dreieck rechtwinklig.	Wenn in ΔABC $\sphericalangle B = 30°$ und $AC = \frac{BC}{2}$, dann $\sphericalangle A = 90°$. Wenn in ΔABC $\sphericalangle B = 30°$ und $AC = \frac{AB}{2}$, dann $\sphericalangle C = 90°$.

Portfoliothema. Formuliert und löst eine praktische Aufgabe, um Lehrsatz 2 zu beweisen.
Anleitung: Für $\sphericalangle B = 30°$ konstruiert ΔABD, sodass C und D beiderseits der Geraden AB liegen, $\sphericalangle ABD = 30°$ und $BD = BC$. Ihr leitet daraus ab, dass das Dreieck BCD gleichseitig ist und $AC + AD = CD$.

Anwendung 2

Schritt 1. Stellt ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90°$ dar, und markiert mit O die Mitte der Seite BC.

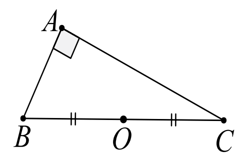
Schritt 2. Zeichnet den Punkt D, den Symmetriepunkt von A in Bezug auf O.

Schritt 3. Beweist, dass $CD \parallel AB$.

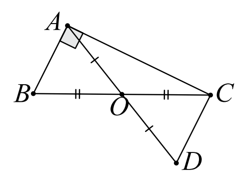
Schritt 4. Beweist, dass die Dreiecke BAC und DCA kongruent sind.

Schritt 5. Leitet daraus ab und argumentiert, dass $AO \equiv \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2}$.

Schritt 1.



Schritt 2.



Lösung
Schritt 3. Die Konstruktion ergibt die kollinearen Punkte A, O, D und die kollinearen Punkte B, O, C, sodass $\sphericalangle AOB$ und $\sphericalangle DOC$ Scheitelwinkel sind.
In den Dreiecken AOB und DOC gilt: Der Punkt O ist die Mitte der Strecke BC, also $OB \equiv OC$. (1)
Der Punkt O ist die Mitte der Strecke AD, also $OA \equiv OD$. (2)
$\sphericalangle AOB$ und $\sphericalangle DOC$ sind Scheitelwinkel, also $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle DOC$. (3)
Aus (1), (2) und (3) folgt nach dem Kongruenzkriterium SWS: $\Delta AOB \equiv \Delta DOC$, also $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CDO$. Dann bilden die Geraden CD und AB kongruente innere Wechselwinkel mit der Sekante AD, d. h., $CD \parallel AB$.
Schritt 4. Aus $CD \parallel AB$ folgt, dass die Geraden CD und AB mit der Sekante AC die inneren Supplementwinkel BAC und DCA auf derselben Seite der Sekanten bilden. Da $\sphericalangle BAC = 90°$ ist, ergibt sich, dass $\sphericalangle DCA = 90°$, d. h., ΔDCA ist rechtwinklig in C.
In den rechtwinkligen Dreiecken ΔBAC und ΔDCA: $AB \equiv CD$ (aus $\Delta AOB \equiv \Delta DOC$); $AC \equiv CA$ (gemeinsame Kathete).
Laut dem Kongruenzfall KK folgt, dass $\Delta BAC \equiv \Delta DCA$.
Schritt 5. Aus $\Delta BAC \equiv \Delta DCA$ folgt, dass $BC \equiv DA$. Aber O ist die Mitte der Strecke AD, also $AO = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2}$.

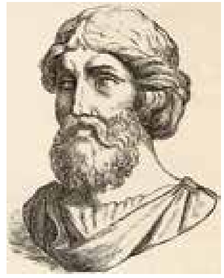
Lehrsatz **3.** In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Seitenhalbierenden auf die Hypotenuse gleich der halben Länge der Hypotenuse.	Wenn in ΔABC $\sphericalangle A = 90°$ und AM die Seitenhalbierende ist, dann ist $AM = \frac{BC}{2}$.
Lehrsatz **4.** (Kehrsatz des Lehrsatzes 3) Wenn eine Seitenhalbierende eines Dreiecks halb so groß ist wie die Seite, auf die sie fällt, dann ist das Dreieck rechtwinklig.	Wenn in ΔABC AM Seitenhalbierende ist und $AM = \frac{BC}{2}$, dann $\sphericalangle A = 90°$.

Portfoliothema. Formuliert und löst eine Aufgabe, um den Lehrsatz 4 zu beweisen.

Ein wenig Geschichte

Pythagoras war ein großer griechischer Mathematiker und Philosoph, der auch dank des Satzes, der seinen Namen trägt, in die Geschichte einging. Hier sind zwei seiner berühmten Aussprüche:

„Sage nicht wenig mit vielen Worten, sondern viel mit wenigen Worten.“
„Denke nach, forsche, reflektiere, bevor du arbeitest.“

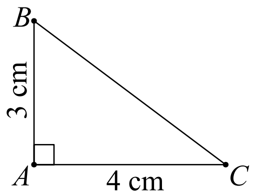


Pythagoras

Wir lösen und beobachten

Gelöste Aufgabe

a) Stellt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 3 cm und 4 cm dar.
b) Messt mit dem skalierten Lineal die Länge der Hypotenuse in cm und berechnet das Quadrat der gefundenen natürlichen Zahl.
c) Vergleicht *die Summe der Quadrate der Längen der Katheten* mit dem *Quadrat der Länge der Hypotenuse*.

Lösung: **a)**	**b)**	**c)**
	$BC = 5$ cm $BC^2 = 5^2 = 25$ (cm²).	$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ (cm²). $BC^2 = 25$ (cm²). folglich, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Bemerkung. Die Zahlen 3, 4, 5 heißen *pythagoreische Zahlen*

Lehrsatz 5 (Lehrsatz von Pythagoras)

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Länge der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Längen der Katheten.

In mathematischer Sprache

Wenn ΔABC rechtwinklig ist mit $\sphericalangle BAC = 90°$, dann $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
Wenn wir die Längen der Seiten: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ bezeichnen, dann lautet die Beziehung: $a^2 = b^2 + c^2$.

Lehrsatz 6 (Kehrsatz des Lehrsatzes von Pythagoras)

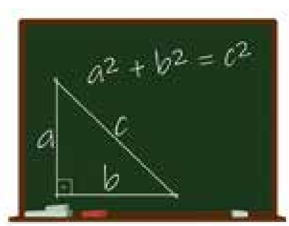
Wenn in einem Dreieck das Quadrat der Länge einer Seite gleich der Summe der Quadrate der Längen der beiden anderen Seiten ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

In mathematischer Sprache

Wenn im ΔABC die Gleichheit $BC^2 = AB^2 + AC^2$ auftritt, dann ist ΔABC rechtwinklig mit $\sphericalangle BAC = 90°$.
Wenn wir die Längen der Seiten $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ bezeichnen, dann lautet die Aussage:
Wenn im ΔABC die Gleichheit $a^2 = b^2 + c^2$ auftritt, dann ist ΔABC rechtwinklig mit $\sphericalangle A = 90°$.

Gelöste Aufgabe

a) Ein Grundstück in Form eines rechtwinkligen Dreiecks hat die Katheten $a = 8$ m und $b = 6$ cm. Berechnet die Länge der Hypotenuse.
b) Entscheidet und argumentiert, ob ein Blumenbeet in Form eines rechtwinkligen Dreiecks angelegt werden kann, sodass seine Seitenlängen $a = 5$ m, $b = 12$ m und $c = 13$ m betragen.
c) Gebt anhand der in den Unterpunkten a) und b) genannten Beispiele zwei Tripel von pythagoreischen Zahlen an.



Lösung

a) Laut dem Lehrsatz von Pythagoras ist $c^2 = a^2 + b^2$, d. h., $c^2 = 64 + 36 = 100 = 10^2$, also c = 10 m.
b) $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. Laut dem Kehrsatz des Lehrsatzes von Pythagoras ist das Dreieck rechtwinklig.
c) (6, 8, 10); (5, 12, 13) sind pythagoreische Tripel, da $6^2 + 8^2 = 10^2$ und $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Übungen und Aufgaben

1. Konstruiert für jeden der Fälle das rechtwinklige Dreieck:

a) $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm;

b) $\sphericalangle A = 90^\circ$, $BC = 6$ cm, $\sphericalangle C = 40^\circ$.

2. Es sei das gleichschenklige Dreieck ABC, und der Punkt M sei der Mittelpunkt der Basis BC. Beweist, dass die Dreiecke ABM und ACM rechtwinklig sind.

3. Das Dreieck DEF ist rechtwinklig, $\sphericalangle D = 90°$. Berechnet:

a) das Maß des Winkels F, wenn $\sphericalangle E = 33^\circ$;

b) das Maß der Winkel E und F, wenn $\sphericalangle F = \sphericalangle E + 20^\circ$.

4. Berechnet die Winkelmaße eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn bekannt ist, dass einer der Außenwinkel des Dreiecks 132° beträgt.

5. Die Maße der Winkel eines Dreiecks sind zu den Zahlen 1, 2 und 3 direkt proportional. Zeigt, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

6. Betrachtet das Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90°$. Übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken so aus, dass ihr richtige Aussagen erhaltet:

a) Wenn $BC = 20$ cm und $\sphericalangle B = 30^\circ$, dann ist $AC = \ldots$ cm.

b) Wenn $AB = 7$ cm und $\sphericalangle C = 30^\circ$, dann ist $BC = \ldots$ cm.

c) Wenn $BC = 32$ cm und $\sphericalangle B = 60^\circ$, dann ist $AB = \ldots$ cm.

d) Wenn $AC = 8$ cm und $\sphericalangle C = 2 \cdot \sphericalangle B$, dann ist $BC = \ldots$ cm.

7. Wir verlängern die Seite BC des gleichseitigen Dreiecks ABC um die Strecke $CD \equiv BC$.

a) Berechnet das Maß von $\sphericalangle ADB$.

b) Beweist, dass das Dreieck ABD rechtwinklig ist.

8. Sei DM die Höhe, die der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks DEF entspricht.
Zeigt, dass $\sphericalangle DEM \equiv \sphericalangle FDM$ und $\sphericalangle EDM \equiv \sphericalangle DFE$.

9. Die Strecke AD ist die Seitenhalbierende, die der Hypotenuse BC des Dreiecks ABC entspricht.
Übertragt in eure Hefte und füllt die Lücken aus, um richtige Aussagen zu bilden:

a) Wenn $BC = 12$ cm, dann ist $AD = \ldots$ cm.

b) Wenn $AD = 8{,}5$ cm, dann ist $BC = \ldots$ cm.

c) Wenn $BD = 4$ cm, dann ist $AD = \ldots$ cm.

d) Wenn $AC = 15$ cm und $\sphericalangle B = 30^\circ$, dann ist das Dreieck ACD … und $AD = \ldots$ cm.

10. Im Dreieck ABC ist M die Mitte der Seite BC und $AM \equiv BM \equiv CM$. Beweist, dass $\sphericalangle A = 90^\circ$.

11. Das Dreieck LMN ist gleichseitig, und der Punkt G ist sein Schwerpunkt. Sei P der symmetrische Punkt des Punktes G in Bezug auf die Gerade MN.

a) Berechnet das Maß des Winkels GMP.

b) Beweist, dass das Dreieck LMP rechtwinklig ist.

12. Stellt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 5 cm und 12 cm dar.

a) Bestimmt die Länge der Hypotenuse mithilfe des Messlineals.

b) Bestimmt die Länge der Hypotenuse mithilfe des Lehrsatzes von Pythagoras.

c) Findet den Radius des Umkreises des Dreiecks heraus und konstruiert diesen Kreis mithilfe des Zirkels.

13. Betrachtet das Dreieck ABP mit $AP \perp PB$.

a) Wenn $AP = 9$ cm, $BP = 12$ cm, findet AB.

b) Wenn $AB = 20$ cm, $AP = 16$ cm, findet BP.

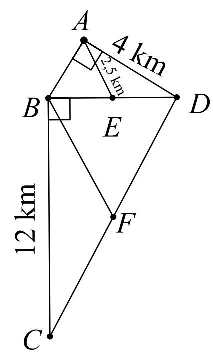
c) Wenn $AP = x$ cm, $BP = 5$ cm, $AB = 11$ cm, beweist, dass $9 < x < 10$.

14. $ABCD$ ist ein Quadrat und die Punkte M und N sind die Mittelpunkte der Seiten CD bzw. DA.
Beweist, dass:

a) $\Delta ABN \equiv \Delta DAM$; **b)** $AM \perp BN$.

15. Zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90°$ und der Seitenhalbierenden, die der Hypotenuse entspricht, von 5 cm.

16. Die Städte A, B, C, D sind über das in der nebenstehenden Skizze dargestellte Straßennetz verbunden. Wir wissen, dass $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CBD = 90^\circ$, E die Mitte der Strecke BD, F die Mitte der Strecke CD, $AD = 4$ km, $AE = 2{,}5$ km, $BC = 12$ km.



a) Bestimmt die Entfernung zwischen den Städten B und D und die Entfernung zwischen den Städten C und D.

b) Wählt den kürzesten Weg aus, um von Stadt A nach Stadt C zu gelangen. Argumentiert.

Minitest

Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.

30 Pkte. **a)** Die Maße der spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind zu den Zahlen 4 und 5 direkt proportional. Die Maße dieser Winkel sind:

A. 30° und 60°; **B.** 20° und 70°; **C.** 40° und 50°; **D.** 15° und 75°.

30 Pkte. **b)** Das Dreieck *ABC* ist gleichschenklig und rechtwinklig mit $\sphericalangle A = 90°$, *AD* ist die Höhe, AD = 5 cm. Die Hypotenuse des Dreiecks hat die Länge:

A. 5 cm; **B.** 10 cm; **C.** 2,5 cm; **D.** 7,5 cm.

30 Pkte. **c)** Wenn *BC* die Hypotenuse des Dreiecks *ABC* ist, dann:

A. $BC = AB + AC$; **B.** $BC^2 = AB^2 + AC^2$; **C.** $AB^2 = BC^2 + AC^2$; **D.** $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 20 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

ABSCHLIEßENDE BEWERTUNG

I. *Wählt den Buchstaben, der die richtige Antwort angibt, aus. Nur eine Antwort stimmt.*

5 Pkte. **1.** Wenn $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, $AB = 3$ cm, $EF = 5$ cm und $U_{DEF} = 15$ cm, dann beträgt die Länge der Strecke:

A. 3 cm; **B.** 5 cm; **C.** 7 cm; **D.** 8 cm.

5 Pkte. **2.** Das Dreieck *DEF* ist gleichschenklig, $DE \equiv DF$, *EM* ist die Winkelhalbierende des Winkels *DEF*, $\sphericalangle FEM = 25^\circ$. Das Maß des Winkels *EDF* ist:

A. 50°; **B.** 80°; **C.** 75°; **D.** 110°.

5 Pkte. **3.** Der Punkt *P* liegt auf der Hypotenuse *MN* des rechtwinkligen Dreiecks *AMN*, *AP* = 7,5 cm, und die Punkte *M* und *N* sind symmetrisch in Bezug auf die Gerade *AP*. Die Länge der Strecke *MN* ist:

A. 7,5 cm; **B.** 5 cm; **C.** 10 cm; **D.** 15 cm.

5 Pkte. **4.** Das Dreieck *ABC* ist gleichschenklig, $AB \equiv AC$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, *AD* = 4 cm. Wenn der Umfang des Dreiecks *ABD* 12 cm beträgt, dann beträgt der Umfang des Dreiecks *ABC*:

A. 16 cm; **B.** 18 cm; **C.** 24 cm; **D.** 20 cm.

5 Pkte. **5.** Im Dreieck *ABC* mit $\sphericalangle ABC = 40^\circ$ schneiden sich die Höhe *AD* und die Winkelhalbierende *BE* des Winkels *ABC* im Punkt *M*. Das Maß des Winkels *AME* ist:

A. 60°; **B.** 75°; **C.** 80°; **D.** 70°.

5 Pkte. **6.** Von folgenden Tripeln stellt die in der gleichen Maßeinheit ausgedrückten Längen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks dar:

A. (3; 4; 7); **B.** (5; 11; 13); **C.** (8; 15; 17); **D.** (20; 30; 40).

II. *Schreibt die vollständigen Lösungen auf.*

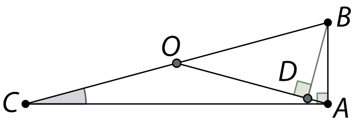
1. Die Strecken *BM* und *CN* sind Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck *ABC*, $M \in AC$, $N \in AB$ und $BM \cap CN = \{G\}$.

10 Pkte. **a)** Beweist, dass das Dreieck *BGC* gleichschenklig ist.

10 Pkte. **b)** Wenn *BG* = 12 cm, berechnet die Länge der Seitenhalbierenden *CN*.

10 Pkte. **2.** Es sei das Dreieck *DEF*, in dem $\sphericalangle DEF = 120^\circ$. Auf der Winkelhalbierenden des Winkels *DEF* betrachtet man den Punkt *L*, sodass $EL \equiv DE$. Beweist, das das Dreieck *DEL* gleichseitig ist.

3. Im rechtwinkligen Dreieck *ABC*, $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 15^\circ$, ist *O* die Mitte der Seite *BC*. Die Strecke *BD* ist Höhe im Dreieck *ABO*, $D \in AO$.



10 Pkte. **a)** Beweist, dass das Dreieck *ACO* gleichschenklig ist.

10 Pkte. **b)** Berechnet das Maß des Winkels *AOB*.

10 Pkte. **c)** Wenn *BD* = 8 cm, zeigt, dass *BC* = 32 cm.

Bemerkung: Arbeitszeit: 50 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

JAHRESWIEDERHOLUNG UND ABSCHLIEẞENDE BEWERTUNG

I. WIEDERHOLUNGSAUFGABEN

1. Mit den Elementen der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 49, 50\}$ bildet man die Teilmengen A, B, C, D, sodass: A die durch 2, aber nicht durch 3 teilbaren Zahlen enthält; B die durch 3 und nicht durch 2 teilbaren Zahlen enthält; C die durch 2 und durch 3 teilbaren Zahlen enthält; D die Zahlen enthält, die weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind. Bestimmt die Kardinalzahl jeder Teilmenge und stellt fest, welche von ihnen die meisten Elemente hat.

2. **a)** Bestimmt die ganze Zahl x, wenn bekannt ist, dass $(2 \cdot x + 1)$ die Zahl 6 teilt.
b) Zeigt, dass die Zahl $\overline{xy} + 7 \cdot y$ eine gerade Zahl ist für alle $x, y, x \neq 0$.

3. Berechnet x aus folgenden Verhältnisgleichungen:
a) $\frac{x+2,5}{x-2,5} = \frac{7}{2}$; **b)** $\frac{2}{x} = \frac{x+1}{28}$.

4. Berechnet den ggT und das kgV der Zahlen 45 und 75.

5. Eine Mannschaft von 10 Arbeitern kann eine Arbeit in 12 Tagen beenden. In wie vielen Tagen kann eine Mannschaft von 15 Arbeitern unter den gleichen Bedingungen die Arbeit beenden?

6. Berechnet:
a) $-10 - 13 - 4 + 27$;
b) $[4 \cdot (-16) - (-5) \cdot (-12)] : (13 - 3^2)$;
c) $-3 \cdot [13 - (-4 \cdot 5 + 12) : (-4)]$;
d) $96 : \{-5 \cdot [1 - 4 \cdot (2 \cdot 34 - 65)] - 67\}$.

7. Seien die Zahlen:
$a = 2^1 + (-2)^2 + 2^3$ und
$b = (-3)^3 + 3^2 + (-3)^1$.
Vergleicht die Zahlen $a - 20$ und $b + 10$.

8. Die ganzen Zahlen x, y, z sind direkt proportional zu 2, 3 bzw. 6.
a) Zeigt, dass die Zahl $A = x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x$ eine Quadratzahl ist.
b) Bestimmt die drei Zahlen, wenn bekannt ist, dass $x \cdot y \cdot z > 0$ și $x \cdot y + \frac{y \cdot z}{2} + \frac{z \cdot x}{3} = 76$.

9. Die Zahlen a und b sind umgekehrt proportional zu $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$, und $c = \frac{a+b}{2}$.
Bestimmt $a, b, c,$ wenn ihre Summe 13,5 beträgt.

10. Nach einem Preisnachlass von 10 % kostet ein Ball 45 Lei. Bestimmt den ursprünglichen Preis des Balls.

11. Teilt 140 Waffeln auf zwei Gruppen von Kindern auf, sodass 40 % von der Anzahl der Waffeln, die an die erste Gruppe gegeben werden, um 8 Stück größer ist als 24 % von der Anzahl der Waffeln, die an die zweite Gruppe gegeben werden.

12. Berechnet die Zahl:
$E = (-1)^{22} \cdot (-2) + (-3) \cdot (-1)^{33} + (-1)^{44} \cdot (-4)$.

13. Emil und Rareș berechnen die Zahlen a, b, c, d.

$$a = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left[0,(3) + 0,5 : \frac{3}{4}\right] : \frac{8}{9},$$

$$b = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{2} + 1\frac{1}{4} + \frac{2}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}},$$

$$c = \left|-\frac{3}{2} + 1\right| - \frac{-3^2 + 23}{-2^3 + 32} \text{ und}$$

$$d = \left[\left(-\frac{3}{4}\right)^5 : \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{64}\right] : 0,01.$$

Nachdem sie fertig gerechnet haben, führen sie folgendes Gespräch:
Emil: Keine der Zahlen ist eine natürliche Zahl.
Rareș: Ich habe zwei entgegengesetzte rationale Zahlen erhalten.
Berechnet die Zahlen und bestimmt, ob die Behauptungen der beiden Jungen richtig sind. Begründet eure Antwort.

14. Berechnet:
a) die Summe der rationalen Zahlen x, für die folgende Gleichung gilt; $|3 \cdot x - 2| - 1 = 4$;
b) das Produkt der ganzen Zahlen y, für die folgende Ungleichung stimmt: $-13 \leq 2 \cdot y - 7 < 1$.

15. Die Anzahl der Schüler der Volleyballmanschaft einer Schule und deren Alter sind in der folgenden Tabelle eingetragen.

Alter (Jahre)	11	12	13	14
Anzahl Schüler	4	6	6	4

a) Berechnet die Anzahl der Schüler und das durchschnittliche Alter der Schüler der Volleyballmannschaft.

b) Bestimmt, wie viele Schüler von 14 Jahren zur Mannschaft hinzukommen müssten, damit das Durchschnittsalter 13 Jahre beträgt.

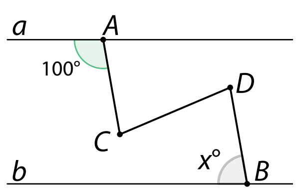
16. Theo erinnert sich nicht an das Passwort, aber er weiß, dass das Passwort die Form $\overline{2023ab}$ hat und die Zahl $\overline{2023ab}$ durch 25 teilbar ist. Entscheidet und begründet, wie viele Versuche Theo braucht, um sicherzugehen, dass er das Passwort richtig geschrieben hat.

17. Iancu bildet mit den Zahlen a und b,

$1 < a < 6$ und $0 \leq b < 15$, Verhältnisse der Form $\frac{b}{a}$.

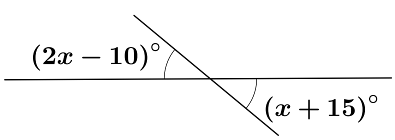
Bestimmt die Anzahl der von Iancu gebildeten Verhältnisse, deren Wert größer als 2 ist.

18. Lucas Haus befindet sich im Punkt A auf der Straße a. Luca möchte seinen Freund Vlad besuchen. Vlads Haus befindet sich im Punkt B auf der Straße b. Luca geht den Weg: $A - C - D - B$. Verwendet die nebenstehende Zeichnung und berechnet x, wenn bekannt ist, dass $a \parallel b$ und $AC \parallel BD$.

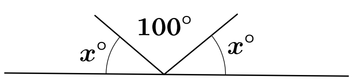


19. Berechnet die unbekannten Zahlen in jedem der Fälle.

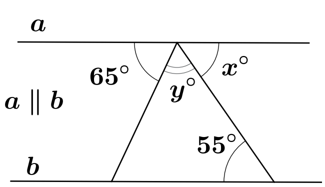
a)



b)



c)



20. Die Halbgeraden OM und ON sind Winkelhalbierende der nicht anliegenden Winkel AOB bzw. AOC, $\sphericalangle AOB = x° < 90°$ und $OB \perp OC$.

a) Berechnet die Maße der Winkel AOM und BON in Funktion von x.

b) Zeigt, dass das Maß des Winkels MON nicht vom Maß des Winkels AOB abhängt.

21. Im Dreieck ABC ist $\sphericalangle A = 60°$, $AB = 2{,}5$ cm. Berechnet:

a) den Umfang des Dreiecks, wenn $AB = BC$.

b) die Länge der Strecke AC, wenn bekannt ist, dass die Winkel A und C des Dreiecks ABC komplementär sind.

22. Die Punkte A und B befinden sich auf derselben Seite der Geraden CD, $AD \perp CD$, $BC \perp DC$ und $AD \equiv BC$. Beweist, dass:

a) $AC \equiv BD$;

b) die Distanz von C zur Geraden BD gleich ist mit der Distanz von D zur Geraden AC.

23. Im Dreieck MNP ist $MN \equiv MP$, $\sphericalangle NMP = 44°$, und H ist das Orthozentrum des Dreiecks.
Berechnet das Maß des Winkels NHP.

24. Die gleichseitigen Dreiecke AMN und BMN befinden sich in verschiedenen Halbebenen in Bezug auf die Gerade MN.
Beweist, dass:

a) die Halbgerade AB die Winkelhalbierende des Winkels MAN ist;

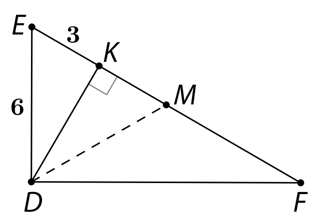
b) die Gerade MN die Mittelsenkrechte der Strecke AB ist.

25. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, $\sphericalangle A - \sphericalangle B = 105°$.

a) Nennt die kongruenten Seiten.

b) Berechnet das Maß des stumpfen Winkels, der von den Winkelhalbierenden der Winkel B und C des Dreiecks gebildet wird.

26. Es sei das Dreieck DEF, in dem $\sphericalangle D = 90°$, $DE = 6$ cm, $DK \perp EF$, $K \in EF$ und $EK = 3$ cm.



a) Berechnet die Winkelmaße der Winkel des Dreiecks DEF.

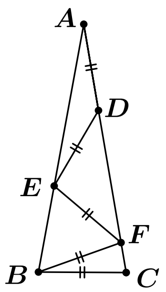
b) Zeigt, dass $FK = 9$ cm.

c) Wenn M die Mitte der Seite EF ist, berechnet die Länge der Strecke KM.

27. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit der Basis BC, $E \in AB$, $D \in AC$, $F \in AC$, sodass $AD = DE = EF = FB = BC$.

a) Berechnet das Maß des Winkels BAC.

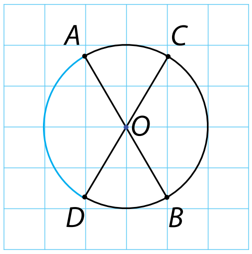
b) Zeigt, dass das Dreieck BEF gleichseitig ist.



28. Die Strecken AB und CD sind Durchmesser des Kreises $C(O, r)$, $AB = 8$ cm, und das Maß des kleinen Kreisbogens $\overset{\frown}{AD}$ beträgt 120°.

a) Zeigt, dass das Dreieck AOC gleichseitig ist, und berechnet seinen Umfang.

b) Zeigt, dass $AC \parallel BD$.



29. Im gleichseitigen Dreieck DEF mit dem Umfang von 24 cm werden die Seitenhalbierenden DM und EN um die Strecken $MP \equiv DM$ und $NQ \equiv EN$ verlängert.

a) Zeigt, dass die Punkte P, F, Q kollinear sind.

b) Berechnet die Länge der Strecke PQ.

30. Durch I, den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Winkel des Dreiecks ABC, wird die Gerade d parallel zu BC gezogen, $d \cap AB = \{D\}$, $d \cap AC = \{E\}$.

a) Zeigt, dass das Dreieck BDI gleichschenklig ist.

b) Wenn I die Mitte der Strecke DE ist, zeigt, dass $AB \equiv AC$.

31. Sei das Dreieck ABC mit der Hypotenuse BC, D ist der Symmetriepunkt von B in Bezug auf AC und E ist die Mitte der Strecke CD, sodass $AC \cap BE = \{G\}$, $AB = 4$ cm, $AG = 3$ cm.

a) Berechnet die Längen der Strecken BG, CG und BE.

b) Zeigt, dass $BC < 10$ cm.

II. ABSCHLIEẞENDE BEWERTUNGSTESTS

TEST 1

I. *Wählt den Buchstaben aus, der die richtige Antwort angibt. Nur eine Antwort stimmt.*

5 Pkte. **1.** Das Ergebnis der Rechnung $(-95) : (-19) + (-2)^3$ ist:
A. 3; **B.** -3; **C.** -13; **D.** 13.

5 Pkte. **2.** Wenn $|x - 0{,}(3)| = 0$, dann ist $6 \cdot x$:
A. -2; **B.** 1; **C.** 2; **D.** 3.

5 Pkte. **3.** 40 % von 125 Lei sind:
A. 50; **B.** 55; **C.** 60; **D.** 75.

5 Pkte. **4.** Wenn $a = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^3$, dann ist das Produkt $-10 \cdot \frac{1}{a}$ gleich:
A. -8; **B.** -16; **C.** 8; **D.** 16.

5 Pkte. **5.** Von den 24 Schülern einer Klasse haben 18 bei einem Test Noten über 8 erhalten. Wie viele Prozent der Schüler haben Noten über 8 erhalten?
A. 80 %; **B.** 60 %; **C.** 75 %; **D.** 18 %.

5 Pkte. **6.** Wenn das Supplement eines Winkels 53° misst, dann hat der Winkel das Maß:
A. 37°; **B.** 137°; **C.** 57°; **D.** 127°.

5 Pkte. **7.** Die Geraden AC und BD schneiden sich im Punkt O und $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle BOC$. Dann beträgt das Maß von $\sphericalangle AOD$:
A. 60°; **B.** 90°; **C.** 120°; **D.** 180°.

5 Pkte. **8.** Das Dreieck ABC hat den Umfang von 22 cm, $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ und $AB = 6$ cm. Die Seite BC hat eine Länge von:
A. 6 cm; **B.** 8 cm; **C.** 16 cm; **D.** 10 cm.

II. *Schreibt die vollständigen Lösungen auf.*

1. Ein Buch kostet 27 Lei. Das sind 54 % des Preises einer Füllfeder.

10 Pkte. **a)** Berechnet den Preis der Füllfeder.

15 Pkte. **b)** Liviu kauft ein Buch und eine Füllfeder und bezahlt dafür 44 % der Geldsumme, die er hat. Wie viel Geld bleibt Liviu übrig?

2. Das Dreieck *ABC* ist gleichschenklig, $AB = AC$, und ein Außenwinkel hat das Maß von 50°. Die Punkte *D* und *E* befinden sich auf der Seite *BC*, sodass $\sphericalangle BAD = 35°$ und $\sphericalangle AEC = 120°$.

10 Pkte. **a)** Berechnet die Maße der Winkel des Dreiecks *ABC*.

15 Pkte. **b)** Beweist, dass das Dreieck *ADE* gleichseitig ist.

Bemerkung: Arbeitszeit: 50 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

TEST 2

I. *Wählt den Buchstaben aus, der die richtige Antwort angibt. Nur eine Antwort stimmt.*

5 Pkte. **1.** Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der zufälligen Wahl einer Zahl aus der Menge {1, 2, 3, … , 30} diese eine Primzahl ist, beträgt:

A. $\frac{1}{4}$; **B.** $\frac{7}{30}$; **C.** $\frac{9}{20}$; **D.** $\frac{1}{3}$.

5 Pkte. **2.** Das Ergebnis der Rechnung $-\frac{1}{2}:\left(-\frac{1}{4}\right)-5$ ist:

A. – 3; **B.** – 7; **C.** 3; **D.** 5.

5 Pkte. **3.** x und y sind ganze Zahlen, $x < 0$, $y > 0$, $x^2 = 100$, $y^2 = 400$. Dann ist $x : y$ gleich:

A. –2; **B.** – 0,5; **C.** 0,2; **D.** –0,2.

5 Pkte. **4.** Die Zahlen *a* und 2 sind direkt proportional zu den Zahlen 7 und 1,75. Die Zahl *a* ist:

A. 4; **B.** 14; **C.** 8; **D.** 3,5.

5 Pkte. **5.** Wenn $\frac{x+1}{x+5}=\frac{7}{15}$, dann ist x:

A. 2,5; **B.** 11; **C.** 3,5. **D.** 15;

5 Pkte. **6.** *AD* und *BE* sind Seitenhalbierende im Dreieck *ABC*, $AD \cap BE = \{G\}$, $AG = 6$ cm, $GE = 3$ cm. Die Differenz $AD – BE$ beträgt:

A. 3 cm; **B.** 2 cm; **C.** 1 cm; **D.** 0 cm.

5 Pkte. **7.** Im rechtwinkligen Dreieck *ABC* bildet die Winkelhalbierende des Winkels *C* mit der Hypotenuse *BC* einen Winkel von 24°. Das Maß des Winkels *B* beträgt:

A. 24°; **B.** 42°; **C.** 56°; **D.** 66°.

5 Pkte. **8.** *D* ist die Mitte der Seite *BC* des gleichseitigen Dreiecks *ABC*. Im Äußeren des Dreiecks konstruiert man das gleichseitige Dreieck *BDE*. Die Gerade *BE* ist parallel zu:

A. *AD*; **B.** *CD*; **C.** *AC*; **D.** *BC*.

II. *Schreibt die vollständigen Lösungen auf.*

20 Pkte. **1.** Bestimmt die Zahlen *x, y, z,* wenn bekannt ist, dass ihre Summe 84 beträgt und die Zahlen x, $y – 1$, $z – 2$ zu 2, 3 bzw. 4 direklt proportional sind.

2. Im gleichschenkligen Dreieck *ABC* ist $\sphericalangle A = 120°$ und *M* ist die Mitte der Seite *AB*. Die Senkrechte aus *M* auf die Gerade *BC* schenidet die Gerade *AC* in *D*. Beweist, dass:

15 Pkte. **a)** das Dreieck *BCD* rechtwinklig ist;

15 Pkte. **b)** $AB = 2 \cdot DM$.

Bemerkung: Arbeitszeit: 90 Minuten
10 Punkte von Amts wegen

HINWEISE UND LÖSUNGEN

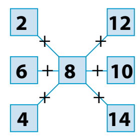
WIEDERHOLUNG UND ERSTBEWERTUNG

I. WIEDERHOLUNGSAUFGABEN (Seite 7)

1. a) 506; b) 1011; c) 1307; d) 13. **2.** Die Summe aller Ziffern ist 45, und die auferlegte Bedingung führt zur Summe für Zeile und Spalte 46. Folglich ist die gemeinsame Ziffer 46 – 45 = 1. Ein Beispiel ist:

5 8 1 2 7
9
3
4
6

3. Die Summe der auszufüllenden Zahlen ist 56. Wir bezeichnen mit $s = a + d + g = b + d + f = c + d + e$. Folglich ist $a + d + g + b + d + f + c + d + e = 3s$ oder $56 + 2d = 3s$. Es gibt drei Werte für d: $d = 2$, $d = 8$, $d = 14$. Eine Lösung dieser Aufgabe ist: $a = 2$, $b = 6$, $c = 4$, $d = 8$, $e = 12$, $f = 10$, $g = 14$.



4. $a = (210 \cdot 21)^2$. **5.** $b = (3^2)^3$. **6. a)** $8^{15} = 2^{45}$, also $n < m$; **b)** $20^{18} = (2^{15} \cdot 5^{18}) \cdot 2^{21} = (2^{15} \cdot 5^{18}) \cdot 128^3$; $50^{15} = (2^{15} \cdot 5^{18}) \cdot 625^3$ und $128 < 625$, also $n < m$. **7. a)** {1, 2, 3, 4, 6, 12}, **b)** {46, 69, 92, 115, 138,161,184,207, 230}. **8.** $u + v + w = 4 + 3 + 5 = 12$, zusammengesetzte Zahl. **9.** $a = 34 \cdot 4 \cdot 3^n \cdot 5^{n+1} : 34$. **10. a)** 7 Kinder; **b)** 3 Brüder und 3 Schwestern. **11. a)** 41, **b)** 43. **12. a)** 0,6; 0,77; 0,(6); 1,1(3); 27,4(2); **b)** $\frac{7}{5}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{211}{90}$. **13.** $\frac{1251}{500}$ = 2,502 und 2,5(501) > 2,502 > 2,(501) > 2,50(11). **14. a)** 3; **b)** $\frac{1}{10}$; **c)** 0,167; **d)** $\frac{7}{4}$. **15.** $a = 7$ ist eine natürliche Zahl. **16.** 321 km. **17. a)** 18,5; **b)** 11. **18.** 101 Äpfel, 8 Körbe. **19.** 5760 Tüten, 240 Kisten. **20.** $1 < v < a < g < r$ und $v + a + g + r = 14$. Da $2 + 3 + 4 + 5 = 14$, folgern wir, dass Raul 2 grüne Mützen gekauft hat, und dass 12 geblieben sind: 3 blaue, 4 gelbe, 5 rote. **21.** 26,2 Lei. **22.** 1026 Lei. **23.** 108 Seiten. **24. a)** 353 dam; **b)** 0,8 km; **c)** 1,2 hm² = 1,2 ha, **d)** 14000 m², **e)** 7 dam³, **f)** 3500 dm³. **25. a)** 1230 m; **b)** 222 700 cm, **c)** 50505 m²; **d)** 690,3 m². **27. a)** $AB \parallel CD$; **b)** AB, BC, FB. **28. a)** 56°; **b)** 10°; **c)** 60°48′; **d)** 6°27′. **29.** 57,6 cm, 155,52 cm². **30. a)** 30 cm; **b)** 75 %. **31. a)** 33 m; **b)** 2651m².

II. ERSTBEWERTUNGSTESTS (Seite 9)

Test Nr. 1: I. 1. C; **2.** B; **3.** A; **4.** A; **5.** C; **6.** C.

II. 1. a) 31; **b)** {1, 31}; 32. **2.** 32,400 km. **3.** $AC = 4$ cm; $BC = 14$ cm; $BD = 7$ cm; $AD = 11$ cm.

Test Nr. 2: I. 1. A; **2.** C; **3.** C; **4.** A; **5.** D; **6.** A.

II. 1. a) 1061; **b)** 8091. **2.** 1760 m. **3.** $B = 10$ m; $L = 30$ m; $U = 80$ m.

ÜBUNGEN UND AUFGABEN UND MINITESTS

Sie sind im digitalen Lehrbuch (in rumänischer Sprache) in Form des statischen AMII am Ende jeder Lerneinheit zu finden. (1.1; 1.2; ...; 6.4).

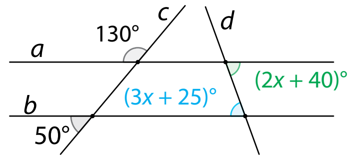
ABSCHLIEßENDE BEWERTUNG

1. MENGEN. DIE MENGE DER NATÜRLICHEN ZAHLEN (Seite 36) I. 1. C; **2.** B; **3.** A; **4.** D; **5.** D; **6.** B. **II. 1. a)** $C = \{0, 3, 6, 9\}$; **b)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B \cap C = \{6\}$, $C \setminus A = \{0, 6, 9\}$; **c)** $\{4\} \cup \{a, 5\} = \{3, 4, 5\} \Rightarrow a = 3$. **2. a)** Für a gibt es 9 Möglichkeiten, für b gibt es 5 Möglichkeiten, insgesamt $9 \cdot 5 = 45$ Zahlen; **b)** $T_{98} = \{1, 2, 7, 14, 49, 98\}$. **3. a)** $a = 2^3 \cdot 3$, $b = 3^2 \cdot 5$, $(a, b) = 3$, $[a, b] = 360$; **b)** $a + b = 69$ und $T_{69} = \{1, 3, 23, 69\}$. Die Teiler der Zahl 69, die Primzahlen sind, sind 3 und 23.

2. VERHÄLTNISSE. VERHÄLTNISGLEICHUNGEN (Seite 63) I. 1. B; **2.** C; **3.** A; **4.** D; **5.** B; **6.** C. **II. 1. a)** Wenn wir die drei Mengen mit a, b, c bezeichnen, erhalten wir $\frac{a}{5} = \frac{b}{9} = \frac{c}{10} = \frac{a+b+c}{5+9+10} = 10$; die kleinste ist $a = 50$ kg; **b)** $p = \frac{7}{20}$.

2. a) $\frac{84}{700} = 12\%$. Es wird um 12 % erhöht. **b)** 100 % – 12 % = 88 %. Da $\frac{88}{100} \cdot 784 = 689{,}92$ (Lei), ist der neue Preis kleiner als der ursprüngliche Preis. **3. a)** Aus $a \cdot \frac{1}{2} = b \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow b = 2 \cdot a$; **b)** $n = 5 \cdot a$ und $m = 5 \cdot a$ und $\frac{n}{n+m} = \frac{1}{2}$.

3. DIE MENGE DER GANZEN ZAHLEN (Seite 93) I. 1. D; **2.** B; **3.** D; **4.** B; **5.** C; **6.** A. **II. 1. a)** $a = 8$, $b = -38$, $c = 4$; **b)** $9 \cdot (a - c) + b = -2$, negative ganze Zahl. **2. a)** $2 \cdot x \cdot (y + z) = -10$; **b)** $y + z = -9$. **3. a)** $s = -57 + 3 \cdot 17 = -6$; **b)** Die Zahlen sind -1, -2 und -3.



4. DIE MENGE DER RATIONALEN ZAHLEN (Seite 122) I. 1. A; **2.** B; **3.** C; **4.** D; **5.** B; **6.** C. **II. 1. a)** $a = -5$, $b = -4$, $c = -\frac{7}{2}$ und $c \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$; **b)** $d = \frac{-70}{-7} = 10 \in \mathbb{N}$. **2.** $S = \{-3\}$. **3. a)** $\frac{p}{2}$; **b)** $\frac{p}{3}$; **c)** $\frac{p}{2} + \frac{p}{3} + 150 = p$; **d)** $p = 900$ (Lei).

5. GRUNDBEGRIFFE DER GEOMETRIE (Seite 172) I. 1. B; **2.** C; **3.** A; **4.** D; **5.** B; **6.** A. **II. 1. a)** $130° + 50° = 180°$. Die Geraden a und b bilden äußere supplementäre Winkel auf derselben Seite der Sekante c. Es folgt, dass $a \parallel b$; **b)** Die markierten Winkel sind innere Wechselwinkel, bestimmt von den parallelen Geraden a und b mit der Sekante d. Aus $3 \cdot x + 25 = 2 \cdot x + 40$ folgt $x = 15$. **2. a)** $\sphericalangle AOB = 90°$, $\sphericalangle BOC = 60°$; **b)** $\sphericalangle MOP = \sphericalangle MON + \sphericalangle NOP = 75° + 15° = 90°$. **3. a)** $d = 2$; **b)** $d = 4$; **c)** $d \in \{6, 8\}$.

6. DAS DREIECK (Seite 218) I. 1. C; **2.** B; **3.** D; **4.** A; **5.** D; **6.** C. **II. 1. a)** $BM = CN$ und $BG = \frac{2}{3} \cdot BM = \frac{2}{3} \cdot CN = CG$; **b)** $BM = \frac{3}{2} \cdot BG = 18$ cm, also $CN = 18$ cm. **2.** $\sphericalangle DEL = \sphericalangle DEF : 2 = 60°$ und $DE \equiv EL$. **3. a)** $BO = CO = \frac{BC}{2}$ und $AO = \frac{BC}{2} \Rightarrow AO \equiv CO$; **b)** Aus $AO = CO \Rightarrow \sphericalangle ACO = \sphericalangle CAO = 15°$. Winkel AOB ist Außenwinkel des Dreiecks ACO und $\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACO + \sphericalangle CAO = 30°$. **c)** In ΔOBD: $\sphericalangle ODB = 95°$, $\sphericalangle BOD = 30° \Rightarrow BD = \frac{BO}{2} = \frac{BC}{4}$. Dann $BC = 4 \cdot BD = 32$ cm.

WIEDERHOLUNG UND ABSCHLIEßENDE BEWERTUNG

I. WIEDERHOHLUNGSAUFGABEN (Seite 219)

1. card $A = 17$, card $B = 8$, card $C = 8$, card $D = 17$. Die Mengen A und D haben die meisten Elemente. **2. a)** $x \in \{-2, -1, 0, 1\}$; **b)** $+ 7 \cdot y = 2 \cdot (5 \cdot x + 4 \cdot y)$. **3. a)** 4,5; **b)** 7. **4.** $(45, 75) = 15$; $[45, 75] = 225$. **5.** 8 Tage. **6. a)** 0; **b)** -31; **c)** -33; **d)** -8. **7.** $a = 14$, $b = -21$, $a - 20 > b + 10$. **8. a)** $A = 36k^2 = (6k)^2$, $k \in Z$; **b)** $x = 4$, $y = 6$, $z = 12$. **9.** $a = 3$; $b = 3$, $c = 4{,}5$. **10.** 50 Lei. **11.** 65 bzw. 75 Waffeln. **12.** $E = -3$. **13.** $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{184}{3}$, $c = -\frac{1}{12}$, $d = -50$; Emil hat recht, Rareș nicht. **14. a)** $x \in \{-1, \frac{7}{3}\}$, $S = \frac{4}{3}$; **b)** $y \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $P = 0$. **15. a)** 20 Schüler; $m = 12{,}5$; **b)** 10 Schüler. **16. a)** ab kann sein: 00; 25; 50; 75; 4 Versuche. **17.** $A \in \{2, 3, 4, 5\}$, $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 13, 14\}$, $a = 2$, $b > 4$; 10 Verhältnisse; $a = 3$, $b > 6$; 8 Verhältnisse; $a = 4$, $b > 8$; 6 Verhältnisse; $a = 5$, $b > 10$; 4 Verhältnisse, insgesamt 28 Verhältnisse. **18.** Sei $AC \cap b = \{E\}$. $\sphericalangle AEB = 100°$ und $\sphericalangle AEB$, $\sphericalangle DBE$ sind supplementär $\Rightarrow x = 80$. **19. a)** $x = 25$; **b)** $x = 40$; **c)** $x = 55$, $y = 60$. **20. a)** $\sphericalangle AOM = \left(\frac{x}{2}\right)^{\circ}$, $\sphericalangle BON = \left(45 - \frac{x}{2}\right)^{\circ}$; **b)** $\sphericalangle MON = 45°$. **21. a)** $U = 7{,}5$ cm; **b)** $AC = 5$ cm. **22. a)** $\Delta ADC \equiv \Delta BCD$ $(KK) \Rightarrow AC \equiv BD$, $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle CBD$; **b)** $DE \perp AC$, $E \in AC$, $CF \perp BD$, $F \in BD$; $\Delta ADE \equiv \Delta BCF$ $(HW) \Rightarrow DE \equiv CF$. **23.** $\sphericalangle NHP = 180° - \sphericalangle M = 136°$. **24. a)** $\Delta AMB \equiv \Delta ANB \Rightarrow \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle NAB$; **b)** Im gleichschenkligen ΔAMB mit der Basis AB ist MN die Winkelhalbierende des Winkels gebildet mit den kongruenten Seiten $\Rightarrow MN$ ist Mittelsenkrechte der Seite AB. **25. a)** $\sphericalangle A = \sphericalangle B + 105°$ $\Rightarrow \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$ und $AB \equiv AC$; **b)** $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 25°$ und $\sphericalangle BIC = 155°$. **26. a)** $\sphericalangle D = 90°$, $\sphericalangle E = 60°$, $\sphericalangle F = 30°$; **b)** $EF = 12$ cm, $FK = 9$ cm; **c)** $KM = 3$ cm. **27.** Sei $\sphericalangle BAC = x$. $AD \equiv DE \Rightarrow \sphericalangle BAC = \sphericalangle AED = x$; wir erhalten $\sphericalangle EDF = 2 \cdot x$. $DE \equiv EF \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle EFD = 2 \cdot x$ und $\sphericalangle BEF = 3 \cdot x$. Folglich ist $\sphericalangle EBF = 3 \cdot x$ und $\sphericalangle BFC = 4 \cdot x = \sphericalangle BCF$. Im ΔABC: $x + 4x + 4x = 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \sphericalangle BAC = 20°$; **b)** $\sphericalangle BEF = 60°$ und $EF = BF$. **28. a)** $AO = OC$ und $\sphericalangle AOC = 60°$; b) $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABD = 60°$. **29.** a) $\Delta EFN \equiv \Delta QFN \equiv \Delta PFM$ (KK) $\Rightarrow \sphericalangle EFN = \sphericalangle QFN = \sphericalangle PFM = 60°$; **b)** $PQ = 2 \cdot DE = 16$ (cm). **30. a)** $\sphericalangle BID \equiv \sphericalangle IBC \equiv \sphericalangle IBD$; **b)** AI ist Seitenhalbierende und Winkelhalbierende. **31. a)** $BG = 5$ cm, $CG = 2 \cdot AG = 6$ cm, $BE = \frac{3}{2} \cdot BG = 7{,}5$ cm; **b)** $BC^2 = 97 < 100 \Rightarrow BC < 10$ (cm).

II. ABSCHLIEßENDE BEWERTUNGSTESTS (Seite 221)

Test Nr. 1: I. 1. B; **2.** C; **3.** A; **4.** D; **5.** C; **6.** D; **7.** A; **8.** B. **II. 1. a)** 50 Lei; **b)** 98 Lei. **2. a)** Da $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, folgt, $\sphericalangle A_{ext} = 50°$. Man erhält $\sphericalangle A = 130°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 25°$; **b)** $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AED = 60°$.

Test Nr. 2: I. 1. D; **2.** A; **3.** B; **4.** C; **5.** A; **6.** D; **7.** B; **8.** C. **II. 1. a)** $x = 18$, $y = 28$, $z = 38$. **2. a)** ΔAMD ist gleichseitig, also $DM = MA = MB$. **b)** Im ΔADB ist DM die der Hypotenuse AB entsprechende Seitenhalbierende. Es folgt, $AB = 2 \cdot DM$.

So ist es: Gebildet ist der Mensch,
der nie aufhört zu lernen.

Lucian Blaga

Tradiție din 1989
www.litera.ro
ISBN 978-630-319-679-4